

**COLLANA**  
**Artefatti** intelligenti

Andrea Maffia e Anna Baccaglioni-Frank

# **IMPARARE CON IL TUBÒ PITAGORICO**

**Esercizi e strategie per l'uso delle tabelline  
nelle moltiplicazioni e divisioni**

**Erickson**

# Indice

- 7** Introduzione (*Francesca Martignone*)
- 9** Come utilizzare il volume (*Francesca Martignone*)
- 15** PARTE 1 – Diagrammi rettangolo
  - SCHEDA 1 Introduzione dei diagrammi rettangolo
  - SCHEDA 2 Rettangoli simmetrici
  - SCHEDA 3 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 2
  - SCHEDA 4 Dai quadretti totali ai lati: multipli di 2
  - SCHEDA 5 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 5 e 10
  - SCHEDA 6 Dai quadretti totali ai lati: multipli di 5 e 10
  - SCHEDA 7 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 4
  - SCHEDA 8 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 8
  - SCHEDA 9 Dai quadretti totali ai lati: multipli di 4 e 8
  - SCHEDA 10 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 3 e 6
  - SCHEDA 11 Dai quadretti totali ai lati: multipli di 3 e 6
  - SCHEDA 12 Controlla quello che sai
  - SCHEDA 13 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 7
  - SCHEDA 14 Rettangoli con proprietà in comune: multipli di 9
  - SCHEDA 15 Dai quadretti totali ai lati: multipli di 7 e 9
  - SCHEDA 16 Controlla quello che sai
  - SCHEDA 17 Rettangoli «strani»
  - SCHEDA 18 Dai quadretti totali ai lati
- 43** PARTE 2 – Il Tubò pitagorico
- 45** Scheda di presentazione: Come è fatto il Tubò
  - SCHEDA 1-5 Cosa vedo se
  - SCHEDA 6-16 Come si può arrivare a...?
  - SCHEDA 17-23 A quale configurazione arrivo se...?
  - SCHEDA 24-35 È possibile?

# Introduzione

Francesca Martignone\*

Questo libro è concepito come un quaderno di lavoro che raccoglie diverse schede che hanno l'obiettivo di guidare il bambino in un percorso per rafforzare le conoscenze sulle tabelline e per sviluppare processi fondanti il pensiero matematico, come la generazione di congetture e la produzione di argomentazioni. In particolare le attività proposte sfruttano diversi approcci e strumenti utili al bambino per sviluppare efficaci strategie per il calcolo di prodotti e divisioni che si appoggino sulla conoscenza delle tabelline «entro il 10».

Nella prima parte del libro sono proposti compiti che facilitano il ricordo e la costruzione del significato dei prodotti dei numeri naturali da 1 a 10. Le schede di lavoro proposte in questa parte prevedono l'uso di *diagrammi rettangolo*, che sono un'elaborazione dell'idea pitagorica di «numeri rettangolari» ripresa negli *Elementi* di Euclide. I diagrammi rettangolo consentono di dare alla costruzione e all'automatizzazione delle tabelline un'importante componente visuo-spaziale che ne favorisce i processi di memorizzazione e quindi l'automatizzazione. Ai bambini è richiesto di lavorare con prodotti di numeri naturali entro il  $10 \times 10$  e i prodotti noti al bambino saranno utilizzati per arrivare rapidamente a ricostruire quei prodotti che ancora non sono automatizzati.

Nella seconda parte del libro viene introdotto un artefatto intelligente, il *Tubò*, che potrà essere usato dai bambini per risolvere diversi compiti. L'esplorazione del *Tubò* avviene secondo fasi ben strutturate che permettono lo sviluppo di diversi schemi d'utilizzo che, in base alle differenti consegne, faranno evolvere l'artefatto in uno strumento utile per risolvere diversi problemi. Acquisire abilità e consapevolezza nella manipolazione del *Tubò* consentirà al bambino di diventare ancora più padrone dei processi coinvolti nella generazione di multipli e sottomultipli dei numeri naturali coinvolti nelle tabelline «entro il 10». È molto importante tenere presente che, come tutti gli altri artefatti presentati all'interno della collana «Artefatti Intelligenti», anche il *Tubò* viene proposto non come strumento compensativo ma come strumento mediante cui favorire un rafforzamento di fondamentali processi cognitivi legati al pensiero aritmetico. L'obiettivo finale è l'interiorizzazione da parte del bambino delle proprietà e degli schemi che permettono allo strumento di generare/visualizzare prodotti e divisioni che si appoggiano sulle tabelline «entro

---

\* Ricercatrice in Didattica della matematica presso l'Università del Piemonte orientale.

il 10». Questo obiettivo potrà essere raggiunto attraverso le attività proposte dal libro che favoriranno la scoperta della matematica incorporata nello strumento e lo sviluppo di schemi d'utilizzo differenti secondo le consegne. Lo strumento diventerà quindi un modello mentale, cioè una costruzione psicologica flessibile e generalizzabile. Per ciascun bambino i tempi di sviluppo e appropriazione delle competenze possono essere diversi.

Il libro è strutturato in modo tale da consentire un graduale apprendimento delle proprietà delle tabelline e dei diversi schemi d'utilizzo del Tubò, per poi arrivare a schede di riepilogo che possono essere anche affrontate successivamente senza di fatto usare il Tubò, ma solo immaginando le possibili strategie da seguire per ottenere il risultato richiesto. Durante questo processo di interiorizzazione delle conoscenze relative alle tabelline, i genitori o l'educatore possono svolgere un ruolo importante: seguendo le attività del bambino, essi potranno valutare le evoluzioni avvenute o supportare il bambino nei momenti di difficoltà, non suggerendo direttamente la risposta, ma sostenendolo nello sviluppo dei processi di risoluzione in atto.

# Come utilizzare il volume

Francesca Martignone

## Parte 1 – Attività sui diagrammi rettangolo

Le schede di lavoro proposte nella prima parte del libro prevedono l'uso di *diagrammi rettangolo*: una rielaborazione dei «numeri rettangolari» studiati già dai pitagorici, poi ripresa negli *Elementi* di Euclide. Possiamo quindi dire che la scelta di questo tipo di artefatti è stata compiuta non solo per ragioni didattiche, ma perché ha importanti radici storico-culturali. L'utilizzo dei diagrammi rettangolo ha l'obiettivo di far sviluppare nel bambino una componente visuo-spaziale nella costruzione dei significati legati all'operazione prodotto tra numeri naturali. L'acquisizione di queste conoscenze potrà favorire i processi di memorizzazione e quindi l'automatizzazione.

Le consegne proposte collegano rappresentazioni numeriche a rappresentazioni geometriche dell'operazione di prodotto tra numeri naturali: nello specifico sono analizzate le tabelline «entro il 10». Nella prima scheda sono costruiti gli schemi d'utilizzo dei diagrammi rettangolo. Poi le proprietà dell'operazione prodotto sono studiate anche attraverso le proprietà geometriche delle rappresentazioni di rettangoli che hanno come dimensioni i fattori delle moltiplicazioni: ad esempio la commutatività viene collegata alla simmetria (scheda 2). Le schede seguenti guidano il bambino nella scoperta di come generare e riconoscere multipli e sottomultipli, sempre tenendo insieme diverse rappresentazioni. La molteplicità di approcci e la possibilità di sviluppare diversi schemi per affrontare lo stesso problema favoriranno l'apprendimento di bambini con diversi stili cognitivi. Le attività proposte non sono esercizi in cui devono essere solamente mobilitate conoscenze e procedure, ma sono dei problemi in cui è richiesto al bambino anche di generare congetture, produrre argomentazioni e controllare la correttezza dei risultati ottenuti. È per questo importante che i bambini non si limitino a svolgere le azioni necessarie per usare i diagrammi rettangolo, ma che scrivano le argomentazioni richieste.

## Parte 2 – Attività con il Tubò

Nel libro sono proposte tante attività diverse da affrontare con il supporto del Tubò. Analizzare la struttura fisica del Tubò, i movimenti possibili e i risultati ad

essi connessi sono i primi passi da svolgere per poter poi utilizzare lo strumento in modo efficace per affrontare i compiti proposti.

### *Esplorazione dell'artefatto*

La fase di esplorazione dell'artefatto è fondamentale per permettere al bambino di individuare come le leggi matematiche siano incorporate nello strumento e di appropriarsi delle potenzialità dello strumento come supporto per la risoluzione di problemi. Il Tubò, così come suggerisce il suo nome, è un tubo con due manopole ruotabili agli estremi, una blu e l'altra rossa. La parte centrale del Tubò è un cilindro che mostra delle «finestre» all'interno delle quali possono variare dei numeri. Nelle quattro finestre piccole (che presentano delle caselle con sfondo rosso o blu secondo la ruota che ne comanda il movimento) possono comparire numeri e lettere: nello specifico, muovendo la manopola rossa, le caselle rosse possono mostrare i numeri naturali dall'1 al 10 e la casella vuota (che rappresenta lo zero), mentre, muovendo la manopola blu, le caselle blu possono mostrare i numeri naturali dall'1 al 10 e una casella con la lettera «T» che significa «tabellina». Muovendo quindi le manopole si possono scegliere i numeri nelle caselle rosse e blu e, di conseguenza, sarà generato dal Tubò un numero nella barra centrale. I numeri e simboli sul Tubò si leggono partendo da sinistra verso destra (si veda la figura 1).

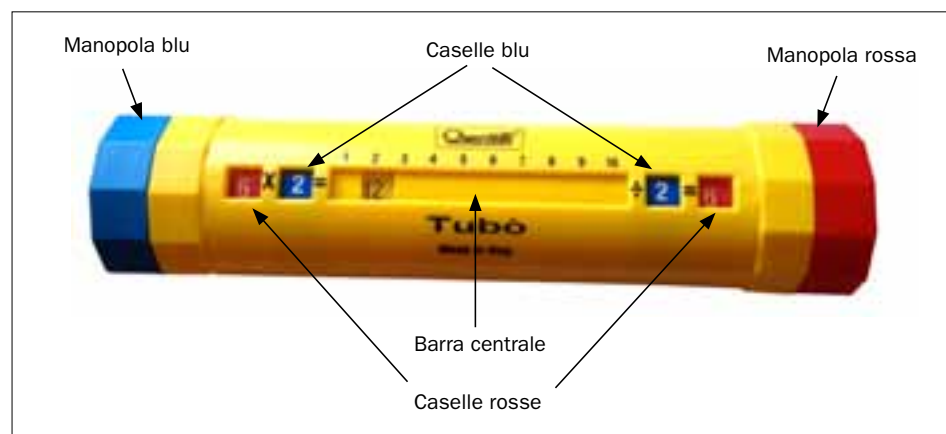


Fig. 1 Il Tubò e la nomenclatura usata nel libro.

Le prime due finestre sono separate dal simbolo  $\times$  (per), che significa che il numero nella casella rossa è moltiplicato per quello presente nella casella blu. Il risultato della moltiplicazione si legge nella barra centrale che, infatti, è separata dai fattori dal segno  $=$  (uguale). Proseguendo nella lettura delle finestre e simboli presenti sul Tubò, incontriamo ancora una finestra con caselle blu e una con caselle rosse (sempre governate dalle rispettive ruote colorate e in cui compariranno gli stessi simboli delle precedenti caselle rosse e blu) questa volta però le finestre sono separate dalla barra centrale dal simbolo  $\div$  (diviso) e tra loro dal simbolo  $=$ . In queste caselle è rappresentata quindi la divisione tra i numeri presenti nella barra centrale e il numero nella casella blu con il risultato di questa nella casella rossa. Negli esercizi proposti si parlerà di «configurazioni» particolari del Tubò, ottenibili in seguito a delle azioni che farà il bambino, per riferirci a quello che si vede nelle diverse finestre. In figura 1 è mostrato un esempio di possibile configurazione che

si legge:  $6 \times 2 = 12$  e  $12 \div 2 = 6$ . La configurazione di partenza in genere, ma non sempre, sarà:  $0 \times T = 0$  e  $0 \div T = 0$  (si veda la figura 2).



Fig. 2 Configurazione di partenza.

Se nelle caselle blu compare la lettera T, come mostrato in figura 3, allora nella barra centrale compariranno i risultati della moltiplicazione tra il numero presente nelle caselle rosse e tutti i naturali dall'1 a 10 ed è quindi visualizzata la tabellina di quel numero.



Fig. 3 Tabellina del 9.

### Schemi di utilizzo

Di seguito saranno descritti alcuni schemi di utilizzo del Tubò che si basano sulle caratteristiche fisiche dell'artefatto e che mettono in luce le proprietà matematiche in esso incorporate. Per capire in cosa consistono questi schemi, utilizzeremo un esempio.

Esempio: ruoto solo la manopola rossa e tengo fissa la blu.

Come abbiamo già osservato, ruotando la manopola rossa, a ogni «scatto» cambia il contenuto delle caselle rosse (numeri dall'1 a 10 e spazio vuoto).

- Se nella casella blu c'è T allora ruotando solo la manopola rossa possiamo generare o la configurazione di partenza (figura 2) o le configurazioni in cui nella barra centrale compaiono tutti i numeri che sono risultato della moltiplicazione del numero presente nella casella rossa per i numeri naturali dall'1 a 10 (un esempio è la tabellina del nove, riportata nella figura 3). T può quindi assumere i valori tra 1 e 10. I risultati della moltiplicazione tra il numero nella casella rossa e T compaiono nella barra centrale sotto i valori assunti da T (numeri scritti sopra la barra centrale).
- Se nella casella blu c'è un numero, allora ruotando solo la manopola rossa si otterranno nella barra centrale progressivamente i risultati della moltiplicazione tra i numeri che variano nella casella rossa e il numero fisso nella casella blu.

Possiamo quindi riconoscere il processo di generazione della tabellina del numero nella casella blu. I numeri generati nella barra centrale sono ovviamente anche divisibili per il numero presente nella casella blu e il risultato della divisione è il numero nella casella rossa (si vedano le figure 4-5).



Fig. 4 Esempio di configurazione che si può ottenere sul Tubò.



Fig. 5 Esempio di configurazione che si può ottenere sul Tubò.

Si può procedere in modo analogo sviluppando lo schema «ruoto solo la manopola blu e tengo fissa la rossa». Se sono coinvolti gli stessi numeri, allora i risultati finali delle procedure saranno naturalmente uguali, ma è il processo di generazione delle configurazioni che cambia! In quest'ultimo caso, infatti, è il secondo fattore della moltiplicazione (o della divisione secondo le caselle del Tubò che prendiamo in esame) che è variabile, mentre quello nella casella rossa è fisso. La variazione dei numeri nella barra centrale dovrà quindi essere interpretata seguendo la variazione dei numeri nella casella blu. Durante lo svolgimento delle attività proposte con il Tubò, i bambini potranno usare gli schemi d'utilizzo descritti sopra e, naturalmente, la combinazione di questi.

#### *Le schede di lavoro*

Le attività proposte nelle schede partono dalla richiesta di utilizzare il Tubò per svolgere moltiplicazioni e divisioni con i numeri naturali generando sequenze di azioni da descrivere, fino alla richiesta di ipotizzare possibili configurazioni e di argomentare le proprie scelte giustificando il risultato ottenuto basandosi sulle proprietà utilizzate. Le schede del libro guidano quindi il bambino in un percorso che inizia con la scoperta e appropriazione degli schemi d'utilizzo del Tubò (schede 1-5), per arrivare alla costruzione di significati matematici attraverso il supporto di questo strumento. I problemi aperti proposti porteranno il bambino a riflettere sui processi di costruzione delle tabelline e sulle relazioni tra i numeri coinvolti. In particolare le consegne in cui è richiesto «Come si può arrivare a ...?» (schede



6-16) favoriranno le produzioni di diverse strategie per il raggiungimento di un risultato specifico che dovrà essere validato attraverso l'utilizzo del Tubò. Nelle consegne «A che configurazione arrivo se...?» (schede 17-23) verrà invece richiesto di individuare il risultato di una procedura, questa volta data, e poi di validarlo. Infine le ultime schede «È possibile?» (schede 24-35) si concentrano sullo sviluppo del pensiero ipotetico e sul controllo delle conoscenze delle relazioni tra i numeri coinvolti nelle tabelline «entro il 10». L'obiettivo è sviluppare i processi di pianificazione e controllo tipici delle attività di problem solving con la possibilità di essere supportati dall'utilizzo del Tubò.

È infatti importante sottolineare che il potenziale didattico di un artefatto non dipende solo da come è stato costruito, dalla matematica in esso incorporata e da come è utilizzabile, ma dipende soprattutto dal tipo di attività affrontate dal bambino con questo strumento. Per diventare uno strumento veramente efficace nei processi di apprendimento della matematica, un artefatto che incorpora leggi matematiche non deve essere solo manipolato per produrre un risultato, ma deve essere usato con la consapevolezza delle proprietà matematiche coinvolte. Il bambino quindi deve affrontare compiti che favoriscano la riflessione e portino alla costruzione di significati matematici. Per questo motivo il libro è costruito focalizzando l'attenzione su consegne che risultino significative per rafforzare le conoscenze sulle tabelline e per favorire lo sviluppo di processi caratterizzanti il pensiero matematico, come la produzione di congetture e argomentazioni. Le consegne proposte aiuteranno il bambino non solo a riflettere sui meccanismi di funzionamento dell'artefatto per arrivare a capirne la logica sottostante e, eventualmente, appropriarsene, ma soprattutto hanno l'obiettivo di abituare il bambino a descrivere e argomentare le proprie strategie analizzando i prodotti di queste. Nel caso specifico delle attività proposte con il Tubò, il diventare abile nel risolvere questo tipo di consegne implica necessariamente prendere dimestichezza e acquisire flessibilità nell'uso delle tabelline che non sono utilizzate in maniera semplicemente «meccanica» perché richiedono un lavoro di riflessione, pianificazione e giustificazione.

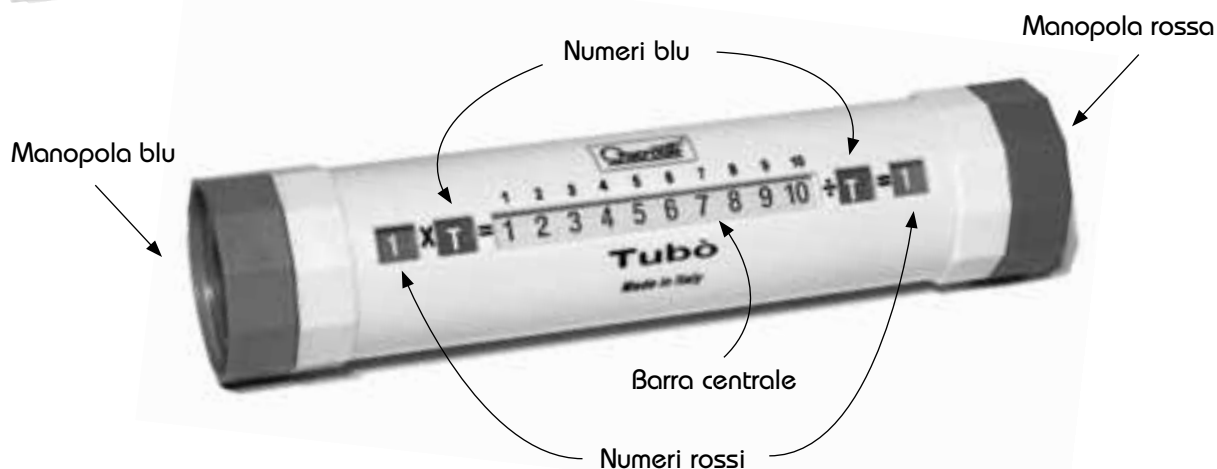
# PARTE 2

## Il Tubò pitagorico

N. scheda	Attività	Fattori coinvolti
<i>Scheda di presentazione: Come è fatto il Tubò</i>		
<b>1</b>	Cosa vedo se	2 e 3
<b>2</b>	Cosa vedo se	0
<b>3</b>	Cosa vedo se	1, 2 e 3
<b>4</b>	Cosa vedo se	4, 5 e 6
<b>5</b>	Cosa vedo se	1, 2 e 3
<b>6</b>	Come si può arrivare a...?	5 e 7
<b>7</b>	Come si può arrivare a...?	3 e 6
<b>8</b>	Come si può arrivare a...?	2 e 4
<b>9</b>	Come si può arrivare a...?	4 e 7
<b>10</b>	Come si può arrivare a...?	5 e 10
<b>11</b>	Come si può arrivare a...?	1 e 2
<b>12</b>	Come si può arrivare a...?	4, 6 e 9
<b>13</b>	Come si può arrivare a...?	2, 4 e 8
<b>14</b>	Come si può arrivare a...?	Vari
<b>15</b>	Come si può arrivare a...?	2, 3, 4 e 6
<b>16</b>	Come si può arrivare a...?	Vari
<b>17</b>	A quale configurazione arrivo se...?	5 e 2

N. scheda	Attività	Fattori coinvolti
<b>18</b>	A quale configurazione arrivo se...?	3, 4, 6 e 7
<b>19</b>	A quale configurazione arrivo se...?	5 e 10
<b>20</b>	A quale configurazione arrivo se...?	9 e 6
<b>21</b>	A quale configurazione arrivo se...?	2
<b>22</b>	A quale configurazione arrivo se...?	5 e 2
<b>23</b>	A quale configurazione arrivo se...?	1 e 6
<b>24</b>	È possibile?	10 e 0
<b>25</b>	È possibile?	1
<b>26</b>	È possibile?	1
<b>27</b>	È possibile?	10
<b>28</b>	È possibile?	10, 1 e 0
<b>29</b>	È possibile?	0 e 5
<b>30</b>	È possibile?	2
<b>31</b>	È possibile?	5 e 0
<b>32</b>	È possibile?	2 e 3
<b>33</b>	È possibile?	5 e 10
<b>34</b>	È possibile?	5 e 0
<b>35</b>	È possibile?	16

## COME È FATTO IL TUBÒ

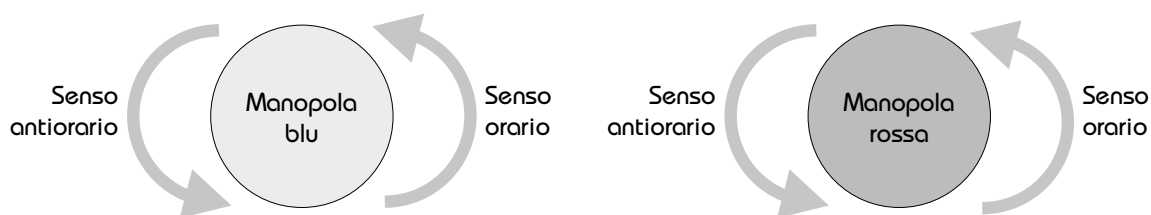


→ Come puoi vedere dall'immagine, il Tubò è un tubo alle cui estremità si trovano due manopole (una rossa e una blu) che possono girare. Facendo girare le manopole compaiono dei numeri nelle caselle del Tubò.

Il Tubò ha cinque caselle: due numeri rossi, due numeri blu e una lunga barra centrale. Fra le caselle ci sono alcuni simboli di operazione. Il Tubò mostra moltiplicazioni e divisioni con i rispettivi risultati.

Ogni volta che farai ruotare una delle due manopole, sentirai un leggero scatto: vuol dire che una coppia di numeri nelle caselle è cambiata. In particolare, la manopola rossa fa aumentare o diminuire il numero nelle caselle rosse; la manopola blu invece fa aumentare o diminuire il numero nelle caselle blu. Facendo scattare una qualsiasi delle manopole cambierà quindi anche il numero nella barra centrale.

Ciascuna manopola può girare in due diversi sensi: orario e antiorario. A seconda del senso in cui si fa girare la manopola, il numero nelle corrispondenti caselle aumenta di 1 o diminuisce di 1.



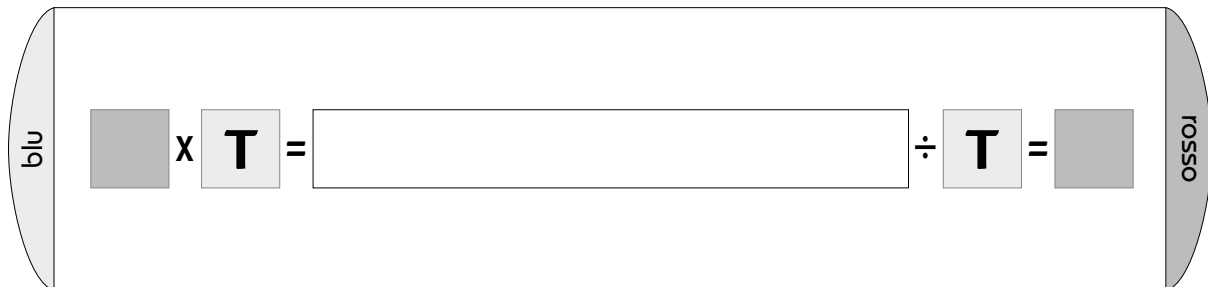
→ Facendo girare la manopola rossa si può far comparire una casella vuota: rappresenta il numero 0 (zero).

Facendo ruotare la manopola blu si può far comparire la lettera T: quando succede, nella barra centrale compaiono tutti i primi dieci multipli del numero nelle caselle rosse.

Nelle prossime pagine troverai delle schede che ti guideranno nell'esplorazione delle moltiplicazioni e delle divisioni con il Tubò. Dovrai completarle inserendo i numeri che vedi nelle caselle del Tubò, rispondendo a delle domande o, ancora, completando delle frasi.

**Scheda 1**  
COSA VEDO SE

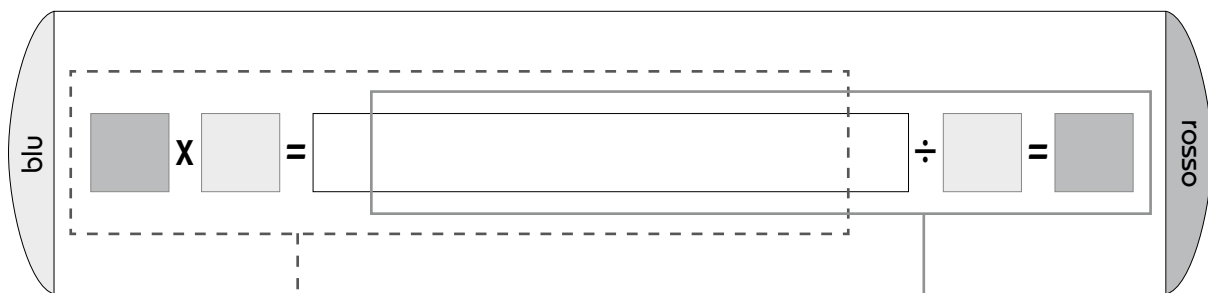
→ Prendi il Tubò e, se necessario, fai girare le manopole fino a ottenere:



→ Ruota la manopola rossa in senso *orario* 2 volte.

→ Ruota la manopola blu in senso *orario* 3 volte.

→ Copia nel disegno i numeri che sono comparsi nelle caselle del Tubò.



Copia qui i numeri:

\_\_\_\_\_ x \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

Copia qui i numeri:

\_\_\_\_\_ ÷ \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

→ I calcoli che hai copiato sono corretti?

Sì     No

→ Conoscevi già i risultati di questi due calcoli?

Sì     No