Cesare Cornoldi

AC-MT 11-14 anni

PROVE PER LA CLASSE

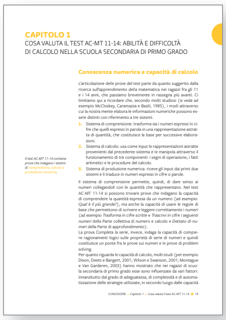
Guida

Valutazione standardizzata
delle abilità di calcolo
e di soluzione di problemi

Erickson

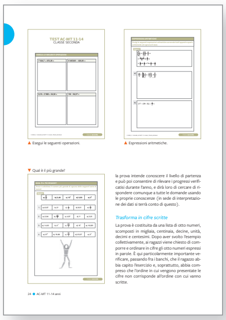
In *questa guida* trovi tutti i contenuti teorico-metodologici in 4 passi:

● CONOSCERE



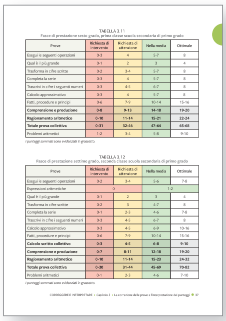
▶ Una introduzione ai concetti chiave dell'apprendimento matematico

● PIANIFICARE E SOMMINISTRARE



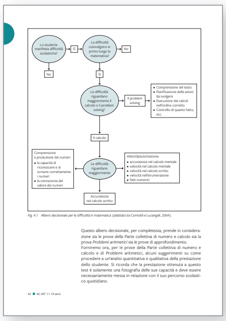
▶ Tutte le informazioni per la corretta somministrazione delle prove

● CORREGGERE E INTERPRETARE



▶ Le tabelle di riferimento con cui confrontare i punteggi degli alunni e verificare i punti di forza e i punti di debolezza

● INTERVENIRE



▶ Suggerimenti utili per intervenire in caso di fragilità

▶ Inoltre approfondimenti e casi-esempio

CON VIDEO TUTORIAL

Il test AC-MT misura le abilità di calcolo e soluzione di problemi in alunni dagli 11 ai 14 anni. Con prove distinte per tutte e tre le classi della scuola secondaria di primo grado, è lo strumento più efficace per prevenire e identificare le difficoltà di apprendimento. In questa nuova edizione **le prove classiche** a somministrazione collettiva sono di ancor più facile utilizzo e le fasce di prestazione aggiornate in base a nuovi dati.

Caratteristiche del test nella nuova edizione:

- **ancora più affidabile** con numerosi approfondimenti che tengono conto delle ricerche effettuate grazie al test
- **più agile,** con guida in 4 passi, concetti chiave e approfondimenti
- **più facile da correggere** con le fasce di prestazione a colori

ISBN 978-88-590-2328-9
9 788859 023289

Guida e protocollo indivisibili

Aree valutate

✓ Matematica | Prerequisiti | Letto-scrittura | Abilità cognitive | Abilità di studio | Aspetti emotivo-motivazionali | Oralità

INDICE

RISORSE ONLINE

I materiali online sono accessibili su http://risorseonline.erickson.it/
Per visualizzarli e scaricarli basta registrarsi e inserire il codice di attivazione

TEST A COLPO D'OCCHIO
AC-MT IN 4 PASSI

CONOSCERE

Perché usare l'AC-MT 11-14?

Quali aree valuta l'AC-MT 11-14?

Qual è la differenza tra il test AC-MT 11-14 e una prova di verifica?

PIANIFICARE E SOMMINISTRARE

Con chi usare l'AC-MT 11-14?

Quando usare l'AC-MT 11-14?

Quali sono le prove?

Cosa serve per la somministrazione delle prove?

Come si somministrano le prove?

CORREGGERE E INTERPRETARE

Come si correggono le prove?

Come si interpretano i punteggi?

INTERVENIRE

Come intervenire?

PERCHÉ USARE L'AC-MT 11-14?

- Per ottenere un **profilo dello sviluppo** dei singoli studenti e dell'intera classe in ambito matematico.
- Per effettuare la valutazione delle abilità degli studenti con uno **strumento rigoroso e validato** statisticamente.
- Per **programmare interventi** di aiuto nelle aree in cui si riscontrano difficoltà.

QUALI AREE VALUTA L'AC-MT 11-14?

- La batteria valuta le **abilità numeriche, di calcolo e di soluzione di problemi aritmetici** della scuola secondaria di primo grado.
- Tali aree rappresentano le **principali componenti dell'abilità matematica**.

QUAL È LA DIFFERENZA TRA IL TEST AC-MT 11-14 E UNA PROVA DI VERIFICA?

- Una prova di verifica non è soggetta a un **percorso di standardizzazione** che prevede l'ancoraggio alla ricerca scientifica, la costruzione e l'analisi di una prova pilota, la definizione di una prova definitiva, la sua somministrazione a un campione rappresentativo della popolazione interessata, l'analisi delle sue proprietà docimologiche, la definizione di norme di riferimento. Grazie al confronto con le fasce di prestazione è possibile capire se lo studente ottiene un punteggio nella media, peggiore o migliore della popolazione italiana della stessa classe. In base ai dati psicometrici è possibile fare una stima del grado di accuratezza dei punteggi ottenuti.

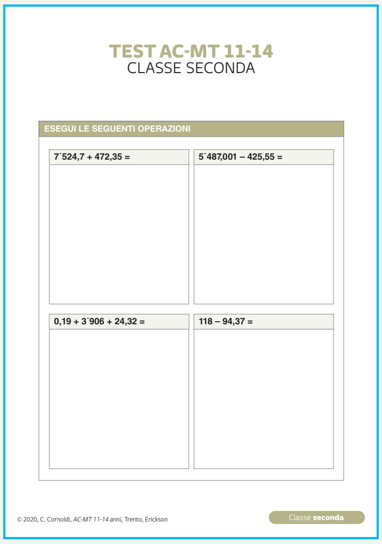
CON CHI USARE L'AC-MT 11-14?

- Con tutti gli studenti della **scuola secondaria di primo grado**, anche quelli con difficoltà di lettura o scarsa conoscenza della lingua italiana, assicurandosi della loro comprensione del compito, o a quelli con difficoltà matematiche o Discalculia Evolutiva, per individuare i punti di forza e di debolezza.

QUANDO USARE L’AC-MT 11-14?

- Per ogni classe è presente un protocollo unico per la rilevazione del profilo degli studenti. Le prove possono essere proposte **lungo l’intero anno scolastico** interessato tenendo però conto del fatto che i dati utilizzati per definire le fasce di prestazione sono stati raccolti nei primi mesi dell’anno scolastico e quindi gli studenti valutati nel secondo quadrimestre potrebbero essere lievemente avvantaggiati.

QUALI SONO LE PROVE?



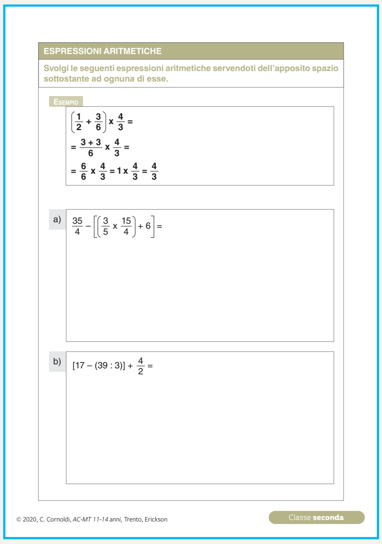
TEST AC-MT 11-14
CLASSE SECONDA

ESEGUI LE SEGUENTI OPERAZIONI

7˙524,7 + 472,35 =	5˙487,001 – 425,55 =
0,19 + 3˙906 + 24,32 =	118 – 94,37 =

Classe **seconda**

- Esegui le seguenti operazioni



ESPRESSIONI ARITMETICHE

Svolgi le seguenti espressioni aritmetiche servendoti dell’apposito spazio sottostante ad ognuna di esse.

Esempio

$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\right) x \frac{4}{3} =$

$= \frac{3+3}{6} x \frac{4}{3} =$

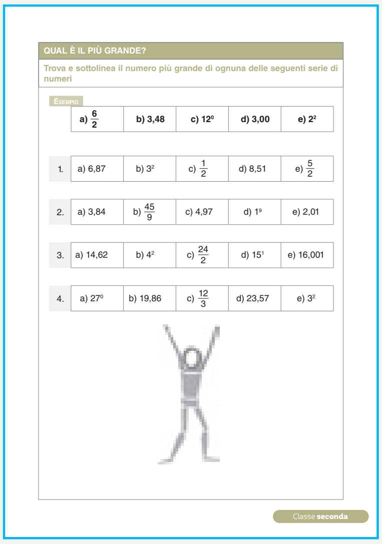
$= \frac{6}{6} x \frac{4}{3} = 1 x \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

a) $\frac{35}{4} - \left[\left(\frac{3}{5} x \frac{15}{4}\right) + 6\right] =$

b) $[17 - (39 : 3)] + \frac{4}{2} =$

Classe **seconda**

- Espressioni artimetiche*



QUAL È IL PIÙ GRANDE?

Trova e sottolinea il numero più grande di ognuna delle seguenti serie di numeri

Esempio	a) $\frac{6}{2}$	b) 3,48	c) 12^0	d) 3,00	e) 2^2
1.	a) 6,87	b) 3^2	c) $\frac{1}{2}$	d) 8,51	e) $\frac{5}{2}$
2.	a) 3,84	b) $\frac{45}{9}$	c) 4,97	d) 1^9	e) 2,01
3.	a) 14,62	b) 4^2	c) $\frac{24}{2}$	d) 15^1	e) 16,001
4.	a) 27^0	b) 19,86	c) $\frac{12}{3}$	d) 23,57	e) 3^2

Classe **seconda**

- Qual è il più grande

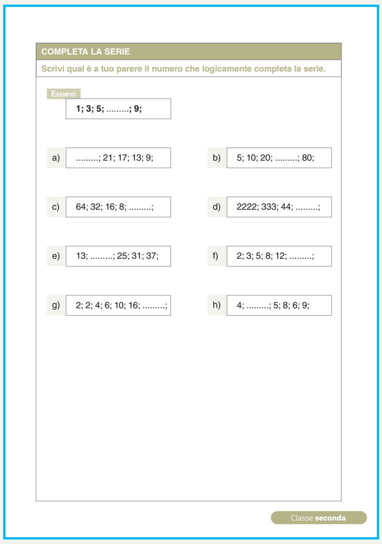
TRASFORMA IN CIFRE SCRITTE

Esempio
7 unità 8 decine 5 centinaia 3 centesimi 2 decimi ....

A) 3 decine 5 centesimi 0 unità 8 decimi 3 centinaia ....
B) 4 centesimi 7 decine 1 centinaio 9 decimi 0 unità ....
C) 3 centinaia 1 migliaio 8 unità 4 decine ....
D) 0 decine 7 unità 0 centinaia 9 migliaia ....
E) 9 centesimi 0 decine 7 centinaia 4 decimi 5 unità ....
F) 4 decine 1 unità 7 centinaia 3 migliaia ....
G) 5 unità 3 centesimi 7 decine 0 decimi 9 centinaia ....
H) 8 decimi 3 centesimi 6 decine 2 centinaia 2 unità ....

Classe **seconda**

- Trasforma in cifre scritte



COMPLETA LA SERIE

Scrivi qual è a tuo parere il numero che logicamente completa la serie.

Esempio
1; 3; 5; ....; 9;

a) ....; 21; 17; 13; 9;
b) 5; 10; 20; ....; 80;
c) 64; 32; 16; 8; ....;
d) 2222; 333; 44; ....;
e) 13; ....; 25; 31; 37;
f) 2; 3; 5; 8; 12; ....;
g) 2; 2; 4; 6; 10; 16; ....;
h) 4; ....; 5; 8; 6; 9;

Classe **seconda**

- Completa la serie

TRASCRIVI IN CIFRE I SEGUENTI NUMERI

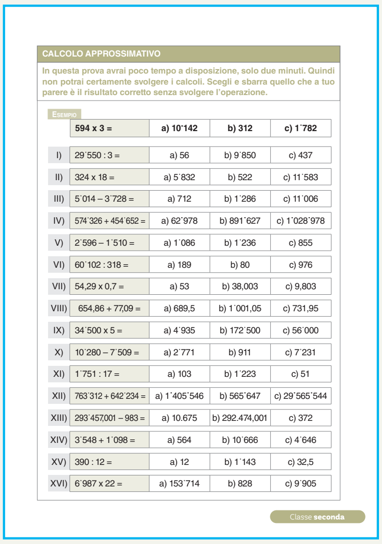
Esempio
dodicimilioniseicentoquarantatre ....

1. trentatremilioniseicentoquattordici ....
2. ottocentosessantatremilaundici ....
3. trecentoventitre ....
4. novecentoquattromilasettantuno ....
5. tredicimilioniquattrocentoottantamilatrentasei ....
6. trentaseimilaquattrocentoventitre ....
7. cinquantaquattromilasettecentonove ....
8. ventimilaquindici ....

Classe **seconda**

- Trascrivi in cifre i seguenti numeri

* *Questa prova è presente solamente per le classi seconda e terza.*



CALCOLO APPROSSIMATIVO

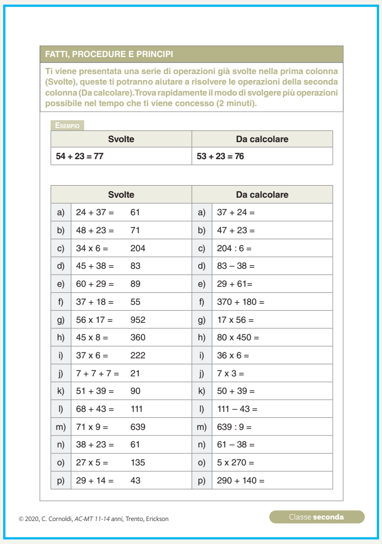
In questa prova avrai poco tempo a disposizione, solo due minuti. Quindi non potrai certamente svolgere i calcoli. Scegli e sbarra quello che a tuo parere è il risultato corretto senza svolgere l'operazione.

Esempio

	594 x 3 =	a) 10˙142	b) 312	c) 1˙782
I)	29˙550 : 3 =	a) 56	b) 9˙850	c) 437
II)	324 x 18 =	a) 5˙832	b) 522	c) 11˙583
III)	5˙014 – 3˙728 =	a) 712	b) 1˙286	c) 11˙006
IV)	574˙326 + 454˙652 =	a) 62˙978	b) 891˙627	c) 1˙028˙978
V)	2˙596 – 1˙510 =	a) 1˙086	b) 1˙236	c) 855
VI)	60˙102 : 318 =	a) 189	b) 80	c) 976
VII)	54,29 x 0,7 =	a) 53	b) 38,003	c) 9,803
VIII)	654,86 + 77,09 =	a) 689,5	b) 1˙001,05	c) 731,95
IX)	34˙500 x 5 =	a) 4˙935	b) 172˙500	c) 56˙000
X)	10˙280 – 7˙509 =	a) 2˙771	b) 911	c) 7˙231
XI)	1˙751 : 17 =	a) 103	b) 1˙223	c) 51
XII)	763˙312 + 642˙234 =	a) 1˙405˙546	b) 565˙647	c) 29˙565˙544
XIII)	293˙457,001 – 983 =	a) 10.675	b) 292.474,001	c) 372
XIV)	3˙548 + 1˙098 =	a) 564	b) 10˙666	c) 4˙646
XV)	390 : 12 =	a) 12	b) 1˙143	c) 32,5
XVI)	6˙987 x 22 =	a) 153˙714	b) 828	c) 9˙905

Classe seconda

- Calcolo approssimativo



FATTI, PROCEDURE E PRINCIPI

Ti viene presentata una serie di operazioni già svolte nella prima colonna (Svolte), queste ti potranno aiutare a risolvere le operazioni della seconda colonna (Da calcolare). Trova rapidamente il modo di svolgere più operazioni possibile nel tempo che ti viene concesso (2 minuti).

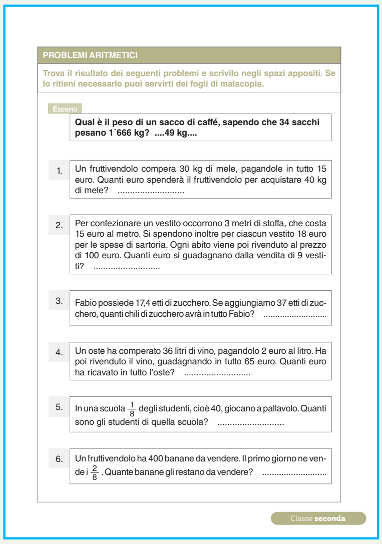
Esempio

Svolte	Da calcolare
54 + 23 = 77	53 + 23 = 76

	Svolte			Da calcolare
a)	24 + 37 =	61	a)	37 + 24 =
b)	48 + 23 =	71	b)	47 + 23 =
c)	34 x 6 =	204	c)	204 : 6 =
d)	45 + 38 =	83	d)	83 – 38 =
e)	60 + 29 =	89	e)	29 + 61=
f)	37 + 18 =	55	f)	370 + 180 =
g)	56 x 17 =	952	g)	17 x 56 =
h)	45 x 8 =	360	h)	80 x 450 =
i)	37 x 6 =	222	i)	36 x 6 =
j)	7 + 7 + 7 =	21	j)	7 x 3 =
k)	51 + 39 =	90	k)	50 + 39 =
l)	68 + 43 =	111	l)	111 – 43 =
m)	71 x 9 =	639	m)	639 : 9 =
n)	38 + 23 =	61	n)	61 – 38 =
o)	27 x 5 =	135	o)	5 x 270 =
p)	29 + 14 =	43	p)	290 + 140 =

Classe seconda

- Fatti, procedure e principi



PROBLEMI ARITMETICI

Trova il risultato dei seguenti problemi e scrivilo negli spazi appositi. Se lo ritieni necessario puoi servirti dei fogli di malacopia.

Esempio

Qual è il peso di un sacco di caffé, sapendo che 34 sacchi pesano 1˙666 kg? ....49 kg....

1. Un fruttivendolo compera 30 kg di mele, pagandole in tutto 15 euro. Quanti euro spenderà il fruttivendolo per acquistare 40 kg di mele? ....
2. Per confezionare un vestito occorrono 3 metri di stoffa, che costa 15 euro al metro. Si spendono inoltre per ciascun vestito 18 euro per le spese di sartoria. Ogni abito viene poi rivenduto al prezzo di 100 euro. Quanti euro si guadagnano dalla vendita di 9 vestiti? ....
3. Fabio possiede 17,4 etti di zucchero. Se aggiungiamo 37 etti di zucchero, quanti chili di zucchero avrà in tutto Fabio? ....
4. Un oste ha comperato 36 litri di vino, pagandolo 2 euro al litro. Ha poi rivenduto il vino, guadagnando in tutto 65 euro. Quanti euro ha ricavato in tutto l'oste? ....
5. In una scuola $\frac{1}{8}$ degli studenti, cioè 40, giocano a pallavolo. Quanti sono gli studenti di quella scuola? ....
6. Un fruttivendolo ha 400 banane da vendere. Il primo giorno ne vende i $\frac{2}{8}$. Quante banane gli restano da vendere? ....

Classe seconda

- Problemi aritmetici

- Con il punteggio di queste prove è possibile ricavare quattro macrovariabili:

CALCOLO SCRITTO COLLETTIVO*	Esegui le seguenti operazioni + Espressioni aritmetiche
COMPRENSIONE E PRODUZIONE	Qual è il più grande? + Trasforma in cifre scritte + Trascrivi in cifre i seguenti numeri
RAGIONAMENTO ARITMETICO	Calcolo approssimativo + Fatti, procedure e principi
TOTALE PROVA COLLETTIVA	Calcolo scritto collettivo* x 3 + Comprensione e produzione + Ragionamento aritmetico

* *Questa variabile si può calcolare solamente per le classi seconda e terza.*

+ Prove individuali di approfondimento

COSA SERVE PER LA SOMMINISTRAZIONE DELLE PROVE?

- Un protocollo (set di prove) per ogni alunno e uno per l'insegnante.
- Un foglio bianco per lo svolgimento della prova di soluzione dei problemi aritmetici.

COME SI SOMMINISTRANO LE PROVE?

- Se le prove vengono proposte contemporaneamente a tutti gli studenti della classe, separare i banchi.
- Illustrare nella maniera più semplice possibile le parti che compongono il test, dicendo che esso indaga le abilità di calcolo in studenti della loro età, e precisando che non porterà a un voto nel registro ma che, se svolto con impegno, potrà dare a loro e agli insegnanti delle indicazioni sulle proprie eventuali difficoltà specifiche e quindi stimolare un miglioramento.
- Distribuire il fascicolo.
- Spiegare un esercizio alla volta, invitando gli alunni a soffermarsi sulle consegne di ciascuno e sugli esempi, che vengono svolti in classe assieme all'insegnante. Il test non implica consegne di velocità e quindi bisogna lasciare che i ragazzi procedano secondo il loro ritmo. Per passare da ogni esercizio a quello successivo l'esaminatore dovrà attendere, ogni volta, che almeno il 90% degli alunni lo abbia terminato (sollecitando i ritardatari).

La Prova collettiva di numero e calcolo durerà indicativamente 60 minuti. La Prova sui problemi aritmetici, invece, durerà indicativamente 30 minuti.

COME SI CORREGGONO LE PROVE?

- Si assegna il punteggio per ogni prova, con l'aiuto delle Schede di codifica.

Esempio di scheda di codifica per l'esercizio *Esegui le seguenti operazioni*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
a) 5.588,5 b) 1.085,24 c) 1.683 d) 4.498 e) 29.393 f) 39 g) 19.110 h) 53	a) 7.997,05 b) 5.061,451 c) 3.930,51 d) 23,63 e) 41.866 f) 193 g) 85.986 h) 54,3	a) 72.951,22 b) 4.614,341 c) 4.422,67 d) 189.446,73 e) 146.372 f) 63,44 g) 59.378,4 h) 94,7

- Per ogni esercizio il criterio di attribuzione del punteggio è quello di conteggiare le risposte corrette. Durante la siglatura si assegnerà il punteggio 1 a ogni risposta corretta e il punteggio 0 alle risposte errate. Per ogni prova si dovrà calcolare il totale di risposte esatte fornite.

- Si completa la Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti.

		COME SI CALCOLA	PUNT.
PARTE COLLETTIVA	Esegui le seguenti operazioni	–	
	Espressioni aritmetiche	–	
	Qual è il più grande	–	
	Trasforma in cifre scritte	–	
	Completa la serie	–	
	Trascrivi in cifre i seguenti numeri	–	
	Calcolo approssimativo	–	
	Fatti, procedure e principi	–	
TOTALI	*Calcolo scritto collettivo**	Esegui le seguenti operazioni + Espressioni aritmetiche	
	Comprensione e produzione	Qual è il più grande + Trasforma in cifre scritte + Trascrivi in cifre i seguenti numeri	
	Ragionamento aritmetico	Calcolo approssimativo + Fatti, procedure e principi	
	Totale prova collettiva	Calcolo scritto collettivo (x 3) + Comprensione e produzione + Ragionamento aritmetico	
	Problemi aritmetici	–	

* *Si ricorda che per la classe prima il totale relativo a calcolo scritto collettivo è dato solamente dalla prova* Esegui le seguenti operazioni.

COME SI INTERPRETANO I PUNTEGGI?

- Si confrontano i punteggi dei singoli alunni con le tabelle di riferimento che indicano le fasce di prestazione (nell'esempio sotto quella relativa alla classe seconda).

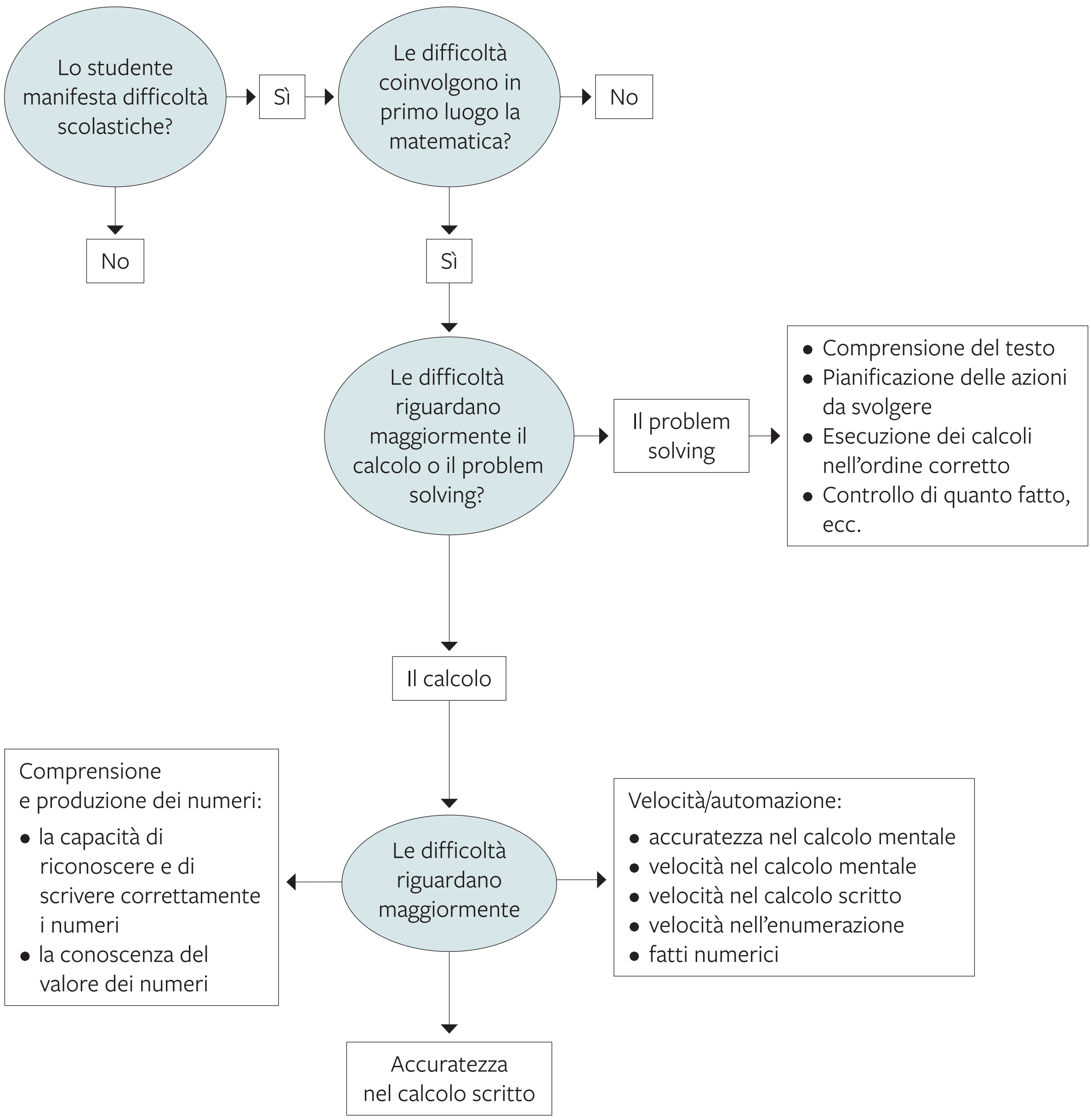
Prove	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale
Esegui le seguenti operazioni	0-2	3-4 ✔	5-6	7-8
Espressioni aritmetiche	0 ✔		1-2	
Qual è il più grande	0-1	2 ✔	3	4
Trasforma in cifre scritte	0-2 ✔	3	4-7	8
Completa la serie	0-1	2-3 ✔	4-6	7-8
Trascrivi in cifre i seguenti numeri	0-3	4-5 ✔	6-7	8
Calcolo approssimativo	0-3 ✔	4-5	6-9	10-16
Fatti, procedure e principi	0-6 ✔	7-9	10-14	15-16
Calcolo scritto collettivo	**0-3**	**4-5 ✔**	**6-8**	**9-10**
Comprensione e produzione	**0-7**	**8-11 ✔**	**12-18**	**19-20**
Ragionamento aritmetico	**0-10 ✔**	**11-14**	**15-23**	**24-32**
Totale prova collettiva	**0-30 ✔**	**31-44**	**45-69**	**70-82**
Problemi aritmetici	0-1	2-3 ✔	4-6	7-10

FASCIA ROSSA **FASCIA GIALLA** **FASCIA VERDE** **FASCIA BIANCA**

- Si ottiene un profilo dell'alunno con i suoi punti di forza (**FASCIA VERDE** e **FASCIA BIANCA**) e debolezza (**FASCIA GIALLA** e **FASCIA ROSSA**).

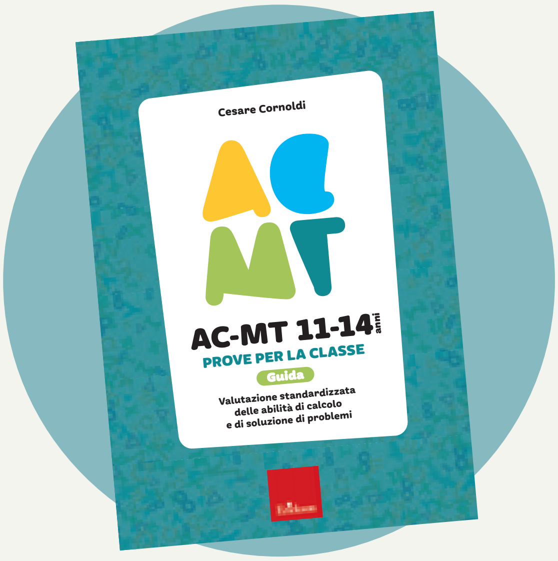
COME INTERVENIRE?

- Per impostare un intervento efficace a partire dal test AC-MT 11-14 risulta molto importante effettuare sia un'analisi quantitativa della prestazione dello studente, sia un'analisi qualitativa. Per questo secondo ragionamento si suggerisce di prendere spunto dal seguente albero decisionale. In questo modo sarà possibile programmare un intervento di recupero che non sia generico, ma mirato ai processi che risultano poco sicuri.



Cosa trovi in questo kit?

In questo kit **trovi tutto quello che ti serve per utilizzare il test AC-MT** nella tua classe



\+

Un'**introduzione ai concetti chiave** dell'apprendimento matematico

Tutte le informazioni per la corretta somministrazione delle prove

Le tabelle di riferimento con cui confrontare i punteggi degli alunni e **verificare** i loro punti di forza e i punti di debolezza

Suggerimenti utili per intervenire in caso di fragilità

Tutte le prove da **fotocopiare** e distribuire agli alunni – **prove collettive** per ogni classe dalla prima alla terza

Schede per l'insegnante per **annotare i punteggi e per stilare il profilo**

Prove individuali per eventuale approfondimento

Fascicolo delle prove **stampabile** dalle Risorse online

NEGLI APPROFONDIMENTI

Un **approfondimento** teorico sulle abilità e difficoltà di calcolo nella scuola secondaria di primo grado

Tutte le **informazioni** su come è stato costruito e standardizzato il test

Le **ricerche** che hanno utilizzato il test

Esempi di somministrazione e buone prassi

IN APPENDICE

I **dati normativi** completi

Le **indicazioni** per la somministrazione e la correzione delle prove individuali

CAPITOLO 1

COSA VALUTA IL TEST AC-MT 11-14: ABILITÀ E DIFFICOLTÀ DI CALCOLO NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Conoscenza numerica e capacità di calcolo

L'articolazione delle prove del test parte da quanto suggerito dalla ricerca sull'apprendimento della matematica nei ragazzi fra gli 11 e i 14 anni, che passiamo brevemente in rassegna più avanti. Ci limitiamo qui a ricordare che, secondo molti studiosi (si veda ad esempio McCloskey, Caramazza e Basili, 1985), i modi attraverso cui la nostra mente elabora le informazioni numeriche possono essere distinti con riferimento a tre sistemi.

1. Sistema di comprensione: trasforma sia i numeri espressi in cifre che quelli espressi in parola in una rappresentazione astratta di quantità, che costituisce la base per successive elaborazioni.
2. Sistema di calcolo: usa come input le rappresentazioni astratte provenienti dal precedente sistema e le manipola attraverso il funzionamento di tre componenti: i segni di operazione, i fatti aritmetici e le procedure del calcolo.
3. Sistema di produzione numerica: riceve gli input dai primi due sistemi e li traduce in numeri espressi in cifre o parole.

Il test AC-MT 11-14 contiene prove che indagano i sistemi di comprensione, calcolo e produzione numerica.

Il sistema di comprensione permette, quindi, di dare senso ai numeri collegandoli con le quantità che rappresentano. Nel test AC-MT 11-14 si possono trovare prove che indagano la capacità di comprendere la quantità espressa da un numero (ad esempio: *Qual è il più grande?*), ma anche la capacità di usare le regole di base che permettono di scrivere e leggere correttamente i numeri (ad esempio *Trasforma in cifre scritte* e *Trascrivi in cifre i seguenti numeri* della Parte collettiva di numero e calcolo e *Dettato di numeri* della Parte di approfondimento).
La prova *Completa la serie*, invece, indaga la capacità di compiere ragionamenti logici sulle proprietà di serie di numeri e quindi costituisce un ponte fra le prove sui numeri e le prove di problem solving.
Per quanto riguarda le capacità di calcolo, molti studi (per esempio Dixon, Deets e Bangert, 2001; Wilson e Swanson, 2001; Montague e Van Garderen, 2003) hanno mostrato che nei ragazzi di scuola secondaria di primo grado esse sono influenzate da vari fattori: innanzitutto dal grado di adeguatezza, di complessità e di automatizzazione delle strategie utilizzate, in secondo luogo dalle capacità

di stimare i possibili risultati e di programmare i diversi passaggi da svolgere. Per questa ragione si è deciso di inserire nel test non solo esercizi di calcolo orale e scritto ma anche esercizi che andassero a indagare, nello specifico, le abilità nell'applicare strategie e principi di calcolo, e le capacità di svolgere calcoli approssimativi. Il sistema del calcolo e le conoscenze procedurali vengono quindi indagate dalle prove *Esegui le seguenti operazioni*, *Espressioni aritmetiche*, *Calcolo approssimativo* (Parte collettiva di numero e calcolo) e *Calcolo a mente* e *Calcolo scritto* (Parte di approfondimento).
Gli automatismi del calcolo vengono indagati con la prova *Fatti, procedure e principi* della Parte collettiva di numero e con la prova *Recupero di fatti numerici* della Parte di approfondimento.

Difficoltà in matematica

Le difficoltà in matematica sono un fenomeno comune. Queste, però, non sono sempre spiegate dalla presenza di un Disturbo Specifico dell'Apprendimento, noto come Discalculia Evolutiva. Qual è la differenza tra una difficoltà in matematica e una Discalculia Evolutiva?
La Discalculia Evolutiva è caratterizzata dalla presenza di una caduta specifica nelle abilità legate all'apprendimento matematico non spiegabile da altri fattori, come il livello cognitivo generale dallo studente, il contesto o la presenza di situazioni di svantaggio. Inoltre, nelle situazioni di Disturbo Specifico dell'Apprendimento, sono possibili dei miglioramenti, ma non una normalizzazione del profilo di apprendimento. Nelle situazioni di difficoltà scolastica, invece, lo studente può recuperare completamente i suoi problemi di apprendimento.
Quali sono le origini delle difficoltà in ambito matematico? Numerosi studiosi sostengono l'importanza e la prevalenza di svariati processi cognitivi come memoria, attenzione, fattori psicomotori e visuo-percettivi; altri studiosi considerano anche tematiche psicologiche non cognitive come quelle motivazionali, relazionali ed emozionali. A questo proposito, un fattore che crea difficoltà in matematica è l'ansia spesso ad essa associata. Alcune persone che soffrono di quest'ansia riferiscono problemi, non solo a scuola ma anche in attività di tutti i giorni, come usare un libretto di assegni o calcolare il conto al ristorante (Donlan, 1998; Mammarella et al., 2019).

Problem solving

La capacità di risolvere con successo un problema aritmetico richiede sia componenti cognitive che metacognitive.

Tra quelle cognitive ricordiamo l'importanza dell'abilità di lettura e della comprensione del testo scritto. Lo studente, inoltre, deve possedere conoscenze sia di nozioni che di procedure affinché la comprensione del testo del problema possa permettergli l'elaborazione di un adeguato procedimento risolutivo.

Le abilità metacognitive coinvolte nella procedura di soluzione dei problemi possono essere schematizzate nel modo seguente (Cornoldi et al., 1995):

Si veda l'Approfondimento 1 per una presentazione più articolata degli apprendimenti delle abilità di numero, calcolo e problem solving e relativi disturbi.

1. comprensione della situazione problema attraverso l'identificazione e l'integrazione delle informazioni verbali e aritmetiche; rappresentazione del problema e sua categorizzazione;
2. valutazione delle difficoltà;
3. pianificazione delle procedure e delle operazioni;
4. monitoraggio e valutazione.

CAPITOLO 2

LE PROVE DEL TEST AC-MT 11-14
E LA LORO SOMMINISTRAZIONE

Il test di valutazione delle abilità di calcolo e di problem solving (AC-MT 11-14) è composto da alcune prove a somministrazione collettiva che riguardano le conoscenze sul numero, sul calcolo e sul problem solving:

- parte collettiva su numero e calcolo
- problemi aritmetici.

Sono inoltre presenti alcune prove di approfondimento a somministrazione individuale, utili per un approfondimento e descritte in Appendice B.

Descrizione degli esercizi

Parte collettiva di numero e calcolo

Esegui le seguenti operazioni

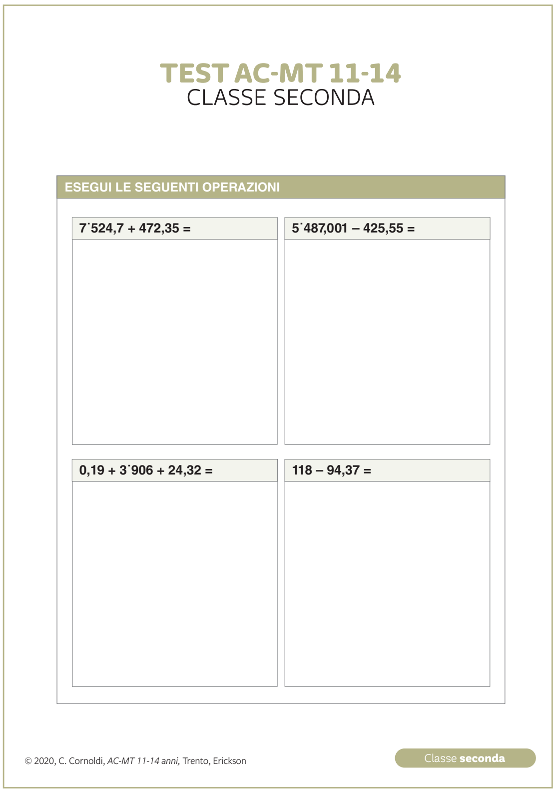
Si spiega ai ragazzi che verranno loro presentate otto operazioni aritmetiche che comprendono anche numeri decimali, così ripartite: due addizioni, due sottrazioni, due moltiplicazioni, due divisioni.
Al ragazzo viene chiesto di calcolare il risultato di ogni operazione procedendo come è solito fare. Per ogni operazione è previsto uno spazio entro cui lo studente può svolgere i calcoli.

Espressioni aritmetiche

Dopo aver letto l'esempio, si chiede ai ragazzi di svolgere le due espressioni aritmetiche presentate nello spazio sottostante. Viene suggerito di ridurre ciascun risultato ai minimi termini.

Qual è il più grande?

Dopo aver svolto l'esempio assieme ai ragazzi, si chiede loro di indicare per ciascuna delle quattro serie di numeri presentate il numero maggiore. Per quanto riguarda la prova di prima, alcuni ragazzi potrebbero lamentarsi di non conoscere bene il significato delle potenze, perché non ancora trattate in classe. L'esaminatore dovrà rassicurare la classe affermando che la cosa era prevista proprio perché


TEST AC-MT 11-14
CLASSE SECONDA

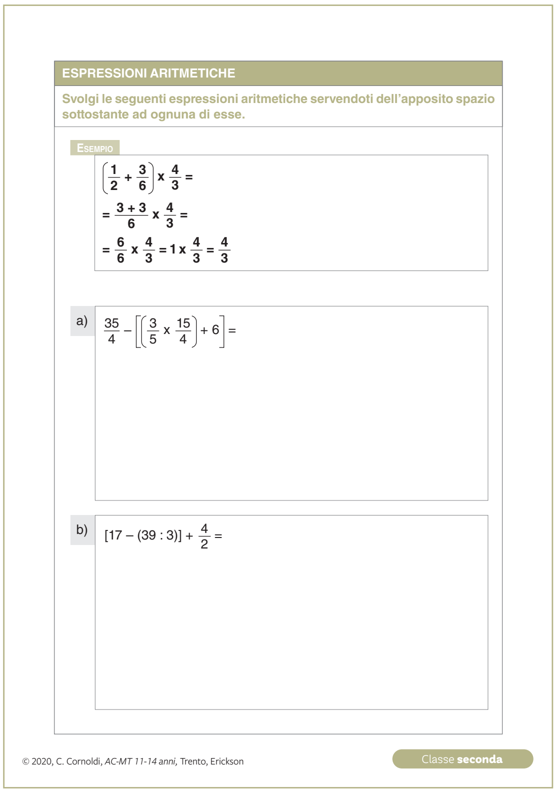
ESEGUI LE SEGUENTI OPERAZIONI

7'524,7 + 472,35 =	5'487,001 – 425,55 =
0,19 + 3'906 + 24,32 =	118 – 94,37 =

© 2020, C. Cornoldi, *AC-MT 11-14 anni*, Trento, Erickson

Classe **seconda**

▲ Esegui le seguenti operazioni.


ESPRESSIONI ARITMETICHE

Svolgi le seguenti espressioni aritmetiche servendoti dell'apposito spazio sottostante ad ognuna di esse.

ESEMPIO

$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right) \times \frac{4}{3} =$

$= \frac{3+3}{6} \times \frac{4}{3} =$

$= \frac{6}{6} \times \frac{4}{3} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

a) $\frac{35}{4} - \left[\left(\frac{3}{5} \times \frac{15}{4}\right) + 6\right] =$

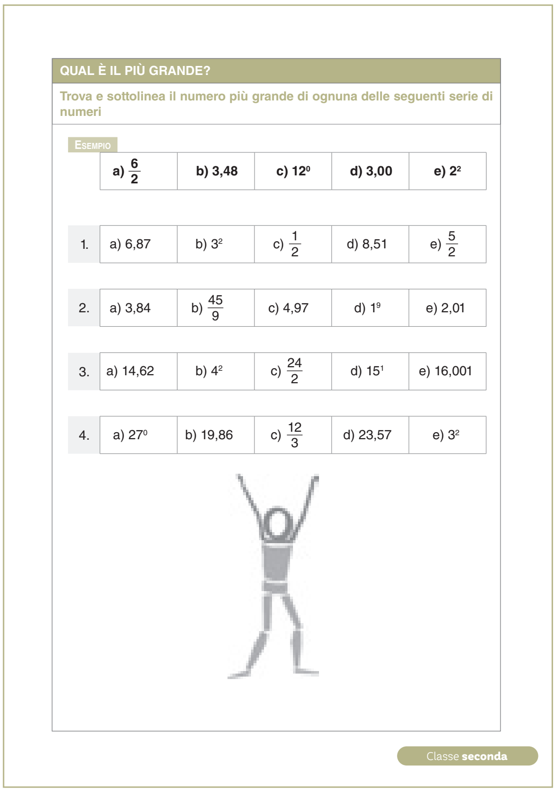
b) $[17 - (39 : 3)] + \frac{4}{2} =$

© 2020, C. Cornoldi, *AC-MT 11-14 anni*, Trento, Erickson

Classe **seconda**

▲ Espressioni aritmetiche.

▼ Qual è il più grande?


QUAL È IL PIÙ GRANDE?

Trova e sottolinea il numero più grande di ognuna delle seguenti serie di numeri

ESEMPIO	**a)** $\frac{6}{2}$	**b) 3,48**	**c)** 12^0	**d) 3,00**	**e)** 2^2
1.	a) 6,87	b) 3^2	c) $\frac{1}{2}$	d) 8,51	e) $\frac{5}{2}$
2.	a) 3,84	b) $\frac{45}{9}$	c) 4,97	d) 1^9	e) 2,01
3.	a) 14,62	b) 4^2	c) $\frac{24}{2}$	d) 15^1	e) 16,001
4.	a) 27^0	b) 19,86	c) $\frac{12}{3}$	d) 23,57	e) 3^2

Classe **seconda**

la prova intende conoscere il livello di partenza e può poi consentire di rilevare i progressi verificatisi durante l'anno, e dirà loro di cercare di rispondere comunque a tutte le domande usando le proprie conoscenze (in sede di interpretazione dei dati si terrà conto di questo).

Trasforma in cifre scritte

La prova è costituita da una lista di otto numeri, scomposti in migliaia, centinaia, decine, unità, decimi e centesimi. Dopo aver svolto l'esempio collettivamente, ai ragazzi viene chiesto di comporre e ordinare in cifre gli otto numeri espressi in parole. È qui particolarmente importante verificare, passando fra i banchi, che il ragazzo abbia capito l'esercizio e, soprattutto, abbia compreso che l'ordine in cui vengono presentate le cifre non corrisponde all'ordine con cui vanno scritte.

TRASFORMA IN CIFRE SCRITTE

ESEMPIO

	7 unità 8 decine 5 centinaia 3 centesimi 2 decimi	....
A)	3 decine 5 centesimi 0 unità 8 decimi 3 centinaia	....
B)	4 centesimi 7 decine 1 centinaio 9 decimi 0 unità	....
C)	3 centinaia 1 migliaio 8 unità 4 decine	....
D)	0 decine 7 unità 0 centinaia 9 migliaia	....
E)	9 centesimi 0 decine 7 centinaia 4 decimi 5 unità	....
F)	4 decine 1 unità 7 centinaia 3 migliaia	....
G)	5 unità 3 centesimi 7 decine 0 decimi 9 centinaia	....
H)	8 decimi 3 centesimi 6 decine 2 centinaia 2 unità	....

Classe **seconda**

▲ Trasforma in cifre scritte i seguenti numeri.

Completa la serie

Ai ragazzi vengono presentate otto serie di numeri; si chiede loro di individuare il numero che logicamente completa ognuna di esse. Si deve precisare che al posto dei puntini va inserito un solo numero, che può essere composto da più cifre.

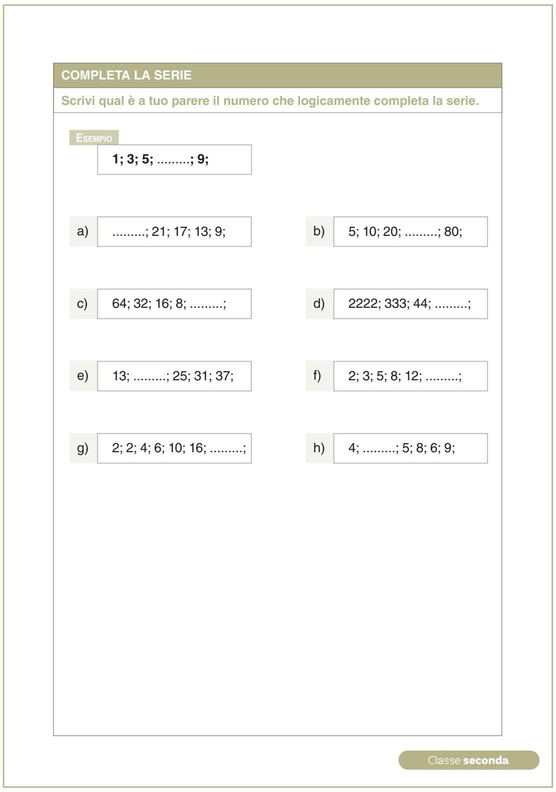
Trascrivi in cifre i seguenti numeri

Vengono presentati otto numeri scritti in parola; lo studente deve scrivere in cifre il corrispondente di ciascun numero dopo aver assistito all'esempio svolto dall'esaminatore.

Calcolo approssimativo

La comprensione delle indicazioni di questo esercizio non è immediata come nei precedenti esercizi, quindi l'esaminatore deve essere particolarmente solerte nel richiamare l'attenzione dei ragazzi durante la spiegazione e l'esecuzione

▼ Completa la serie.



COMPLETA LA SERIE

Scrivi qual è a tuo parere il numero che logicamente completa la serie.

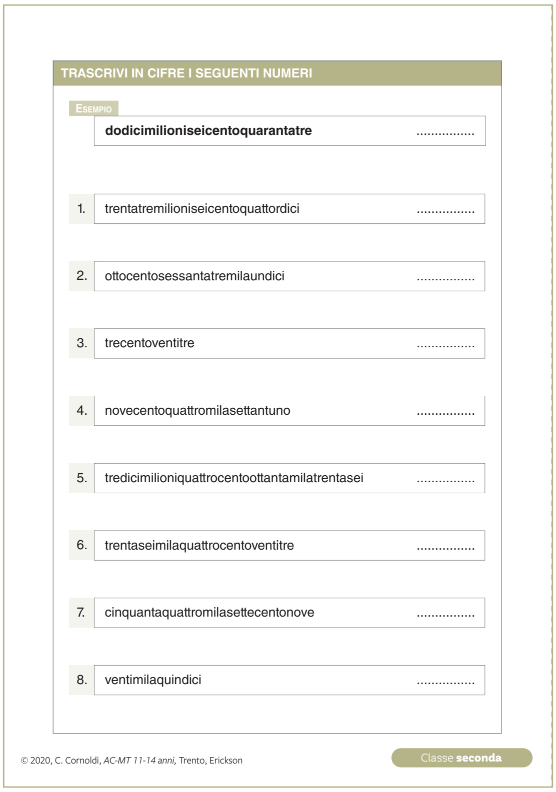
ESEMPIO

1; 3; 5; ....; 9;

a)	.........; 21; 17; 13; 9;	b)	5; 10; 20; ....; 80;
c)	64; 32; 16; 8; ....;	d)	2222; 333; 44; ....;
e)	13; ....; 25; 31; 37;	f)	2; 3; 5; 8; 12; ....;
g)	2; 2; 4; 6; 10; 16; ....;	h)	4; ....; 5; 8; 6; 9;

Classe **seconda**

▼ Trascrivi in cifre i seguenti numeri.



TRASCRIVI IN CIFRE I SEGUENTI NUMERI

ESEMPIO

	dodicimilioniseicentoquarantatre	....
1.	trentatremilioniseicentoquattordici	....
2.	ottocentosessantatremilaundici	....
3.	trecentoventitre	....
4.	novecentoquattromilasettantuno	....
5.	tredicimilioniquattrocentoottantamilatrentasei	....
6.	trentaseimilaquattrocentoventitre	....
7.	cinquantaquattromilasettecentonove	....
8.	ventimilaquindici	....

Classe **seconda**

dell'esempio. Viene presentata una serie di operazioni di difficile risoluzione e ai ragazzi viene chiesto di non svolgerle ma di scegliere tra tre alternative quella che corrisponde al risultato corretto. Il ragazzo ha solo due minuti per svolgere più operazioni possibile e quindi non può effettuare i calcoli, altrimenti riuscirebbe a dare troppe poche risposte. Mentre risolve l'esempio, l'esaminatore deve prestare attenzione a che nessuno cominci l'esercizio prima del suo «via»; dovrebbe inoltre porre enfasi sul fatto che non sta calcolando il risultato ma lo sta intuendo, ragionando per ordine di grandezza.

Fatti, procedure e principi

Ai ragazzi viene presentata una serie di sedici operazioni già svolte in una colonna (Svolte) e viene loro spiegato che queste lo possono aiutare a risolvere le operazioni della seconda colonna (Da calcolare). I ragazzi hanno due minuti per svolgere il maggior numero possibile di item. Nel risolvere l'esempio con i ragazzi, l'esaminatore dovrà enfatizzare il fatto che il risultato dell'operazione nella colonna Da calcolare va dedotto dal risultato dell'operazione corrispondente nella colonna Svolte e non va calcolato compiendo l'operazione indicata, ma ragionando a partire dall'operazione «svolta» corrispondente.

Calcolo approssimativo.

CALCOLO APPROSSIMATIVO

In questa prova avrai poco tempo a disposizione, solo due minuti. Quindi non potrai certamente svolgere i calcoli. Scegli e sbarra quello che a tuo parere è il risultato corretto senza svolgere l'operazione.

Esempio

	594 x 3 =	**a) 10˙142**	**b) 312**	**c) 1˙782**
I)	29˙550 : 3 =	a) 56	b) 9˙850	c) 437
II)	324 x 18 =	a) 5˙832	b) 522	c) 11˙583
III)	5˙014 – 3˙728 =	a) 712	b) 1˙286	c) 11˙006
IV)	574˙326 + 454˙652 =	a) 62˙978	b) 891˙627	c) 1˙028˙978
V)	2˙596 – 1˙510 =	a) 1˙086	b) 1˙236	c) 855
VI)	60˙102 : 318 =	a) 189	b) 80	c) 976
VII)	54,29 x 0,7 =	a) 53	b) 38,003	c) 9,803
VIII)	654,86 + 77,09 =	a) 689,5	b) 1˙001,05	c) 731,95
IX)	34˙500 x 5 =	a) 4˙935	b) 172˙500	c) 56˙000
X)	10˙280 – 7˙509 =	a) 2˙771	b) 911	c) 7˙231
XI)	1˙751 : 17 =	a) 103	b) 1˙223	c) 51
XII)	763˙312 + 642˙234 =	a) 1˙405˙546	b) 565˙647	c) 29˙565˙544
XIII)	293˙457,001 – 983 =	a) 10.675	b) 292.474,001	c) 372
XIV)	3˙548 + 1˙098 =	a) 564	b) 10˙666	c) 4˙646
XV)	390 : 12 =	a) 12	b) 1˙143	c) 32,5
XVI)	6˙987 x 22 =	a) 153˙714	b) 828	c) 9˙905

Classe **seconda**

Fatti, procedure e principi.

FATTI, PROCEDURE E PRINCIPI

Ti viene presentata una serie di operazioni già svolte nella prima colonna (Svolte), queste ti potranno aiutare a risolvere le operazioni della seconda colonna (Da calcolare). Trova rapidamente il modo di svolgere più operazioni possibile nel tempo che ti viene concesso (2 minuti).

Esempio

Svolte	Da calcolare
54 + 23 = 77	**53 + 23 = 76**

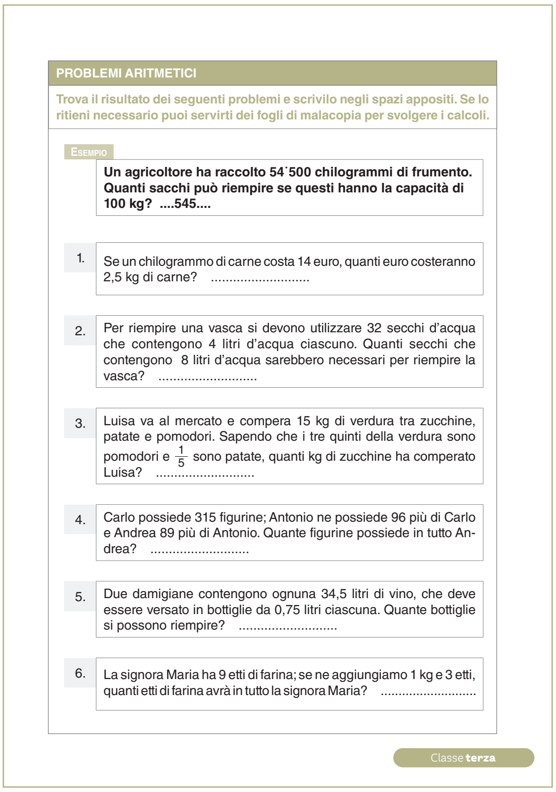
Svolte			Da calcolare	
a)	24 + 37 =	61	a)	37 + 24 =
b)	48 + 23 =	71	b)	47 + 23 =
c)	34 x 6 =	204	c)	204 : 6 =
d)	45 + 38 =	83	d)	83 – 38 =
e)	60 + 29 =	89	e)	29 + 61=
f)	37 + 18 =	55	f)	370 + 180 =
g)	56 x 17 =	952	g)	17 x 56 =
h)	45 x 8 =	360	h)	80 x 450 =
i)	37 x 6 =	222	i)	36 x 6 =
j)	7 + 7 + 7 =	21	j)	7 x 3 =
k)	51 + 39 =	90	k)	50 + 39 =
l)	68 + 43 =	111	l)	111 – 43 =
m)	71 x 9 =	639	m)	639 : 9 =
n)	38 + 23 =	61	n)	61 – 38 =
o)	27 x 5 =	135	o)	5 x 270 =
p)	29 + 14 =	43	p)	290 + 140 =

Classe **seconda**

Problemi aritmetici

L’esercizio può essere somministrato collettivamente alla classe ed è costituito da una lista di dieci problemi aritmetici. Al ragazzo viene chiesto di leggere attentamente ogni problema e di riportare negli appositi spazi il risultato finale. Le operazioni vanno svolte utilizzando i fogli bianchi distribuiti all’inizio della prova a ogni alunno.

▼ Problemi aritmetici.



PROBLEMI ARITMETICI

Trova il risultato dei seguenti problemi e scrivilo negli spazi appositi. Se lo ritieni necessario puoi servirti dei fogli di malacopia per svolgere i calcoli.

ESEMPIO

Un agricoltore ha raccolto 54˙500 chilogrammi di frumento. Quanti sacchi può riempire se questi hanno la capacità di 100 kg? ....545....

1. Se un chilogrammo di carne costa 14 euro, quanti euro costeranno 2,5 kg di carne? ....

2. Per riempire una vasca si devono utilizzare 32 secchi d’acqua che contengono 4 litri d’acqua ciascuno. Quanti secchi che contengono 8 litri d’acqua sarebbero necessari per riempire la vasca? ....

3. Luisa va al mercato e compera 15 kg di verdura tra zucchine, patate e pomodori. Sapendo che i tre quinti della verdura sono pomodori e $\frac{1}{5}$ sono patate, quanti kg di zucchine ha comperato Luisa? ....

4. Carlo possiede 315 figurine; Antonio ne possiede 96 più di Carlo e Andrea 89 più di Antonio. Quante figurine possiede in tutto Andrea? ....

5. Due damigiane contengono ognuna 34,5 litri di vino, che deve essere versato in bottiglie da 0,75 litri ciascuna. Quante bottiglie si possono riempire? ....

6. La signora Maria ha 9 etti di farina; se ne aggiungiamo 1 kg e 3 etti, quanti etti di farina avrà in tutto la signora Maria? ....

Classe **terza**

Materiali per la somministrazione

I protocolli possono essere fotocopiati dal fascicolo allegato oppure stampati dalle Risorse online.

Per ogni classe è presente un protocollo unico per la rilevazione del profilo degli studenti.
Per la somministrazione servono:

- un protocollo (set di prove) per ogni alunno e uno per l’insegnante;
- un foglio bianco per lo svolgimento della prova di soluzione dei problemi aritmetici.

Durata del test e modalità di somministrazione

Parte collettiva di numero e calcolo

La somministrazione delle prove di numero e calcolo della batteria ha una durata indicativa di 60 minuti.

La parte collettiva prevede otto prove riunite in un fascicolo. Tale materiale va consegnato nello stesso momento a tutti i componenti della classe o del gruppo di studenti, che dovrebbero essere disposti come nelle verifiche scolastiche, con i banchi separati.

L'esaminatore, prima di consegnare a ciascun ragazzo il proprio fascicolo, deve illustrare nella maniera più semplice possibile le parti che compongono lo strumento che sarà somministrato. Il test deve essere descritto ai ragazzi dicendo che esso indaga le abilità di calcolo in studenti della loro età, precisando che non porterà a un voto nel registro ma che, se svolto con impegno, potrà dare a loro e agli insegnanti delle indicazioni sui loro punti di forza e di debolezza.

Prima della consegna della prova, verrà raccomandato ai ragazzi di svolgere gli esercizi richiesti con impegno e di prestare attenzione alle precise regole di esecuzione. In particolare, i ragazzi non potranno girare pagina fino a quando colui che somministra la prova non lo richiederà esplicitamente. Ad eccezione delle prove a tempo determinato, il test non implica consegne di velocità e quindi bisogna lasciare che i ragazzi procedano secondo il loro ritmo. Per passare da ogni esercizio a quello successivo l'esaminatore dovrà attendere, ogni volta, che almeno il 90% degli alunni lo abbia terminato (sollecitando i ritardatari).

È importante verificare, passando tra i banchi, che gli alunni abbiano capito bene l'esercizio.

Dopo aver distribuito il fascicolo si dovrà spiegare un esercizio alla volta, invitando gli alunni a soffermarsi sulle consegne di ciascuno e sugli esempi, che vengono svolti in classe assieme al somministratore.

Non è previsto alcun aiuto per i ragazzi in difficoltà durante lo svolgimento della prova, se non quello di sollecitarli nuovamente a considerare con attenzione le consegne e gli esempi di ciascun esercizio. Si dovrà inoltre precisare che la prova durerà indicativamente 60 minuti. Ci si potrà comunque regolare sul livello della classe.

Problemi aritmetici

Il tempo previsto per la sua somministrazione è di 30 minuti.

CAPITOLO 3

LA CORREZIONE DELLE PROVE E L'INTERPRETAZIONE DEI PUNTEGGI

Vedi Fascicolo allegato per tutti i protocolli (Schede di codifica) per l'insegnante.

Correzione del test dell'alunno

La correzione del test può avvenire in tre passaggi:

1. assegnazione del punteggio per ogni prova, con l'aiuto delle Schede di codifica;
2. completamento della Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti;
3. identificazione della fascia di prestazione per ciascun punteggio ottenuto.

Passaggio 1: assegnazione del punteggio

Per ogni esercizio il criterio di attribuzione del punteggio è quello di conteggiare le risposte corrette. Ciò comporta che punteggi più alti corrispondano a prestazioni migliori. Tutti gli item saltati vengono considerati errati.
Vengono date in dotazione, per ogni fascia di età, una Scheda di codifica per la Parte collettiva di numero e calcolo e una per i Problemi aritmetici, nelle quali ci sono le soluzioni di tutti gli item divisi per esercizio. Durante la siglatura si assegnerà il punteggio 1 a ogni risposta corretta e il punteggio 0 alle risposte errate. Per ogni test si dovrà calcolare il totale di risposte esatte compiute.
Vediamo però in dettaglio quali problemi si possono riscontrare nei diversi subtest.

Parte collettiva di numero e calcolo

Esegui le seguenti operazioni

Si confronta il risultato di ogni operazione riportato dal ragazzo con quello corrispondente nella Scheda di codifica. Il punteggio massimo ottenibile è 8.
Se il ragazzo scrive solamente il risultato corretto ma non svolge l'operazione mettendo in colonna i numeri negli spazi appositi va assegnato comunque il punteggio di 1. Eventualmente l'operatore avrà occasione di approfondire le modalità usate per calcolare durante la parte individuale.
Nei risultati le virgole dei decimali devono essere posizionate in modo corretto, in caso contrario si assegnerà il punteggio 0.

TABELLA 3.1
Scheda di codifica per l'esercizio *Esegui le seguenti operazioni*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
a) 5.588,5 b) 1.085,24 c) 1.683 d) 4.498 e) 29.393 f) 39 g) 19.110 h) 53	a) 7.997,05 b) 5.061,451 c) 3.930,51 d) 23,63 e) 41.866 f) 193 g) 85.986 h) 54,3	a) 72.951,22 b) 4.614,341 c) 4.422,67 d) 189.446,73 e) 146.372 f) 63,44 g) 59.378,4 h) 94,7

Espressioni aritmetiche

Si confrontano i risultati con quelli riportati nella Scheda di codifica. Il punteggio massimo ottenibile è 2.
Anche se è preferibile che i numeri siano ridotti ai minimi termini, non si conta errore nel caso il risultato sia corretto ma non semplificato: ad esempio se viene scritto 2/2 al posto di 1.

TABELLA 3.2
Scheda di codifica per l'esercizio *Espressioni aritmetiche*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
	a) 1/2 b) 6	a) 2 b) 1

Qual è il più grande

Confrontando con la Scheda di codifica qual è la lettera corrispondente al risultato corretto si assegna 1 punto a ciascuno degli item evidenziati correttamente.
Le indicazioni chiedono di sottolineare il numero più grande, ma le risposte vengono considerate valide anche se il ragazzo le ha barrate, cerchiate o evidenziate in qualche modo.
Se il ragazzo segna due risultati nello stesso item senza far capire quale ritiene corretto, si considera errore.

TABELLA 3.3
Scheda di codifica per l'esercizio *Qual è il più grande*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
1. c 2. d 3. c 4. a	1. b 2. b 3. e 4. d	1. a 2. b 3. a 4. a

Trasforma in cifre scritte

Per essere considerati corretti i numeri di ciascun item devono essere scritti esattamente come nella Scheda di codifica, con particolare attenzione alla posizione della virgola.
Durante la standardizzazione è capitato che qualche ragazzo scrivesse i numeri nell'ordine corretto ma omettesse per tutti gli item la virgola. In questo caso, anche se le risposte non possono essere considerate corrette, sarà utile all'esaminatore indagare se quest'errore è dovuto a distrazione, alla non comprensione dell'esercizio o se c'è una carenza nell'apprendimento del significato della virgola come separatore tra unità e decimali. Se il comportamento è dovuto a un fraintendimento delle istruzioni la prova viene considerata non-valida.

TABELLA 3.4
Scheda di codifica per l'esercizio *Trasforma in cifre scritte*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
a) 170,94 b) 1.348 c) 9.007 d) 330,85 e) 705,49 f) 3.741 g) 975,03 h) 262,83	a) 330,85 b) 170,94 c) 1.348 d) 9.007 e) 705,49 f) 3.741 g) 975,03 h) 262,83	a) 330,85 b) 170,94 c) 1.348 d) 9.007 e) 840 f) 3.741 g) 975,03 h) 262,83

Completa la serie

Per ogni item l'unico risultato corretto è quello riportato nella Scheda di codifica; il massimo del punteggio è 8.

TABELLA 3.5
Scheda di codifica per l'esercizio *Completa la serie*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
a) 9 b) 7 c) 9 d) 37 e) 1 f) 8 g) 16 h) 54	a) 25 b) 40 c) 4 d) 5 e) 19 f) 17 g) 26 h) 7	a) 6 b) 112 c) 113 d) 15 e) 15 f) 23 g) 8 h) 26

Trascrivi in cifre i seguenti numeri

Si confronta il numero riportato con quello corrispondente della Scheda di codifica. Il punteggio massimo è 8.

L'uso del puntino separatore delle migliaia è un indice della strategia usata dai ragazzi per scrivere correttamente i numeri ma non è un requisito fondamentale per considerare corretto l'item.

TABELLA 3.6
Scheda di codifica per l'esercizio *Trascrivi in cifre i seguenti numeri*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
1. 23.001	1. 33.000.614	1. 47.017
2. 100.017	2. 863.011	2. 1.000.001
3. 114.623	3. 323	3. 67.946
4. 17.462	4. 904.071	4. 11.503
5. 13.422.000	5. 13.480.036	5. 569.000
6. 700.021	6. 36.423	6. 13.490.036
7. 90.002	7. 54.709	7. 3.700.013
8. 1.643.000	8. 20.015	8. 25.833

Calcolo approssimativo

Si confronta la lettera del risultato sbarrato con quella riportata nella Scheda di codifica. Il punteggio massimo è 8 per la prova di prima media e 16 per le altre due classi. Anche se ai ragazzi viene chiesto di sbarrare il risultato corretto, viene accettato il personale modo di evidenziare la propria scelta, purché sia chiaro e comprenda un solo risultato. Soprattutto per le prove di seconda e terza classe, capita spesso che molti degli item di questo esercizio vengano saltati per mancanza di tempo: dovranno essere considerati errore.

TABELLA 3.7
Scheda di codifica per l'esercizio *Calcolo approssimativo*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
I) b	I) b	I) a
II) c	II) a	II) a
III) b	III) b	III) c
IV) a	IV) c	IV) b
V) b	V) a	V) a
VI) b	VI) a	VI) c
VII) c	VII) b	VII) b
VIII) a	VIII) c	VIII) a
	IX) b	IX) b
	X) a	X) b
	XI) a	XI) c
	XII) a	XII) a
	XIII) b	XIII) c
	XIV) c	XIV) a
	XV) c	XV) c
	XVI) a	XVI) a

Fatti, procedure e principi

Si confrontano i risultati riportati dai ragazzi con quelli corrispondenti della Scheda di codifica e si assegna un punto a ciascuna risposta corretta. Il massimo dei punti ottenibili è 16.

TABELLA 3.8
Scheda di codifica per l'esercizio *Fatti, procedure e principi*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
a) 44	a) 61	a) 84
b) 33	b) 70	b) 42
c) 34	c) 34	c) 34
d) 20	d) 45	d) 13
e) 38	e) 90	e) 38
f) 190	f) 550	f) 190
g) 392	g) 952	g) 392
h) 36.000	h) 36.000	h) 36.000
i) 21	i) 216	i) 21
j) 67	j) 21	j) 57
k) 16	k) 89	k) 16
l) 46	l) 68	l) 8
m) 42	m) 71	m) 53
n) 800	n) 23	n) 800
o) 430	o) 1.350	o) 430
p) 66	p) 430	p) 9

Le macrovariabili della Parte collettiva di numero e calcolo

Per quanto concerne la Parte collettiva di numero e calcolo noi in particolare abbiamo deciso di focalizzarci su tre variabili fondamentali che ci sembravano poter descrivere il processo di apprendimento aritmetico del ragazzo di scuola secondaria di primo grado. Innanzitutto (come suggerito da McCloskey, Caramazza e Basili, 1985), abbiamo distinto una valutazione specifica del calcolo da una riguardante il sistema di produzione-comprensione. Inoltre, tenendo conto dei riscontri empirici e del fatto che gli studenti efficienti si differenziano da quelli meno capaci per le loro capacità di ragionare sui calcoli in base a inferenze e stime, si è deciso di creare una terza macrovariabile, che abbiamo denominato Ragionamento aritmetico.
Le macrovariabili che si possono identificare con la parte collettiva sono quindi:

- **Calcolo scritto collettivo:** è un indice di accuratezza nel calcolo, è dato dalla somma dei punteggi delle prove *Esegui le seguenti operazioni* ed *Espressioni aritmetiche*. Nella batteria di classe prima non è presente l'esercizio *Espressioni aritmetiche* e quindi questa macrovariabile corrisponde al punteggio nel primo subtest.

- **Comprensione e produzione:** l'indice si ricava dalla somma dei punteggi di *Qual è il più grande*, *Trasforma in cifre scritte*, *Trascrivi in cifre i seguenti numeri*. Punteggi alti in questa macrovariabile indicano buone capacità di comprensione e produzione dei numeri oltre a una soddisfacente confidenza con i meccanismi sintattici e lessicali.
- **Ragionamento aritmetico:** l'indice si ricava dalla somma dei punteggi *Calcolo approssimativo* e *Fatti, procedure e principi*. Questa variabile indica la capacità dei ragazzi di applicare con una certa elasticità le conoscenze matematiche apprese e di ricavare da questi principi e strategie nuovi. (Si noti che avrebbe potuto essere inclusa anche la prova di Problemi aritmetici, ma — date le sue sostanziali differenze — questa prova è stata lasciata a parte).
- **Totale:** è possibile ottenere anche un punteggio complessivo di questa parte. Esso non è molto esplicativo ma può dare un'indicazione generale di come sono le abilità matematiche del ragazzo. Tale punteggio viene calcolato nel seguente modo:

  Totale = (Calcolo scritto collettivo x 3) + Comprensione e produzione + Ragionamento aritmetico.

In questo totale si è deciso di moltiplicare per tre il punteggio della macrovariabile Calcolo scritto collettivo perché altrimenti essa non avrebbe avuto il peso che meritava. Si ricorda infatti che, mentre i punteggi massimi ottenibili in Comprensione e produzione e in Ragionamento aritmetico sono rispettivamente 20 e 32, per quanto riguarda il Calcolo scritto collettivo il massimo possibile è 8 nella prova di classe prima e 10 nelle altre due. Anche in base ai riscontri empirici, si è ritenuto opportuno non inserire nel calcolo delle macrovariabili il totale del test Completa la serie. Questo esercizio infatti va a indagare la capacità logica del ragazzo, che pur essendo fortemente correlata con l'apprendimento matematico, è un'abilità qualitativamente diversa.

Problemi aritmetici

Anche se per un'analisi qualitativa degli errori può essere utile consultare nei fogli di malacopia come sono stati svolti i singoli problemi, ai fini della valutazione del punteggio si guarda solo se il risultato corrisponde a quello riportato nella Scheda di codifica. Si assegna un punto per ogni problema per cui è stato indicato il risultato corretto.

TABELLA 3.9
Scheda di codifica per la prova *Problemi aritmetici*

RISULTATI CLASSE 1ª	RISULTATI CLASSE 2ª	RISULTATI CLASSE 3ª
1. 31,1 m	1. 20 €	1. 35 €
2. 1.000 €	2. 333 €	2. 16
3. 750 €	3. 5,44 kg	3. 3 kg
4. 2 €	4. 137 €	4. 500
5. 19 hg	5. 320	5. 92
6. 1,2 €	6. 300	6. 22 hg
7. 9 €	7. 7	7. 48
8. 1,04 litri	8. 22 €	8. 8
9. 53 hg	9. 700	9. 256
10. 90,9 €	10. 99 €	10. 133 €

Vedi Fascicolo allegato.

Vedi Risorse online per scaricare la Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti.

Passaggio 2: Completamento della Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti

I punteggi possono essere raccolti nella Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti.

TABELLA 3.10
Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti, parte collettiva

		COME SI CALCOLA	PUNTEGGIO
PARTE COLLETTIVA	Esegui le seguenti operazioni	–	
	Espressioni aritmetiche	–	
	Qual è il più grande	–	
	Trasforma in cifre scritte	–	
	Completa la serie	–	
	Trascrivi in cifre i seguenti numeri	–	
	Calcolo approssimativo	–	
	Fatti, procedure e principi	–	
TOTALI	*Calcolo scritto collettivo**	Esegui le seguenti operazioni + Espressioni aritmetiche	
	Comprensione e produzione	Qual è il più grande + Trasforma in cifre scritte + Trascrivi in cifre i seguenti numeri	
	Ragionamento aritmetico	Calcolo approssimativo + Fatti, procedure e principi	
	Totale prova collettiva	Calcolo scritto collettivo (x 3) + Comprensione e produzione + Ragionamento aritmetico	
	Problemi aritmetici	–	

* *Si ricorda che per la classe prima il totale relativo a calcolo scritto collettivo è dato solamente dalla prova* Esegui le seguenti operazioni.

Passaggio 3: Identificazione della fascia di prestazione per ciascun punteggio ottenuto

Una volta raccolti i punteggi delle diverse prove nella Tabella riassuntiva dei punteggi ottenuti sarà necessario confrontare i punteggi con i dati criteriali per fasce, grazie ai quali è possibile individuare facilmente la fascia di prestazione (tabelle 3.11, 3.12, 3.13). Si ricorda che, come per altre nostre prove, i punteggi sono distinti nelle seguenti fasce:

- Richiesta di intervento
- Richiesta di attenzione
- Nella media
- Ottimale.

Vedi Appendice A per i dati normativi di dettaglio.

Vedi Approfondimento 4 per alcuni esempi di somministrazione del test.

Vedi Risorse online per un video tutorial di un esempio di correzione e interpretazione del test.

La fascia di **RICHIESTA DI INTERVENTO** corrisponde a punteggi particolarmente bassi (tipicamente dal primo percentile fino a poco sopra al decimo) e tali da richiedere una considerazione individualizzata immediata, in modo da evitare ricadute importanti sul percorso di apprendimento.
La fascia **RICHIESTA DI ATTENZIONE** corrisponde a punteggi che risultano in maniera sostanziale sotto la media di riferimento (tipicamente da valori sotto o poco sopra il ventesimo percentile) e richiedono quindi attenzione.
La fascia **NELLA MEDIA** indica i punteggi che risultano nella media (più o meno compresi fra il trentesimo e il settantesimo percentile).
La fascia **OTTIMALE** indica i punteggi che risultano decisamente sopra la media (tipicamente oltre il settantesimo percentile).
Ovviamente, i punteggi vanno sempre interpretati con prudenza perché sono soggetti agli inevitabili errori di misurazione.
Nelle tabelle 3.11, 3.12 e 3.13 sono raccolti i punteggi per le diverse classi suddivisi nelle fasce di prestazione descritte sopra.

TABELLA 3.11

Fasce di prestazione sesto grado, prima classe scuola secondaria di primo grado

Prove	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale
Esegui le seguenti operazioni	0-3	4	5-7	8
Qual è il più grande	0-1	2	3	4
Trasforma in cifre scritte	0-2	3-4	5-7	8
Completa la serie	0-3	4	5-7	8
Trascrivi in cifre i seguenti numeri	0-3	4-5	6-7	8
Calcolo approssimativo	0-3	4	5-7	8
Fatti, procedure e principi	0-6	7-9	10-14	15-16
Comprensione e produzione	**0-8**	**9-13**	**14-18**	**19-20**
Ragionamento aritmetico	**0-10**	**11-14**	**15-21**	**22-24**
Totale prova collettiva	**0-31**	**32-46**	**47-64**	**65-68**
Problemi aritmetici	1-2	3-4	5-8	9-10

I punteggi sommati sono evidenziati in grassetto.

TABELLA 3.12

Fasce di prestazione settimo grado, seconda classe scuola secondaria di primo grado

Prove	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale
Esegui le seguenti operazioni	0-2	3-4	5-6	7-8
Espressioni aritmetiche	0		1-2	
Qual è il più grande	0-1	2	3	4
Trasforma in cifre scritte	0-2	3	4-7	8
Completa la serie	0-1	2-3	4-6	7-8
Trascrivi in cifre i seguenti numeri	0-3	4-5	6-7	8
Calcolo approssimativo	0-3	4-5	6-9	10-16
Fatti, procedure e principi	0-6	7-9	10-14	15-16
Calcolo scritto collettivo	**0-3**	**4-5**	**6-8**	**9-10**
Comprensione e produzione	**0-7**	**8-11**	**12-18**	**19-20**
Ragionamento aritmetico	**0-10**	**11-14**	**15-23**	**24-32**
Totale prova collettiva	**0-30**	**31-44**	**45-69**	**70-82**
Problemi aritmetici	0-1	2-3	4-6	7-10

I punteggi sommati sono evidenziati in grassetto.

TABELLA 3.13

Fasce di prestazione ottavo grado, terza classe scuola secondaria di primo grado

Prove	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale
Esegui le seguenti operazioni	0-1	2-3	4-6	7-8
Espressioni aritmetiche	0-1		2	
Qual è il più grande	0-1	2	3	4
Trasforma in cifre scritte	0-2	3-4	5-7	8
Completa la serie	0-1	2-3	4-6	7-8
Trascrivi in cifre i seguenti numeri	0-4	5-6	7	8
Calcolo approssimativo	0-4	5-7	8-12	13-16
Fatti, procedure e principi	0-9	10-11	12-14	15-16
Calcolo scritto collettivo	**0-2**	**3-5**	**6-8**	**9-10**
Comprensione e produzione	**0-8**	**9-13**	**14-18**	**19-20**
Ragionamento aritmetico	**<14**	**14-18**	**19-27**	**28-32**
Totale prova collettiva	**0-31**	**32-50**	**51-73**	**74-82**
Problemi aritmetici	0-1	2-3	4-6	7-10

I punteggi sommati sono evidenziati in grassetto.

Vedi Risorse online per scaricare una tabella da completare per la raccolta dei punteggi della classe.

Visione dei risultati del test dell'intera classe

Per ottenere un profilo della classe si suggerisce di completare la raccolta dei punteggi della classe (si veda un esempio nella tabella 3.14), indicando per ogni prova il numero di studenti, il cui punteggio ricade in quella fascia.

TABELLA 3.14

Tabella per la raccolta dei punteggi della classe

Prove	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale

APPROFONDIMENTO 1
ABILITÀ E DIFFICOLTÀ DI CALCOLO NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

PERCHÉ È IMPORTANTE CONOSCERE LE TEORIE DI RIFERIMENTO RISPETTO AGLI APPRENDIMENTI?

Per poter sfruttare al massimo le potenzialità del test è molto importante sapere quali sono i processi cognitivi che sostengono l'apprendimento matematico di un ragazzo. In questo modo, infatti, si può avere maggiore consapevolezza rispetto a cosa si sta andando a valutare, a cosa aspettarsi e a come interpretare un eventuale sbaglio.

Immaginiamo che un ragazzo compia parecchi errori quando svolge delle operazioni scritte. Sapendo che, per completare questo tipo di compito sono necessarie diverse abilità o processi cognitivi, sarebbe importante andare a eseguire un'analisi degli errori compiuti.

È riuscito a incolonnare bene i numeri? Ha ricordato correttamente i passaggi da svolgere per eseguire l'operazione? Ha considerato correttamente eventuali prestiti o riporti? Sono giusti i calcoli intermedi?

In base all'errore compiuto gli interventi di aiuto sono molto differenti. Può essere necessario fornire delle griglie per facilitare l'incolonnamento dei numeri, oppure riprendere la sequenza di azioni che compone uno specifico algoritmo, o ancora lavorare sulla capacità di eseguire i calcoli intermedi.

Conoscendo le abilità che vengono valutate dalle diverse prove, come queste si sviluppano e quali sono i loro prerequisiti, si possono utilizzare le prove con maggiore consapevolezza all'interno di un percorso in cui il test diventa il punto di partenza per conoscere come stanno maturando le abilità di un ragazzo e come sostenerne lo sviluppo.

> *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere se prima non si impara ad intender la lingua, e a conoscer i caratteri né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza queste è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*
>
> (Galileo Galilei, *Il Saggiatore,* 1623).

L'importanza della matematica è davanti ai nostri occhi tutti i giorni ed è stata riconosciuta fin dai primi filosofi. Secondo Pitagora infatti: «Il numero è la sostanza delle cose», ossia con i numeri si possono spiegare le cose più disparate dell'esperienza dato che, a suo parere, in tutto c'è un ordinamento geometrico esprimibile in numeri. Galileo Galilei nel 1623 con il *Saggiatore* riprende questa teoria platonico-pitagorica della struttura matematica del cosmo secondo la quale la composizione reale del mondo è di tipo geometrico, per cui solo chi ha appreso il linguaggio matematico è in grado di decifrarla.

Ma come avviene l'apprendimento della matematica, così importante, così amata e molto spesso anche così odiata?

Conoscenza numerica e capacità di calcolo

Durante l'apprendimento della matematica si sviluppano la conoscenza concettuale e la conoscenza delle procedure.
La conoscenza concettuale è la comprensione dei principi che governano un determinato dominio e delle correlazioni tra aree di conoscenza e il dominio stesso. Gli studiosi l'hanno anche definita come comprensione o conoscenza iniziale.
La conoscenza delle procedure invece riguarda la sequenza di azioni per risolvere ciascun problema: algoritmi, abilità, strategie.
Questi due tipi di conoscenza si influenzano reciprocamente in maniera profonda ma restano comunque distinti e hanno tempi di sviluppo diversi.
Anche Piaget (1968) distingueva la conoscenza procedurale da quella concettuale. Egli affermava infatti che saper contare e possedere il concetto di numero sono abilità cognitive evolutivamente diverse: un bambino può infatti usare i numeri senza comprenderne il significato. Un caso ulteriormente diverso è quello rappresentato dalla capacità di esplicitare un significato che tuttavia è intuito e utilizzato. Questa conoscenza è stata anche detta dichiarativa dai neuroscienziati cognitivi, mettendola in contrasto con una conoscenza procedurale, che può tuttavia essere significativa, ma non è esplicitata (Cornoldi et al., 2019).
Come già abbiamo riportato nel manuale parallelo costruito per le prove dedicate alla scuola primaria, analizzando la letteratura (ricerche e contributi teorici) che riguarda l'apprendimento delle abilità di numero e calcolo possiamo individuare diverse linee conduttrici. Ci soffermeremo sulle principali tra queste che hanno un rapporto con le abilità valutate dalle prove AC-MT-Scuola, in modo da aiutare chi utilizza il test a contestualizzare gli esiti della valutazione. Rinviamo, invece, per un approfondimento, a testi specificamente dedicati all'apprendimento della matematica (si veda, ad esempio, Dowker, 2018).
In particolare, una riflessione sull'apprendimento della matematica in contesto scolastico della secondaria di primo grado non può prescindere dalla considerazione delle premesse che il ragazzo si portava dietro quando è stato esposto per la prima volta a una istruzione matematica e quindi ha accumulato e si è trovato a possedere all'ingresso della scuola secondaria. Come illustrato anche in un nostro recente volume (Cornoldi, 2019), negli ultimi anni diversi studiosi si sono interessati alle basi biologiche, alle predisposizioni innate e al modo in cui i bambini, sin dall'infanzia, sono in grado di approcciarsi alle quantità, facendo uso del sistema numerico, e hanno mostrato come la intuizione matematica sia innata nell'uomo. Ad esempio, Butterworth (2005) ha sostenuto che le competenze matematiche hanno una base innata e geneticamente determinata, che egli chiama «Modulo numerico», ma che non si possono ignorare le differenze individuali derivanti dalla cultura alla quale si appartiene, dovute alla scuola e ad altre forme di apprendimento. Le ricerche più recenti hanno cercato quindi di delineare come le abilità matematiche innate o comunque precedenti al contesto scolastico possano influire sul successo nell'apprendimento strutturato (formale) tra i banchi di scuola (McMullen, Hannula-Sormunen e Lehtinen, 2011). Per questo numerosi studi hanno analizzato quelle che sono definite competenze di base, come il concetto di numero o la percezione di numerosità, o altre abilità che si sviluppano tipicamente prima dell'inizio della scuola primaria, e hanno esaminato come esse influenzino l'acquisizione delle successive competenze matematiche apprese a scuola (Clements e Sarama, 2014; Mix, Huttenlocher e Levine, 2002). La sottolineatura delle basi biologiche e degli elementi maturativi legati allo sviluppo delle competenze matematiche precoci non deve

far trascurare l'importanza delle stimolazioni che il bambino riceve a partire dall'ambiente domestico. Come i lavori di diversi studiosi e in particolare del gruppo della LeFevre (si veda ad esempio, Skwarchuk, Sowinski e LeFevre, 2014) hanno mostrato, anche le attività che i bambini svolgono insieme ai propri genitori in ambiente domestico sono rilevanti per lo sviluppo dell'apprendimento matematico. A tal proposito, si sono distinte due categorie di attività numeriche, quelle formali e quelle informali. Infatti vi sono, da un lato, momenti in cui i genitori direttamente e intenzionalmente insegnano ai propri figli concetti, nozioni o contenuti relativi ai numeri, alle quantità o all'aritmetica al fine di promuovere la loro conoscenza numerica. Vi sono inoltre molti momenti informali, in cui l'apprendimento di alcuni aspetti della matematica da parte dei bambini può avvenire ugualmente, in maniera incidentale, ad esempio con giochi che coinvolgono numeri oppure misurando, pesando o confrontando quantità alla presenza del bambino. Le nostre indagini e proposte educative che poi hanno portato al progetto di sistema della *Didattica metacognitiva della matematica* (Caponi et al., 2006) hanno messo in luce che, anche per ragazzini della scuola secondaria di primo grado, le credenze di genitori (e insegnanti) hanno una pesante influenza sul modo in cui essi si pongono nei confronti della matematica.
Lo sviluppo delle competenze matematiche è stato descritto da molti modelli cognitivi cui rimandiamo. Vogliamo qui ricordare che la distinzione tra conoscenza numerica e procedure di calcolo era stata inclusa da McCloskey e collaboratori nel loro modello modulare (McCloskey, Caramazza e Basili, 1985). Questo modello ipotizzava che la rappresentazione mentale della conoscenza numerica, oltre a essere indipendente da altri sistemi cognitivi, fosse composta da tre moduli, interdipendenti e correlati ma funzionalmente distinti, volti all'elaborazione delle informazioni numeriche:

1. Sistema di comprensione: trasforma sia i numeri espressi in cifre sia quelli espressi in parola in una rappresentazione astratta di quantità, che costituisce la base per successive elaborazioni.
2. Sistema di calcolo: usa come input le rappresentazioni astratte provenienti dal precedente sistema e le manipola attraverso il funzionamento di tre componenti: i segni di operazione, i fatti aritmetici e le procedure del calcolo. Contiene quindi le memorizzazioni delle operazioni base, delle principali regole e delle procedure di risoluzione delle operazioni più complesse.
3. Sistema di produzione numerica: riceve gli input dai primi due sistemi e li traduce in numeri espressi in cifre o parole. Produce quindi le risposte numeriche o output.

La conoscenza numerica, che all'interno del modello neuropsicologico di McCloskey è data dal sistema di comprensione, consente di capire le quantità e le loro trasformazioni. Per comprendere la quantità è fondamentale capire quanto vale un numero rispetto a un altro, ossia compiere operazioni di tipo semantico.
Alcuni esempi concreti di compiti di tipo semantico possono essere la stima di numerosità, la seriazione e la comparazione tra insiemi o numeri. Relativamente a questo ambito il test AC-MT 11-14 include sia compiti che indagano la conoscenza lessicale e sintattica dell'insieme di numeri, sia compiti di comparazione delle grandezze.
Varie ricerche nell'ambito della psicologia cognitiva hanno evidenziato che, per promuovere una buona competenza matematica, è importante da un lato facilitare l'apprendimento delle diverse abilità matematiche, fra cui quelle di stima della quantità, di comparazione e di seriazione, e dall'altro prestare attenzione ai tempi impiegati in questi diversi compiti cognitivi. In questo modo si può vedere fino a che punto uno studente è capace di operare velocemente ed efficientemente, utilizzando queste abilità anche in contesti in cui la mente è impegnata contemporaneamente in

altre operazioni, ad esempio nel ragionamento. L'analisi della velocità infatti ci permette di riconoscere il grado di automazione dei processi sottostanti al compito (Cornoldi e Cazzola, 2005). L'importanza della automatizzazione e della velocizzazione si vede anche in relazione alle capacità di calcolo (ad esempio, Dixon, Deets e Bangert, 2001; Wilson e Swanson, 2001; Montague e Van Garderen, 2003). Nei ragazzi di scuola secondaria di primo grado esse sono influenzate da vari fattori: innanzitutto dal grado di adeguatezza, di complessità e di automatizzazione delle strategie utilizzate, in secondo luogo dalle capacità di stimare i possibili risultati e di programmare i diversi passaggi da svolgere.
Per questa ragione si è deciso di inserire nel test non solo esercizi di calcolo orale e scritto ma anche esercizi che andassero a indagare, nello specifico, le abilità nell'applicare strategie e principi di calcolo, e le capacità di svolgere calcoli approssimativi.
In special modo le operazioni mentali più complesse (come 181 + 129) implicano ulteriori meccanismi e strategie. In un'operazione come quella sopra riportata, è necessario ad esempio mantenere in memoria i risultati parziali delle addizioni per colonna (agisce qui la memoria di lavoro, detta anche *working memory*), e compiere una serie di altre operazioni come il riporto (il prestito se si tratta di sottrazioni) e la messa in atto della corretta sequenza.
È evidente che durante il calcolo mentale il così detto «calcolatore» deve scomporre l'operazione complessa in una serie di passaggi elementari i cui risultati devono essere mantenuti in memoria e poi combinati assieme (Butterworth, 1999).
Un gran numero di studi ha provato che i bambini con difficoltà di apprendimento in matematica presentano anche delle difficoltà a livello della memoria di lavoro. Questa infatti non si limita a trattenere in memoria le informazioni che poi saranno immagazzinate nella memoria a lungo termine ma provvede anche a trasformarle, ricostruirle, interpretarle e se necessario a elaborarne di nuove. Hitch (1978) sostiene l'importanza per il calcolo sia della memoria a lungo termine sia della memoria di lavoro, in quanto la prima fornisce le conoscenze e le procedure già acquisite, mentre la seconda permette di processare e mantenere le informazioni temporaneamente. Egli afferma che all'interno della *working memory* esiste un «magazzino di lavoro» deputato alla ritenzione a breve termine delle informazioni riguardanti il problema e tutti i passaggi per la sua soluzione. Le operazioni con più di una cifra, ad esempio, sarebbero scomposte in una serie di passaggi elementari e risolte grazie alle informazioni provenienti da una «biblioteca di fatti numerici» contenuta nella memoria a lungo termine. Il magazzino di lavoro mantiene i risultati intermedi, il valore dei riporti e dei prestiti e le informazioni su quanta parte del problema è già stata risolta e quanta è ancora da completare.
Tramite i suoi esperimenti Hitch (1978) è arrivato alla conclusione che le capacità del magazzino di memoria di lavoro possono essere disturbate da tre principali attività:

- mantenere un eccessivo numero di informazioni nel sistema
- mantenere le informazioni per un lungo periodo di tempo
- eseguire più passaggi o calcoli contemporaneamente.

Nei suoi esperimenti Hitch ha rilevato che le performance dei suoi soggetti diminuivano in funzione del numero di operatori del problema e di operazioni di riporto e all'aumentare del tempo che intercorreva tra la presentazione dell'operazione e il momento in cui era possibile dare una risposta.
Gli studi relativi al modo in cui avviene il calcolo di operazioni complesse possono essere divisi in due principali correnti. La prima si concentra sui processi di recupero uniti ad alcuni meccanismi procedurali; la seconda sulle conoscenze procedurali.

Ashcraft (1992) sostiene che nel calcolo a mente di operazioni a due cifre con somma minore di 30 vi è un recupero iniziale della somma parziale dalla memoria e quindi un meccanismo procedurale.
Altri autori (per una rassegna si vedano Lucangeli e Passolunghi, 1995) si sono focalizzati sulle strategie. È stato evidenziato ad esempio il ruolo centrale di due strategie, la «1010» e la «N10». La prima prevede che, di fronte a un'addizione o a una sottrazione tra due numeri, vengano separate decine e unità di entrambi i numeri che poi si sommano o sottraggono separatamente (ad esempio, 32 + 25 si computa con 30 + 20 e 2 + 5). Con la strategia «N10», invece, si scompone solo il secondo operatore: ad esempio, si procede facendo 32 + 20 = 52, 52 + 5 = 57. Questa seconda strategia è più evoluta ed è anche la più frequentemente usata dagli adulti.

Difficoltà e disturbi in matematica

Le difficoltà con la matematica sono un fenomeno molto comune nella vita di tutti i giorni, ma solo raramente si può parlare di presenza di un disturbo specifico dell'apprendimento. Nella maggior parte dei casi si tratta piuttosto di difficoltà reversibili, blocchi emotivo-motivazionali, fenomeni di distrazione che portano a compiere errori banali, mancanza di conoscenze essenziali necessarie per procedere negli apprendimenti successivi. Ad esempio, Caviola et al. (2014) hanno dimostrato che, in certi passaggi dell'apprendimento matematico, è necessario possedere abilità di carattere generale, ma anche conoscenze specifiche che sorreggono apprendimenti successivi, e ci sono evidenze del fatto che alcuni studenti si bloccano per la mancata conoscenza di regole di base o per l'impaccio di fronte a certe notazioni matematiche.
Crediamo opportuno precisare la differenza tra disturbo e difficoltà di apprendimento: ci si riferisce a una «difficoltà di apprendimento» quando i problemi incontrati dallo studente sono particolarmente difficili da definire e possono essere ricondotti a un grande numero di fattori che non riguardano solo lo studente ma anche il contesto in cui è inserito.
Con il termine «disturbo specifico di apprendimento» si fa invece riferimento a una problematica ben definita che deve soddisfare determinati criteri: in letteratura si parla di disturbo di apprendimento quando vengono soddisfatti i criteri di esclusione e si nota una certa «discrepanza» tra il livello delle abilità generali dello studente e il suo effettivo successo scolastico.
I «fattori di esclusione» ci ricordano che non si può parlare di disturbo specifico se ci sono: problemi sociali, svantaggio socioculturale, deficit attentivi, carenza di istruzione, disabilità sensoriali, motorie e mentali.
Perché molte persone detestano la matematica e la trovano così difficile? Come già abbiamo evidenziato nella parte introduttiva e illustrato anche altrove (Caviola et al., 2020) sono molti i fattori in gioco e alcuni di essi, pur essendo molto particolari, possono avere una loro influenza, come è stato evidenziato da Butterworth (1999) ponendo l'accento su due fattori. In primo luogo, può essere accaduto che queste persone abbiano avuto cattivi insegnanti o che siano cresciute in un ambiente sociale sfavorevole all'apprendimento. La seconda ragione ha le sue radici nel linguaggio: alcune lingue come l'italiano e l'inglese hanno terminologie molto irregolari per i numeri. Soprattutto dopo il dieci, cominciano gli undici, i dodici, i tredici e ogni decina successiva ha un nome diverso: venti, trenta, quaranta… In cinese o in giapponese, invece, dopo il dieci si conta dieci-uno, dieci-due, dieci-tre, venti-uno, venti-due, e così via. In queste lingue asiatiche è tutto più semplice e trasparente; quindi, quando i bambini arrivano a scuola, in pratica sanno già

contare, dato che basta imparare qualche regola e i numeri «camminano» da soli (Butterworth, 1999). Butterworth attribuisce anche a questo fattore il fatto che, nelle facoltà scientifiche americane, gli studenti di origine asiatica risultano superiori in matematica.

Un altro elemento che crea difficoltà in matematica è l'ansia spesso ad essa associata. L'ansia per la matematica è usualmente definita come «sentimento di tensione, apprensione o paura che interferisce con le performance matematiche. Le persone che soffrono di quest'ansia riferiscono problemi, non solo a scuola ma anche in attività di tutti i giorni, come usare un libretto di assegni o calcolare il conto al ristorante» (Donlan, 1998; vedi Caviola et al., 2020). L'ansia può essere associata ad un quadro metacognitivo disfunzionale (Cornoldi, 1995). Ad esempio (Montague e Van Garderen, 2003), si è trovato che tipicamente gli studenti con un disturbo dell'apprendimento tendono ad attribuire i loro insuccessi alla propria scarsa abilità e i successi alla fortuna, mentre i loro compagni tendono maggiormente ad attribuire la causa dei propri risultati allo sforzo impiegato per prepararsi. Anche se i compiti sono adatti alle capacità dei ragazzi con disturbo dell'apprendimento, essi sono portati a percepirli come troppo difficili e di conseguenza spesso tirano a indovinare o si danno per vinti. Così invece che dedicare più tempo a risolvere i problemi ne dedicano meno.

Ma perché la matematica provoca tali stati d'animo più di altre materie? Certamente una delle cause è che in matematica l'errore è evidente, non ammette discussioni e ciò può aumentare la paura di sbagliare; un'altra ragione è legata al fatto di non poter ricorrere alle tipiche strategie che usualmente aiutano quando non si sa come procedere, come l'ordine, l'impegno e la diligenza. Un'altra ragione è la credenza diffusa che per riuscire in matematica bisogna essere «portati» e avere una particolare intelligenza. Ciò dà inizio a un circolo vizioso per cui molti ragazzi non si coinvolgono interamente nel compito per la paura di sbagliare e di scoprire i propri limiti, e così spesso danno una risposta scorretta che va ad aumentare la loro credenza di non essere portati.

Le cause di grandi o piccole difficoltà specifiche d'apprendimento in matematica possono quindi essere molte ed eterogenee.

A fianco di fattori ambientali e psicologici agiscono tuttavia anche predisposizioni profondamente ancorate nelle strutture biologiche dello studente. La mancata integrità di alcune funzioni cerebrali compromette la buona riuscita dei compiti cognitivi inerenti la matematica. A causa di sottostanti disfunzioni cerebrali i bambini con un vero e proprio disturbo di apprendimento imparerebbero in modo qualitativamente diverso essendo incapaci di organizzare e integrare le informazioni. Queste disfunzioni in molti casi persistono anche con l'avanzare dell'età. I problemi nell'apprendimento della matematica possono derivare da danni a entrambi gli emisferi, sia a quello destro, specializzato nell'integrazione olistica degli stimoli visivo-spaziali, sia a quello sinistro, specializzato nell'integrazione sequenziale di stimoli linguistici primari.

Numerosi studiosi sostengono l'importanza e la prevalenza di svariati processi cognitivi come memoria, attenzione, fattori psicomotori e visuo-percettivi; altri considerano anche tematiche psicologiche non cognitive come quelle motivazionali, relazionali ed emozionali. Secondo Johnson (1979) ci possono essere otto aree-problema che interessano processi cognitivi diversi:

1. deficit mnestici
2. deficit del coordinamento visuo-motorio
3. deficit dell'orientamento spaziale
4. deficit verbale
5. difficoltà di chiusura visiva
6. deficit di associazione visuo-uditiva
7. difficoltà di discriminazione visuo-uditiva
8. deficit attentivi.

Vari autori (ad esempio, Hitch, 1978; Brainerd, 1983) hanno poi enfatizzato la grande importanza della memoria a breve termine, sia per il suo processo esecutivo sia per l'immagazzinamento a breve termine delle informazioni.
Come osserva Soresi (1991) le cause possono anche non essere relative al ragazzo ma alla qualità dell'insegnamento. Il linguaggio spesso è troppo difficile, non si sottolinea a sufficienza l'importanza dell'esercizio e della reiterazione, c'è un eccessivo ricorso a simboli, i quali richiedono capacità di astrazione che spesso è deficitaria nei ragazzi con disturbo di apprendimento. L'insegnamento della matematica ha inoltre subìto cambiamenti e gli insegnanti a volte non sono ancora preparati e non conoscono le strategie didattiche necessarie, e per lo stesso motivo i genitori faticano ad aiutare i propri figli.

Errori di calcolo e modelli di funzionamento

Come descritto nel capitolo di Caviola, Lucangeli e Cornoldi (2019), alcuni primi studi nel campo della discalculia avevano formulato classificazioni della discalculia evolutiva, ma successivamente le analisi neurocognitive si erano riferite ai modelli di elaborazione della conoscenza numerica e del calcolo sviluppati anche nello studio di soggetti adulti (McCloskey, 1992; Dehaene e Changeux, 1993), evidenziandone le caratteristiche anche nei bambini.
Fu messo in luce che le competenze di elaborazione numerica dipendono da diverse componenti cognitive (comprensione, produzione e calcolo). In particolare, secondo il modello di McCloskey (1992), la rappresentazione mentale della conoscenza numerica, oltre a essere indipendente da altri sistemi cognitivi, è strutturata in tre moduli a loro volta distinti funzionalmente. Il sistema di comprensione trasforma la struttura superficiale dei numeri (diversa a seconda del codice, verbale o arabo) in una rappresentazione astratta di quantità. Il sistema del calcolo assume questa rappresentazione come input, per poi manipolarla attraverso il funzionamento di tre componenti: i segni delle operazioni, i «fatti aritmetici» o operazioni base e le procedure del calcolo. I meccanismi di produzione rappresentano l'output del sistema del calcolo, forniscono cioè le risposte numeriche. Secondo tale modello nella produzione e nella comprensione dei numeri intervengono meccanismi lessicali e sintattici, tra loro indipendenti, responsabili rispettivamente dell'elaborazione delle singole cifre contenute nel numero e dell'elaborazione dei rapporti fra le cifre che costituiscono il numero. Più precisamente, l'elaborazione di un numero comporta inizialmente una sua rappresentazione concettuale o semantica, tramite cui vengono identificati tutti gli elementi che costituiscono il numero, specificando per ciascuno di essi le informazioni relative alla quantità e all'ordine di grandezza. Tali informazioni sono alla base del lessico dei numeri e sono in stretta interdipendenza con la sintassi che regola i numeri stessi (valore posizionale delle cifre).
Secondo molti modelli, si può cercare di differenziare le difficoltà di calcolo in disturbi di base relativi alla conoscenza numerica e disturbi relativi al calcolo vero e proprio. Queste difficoltà possono essere analizzate sia in relazione agli indici quantitativi di prestazione, sia in relazione alle tipologie di errori più frequenti nel bambino. Per quanto concerne la conoscenza numerica, sono state evidenziate difficoltà relative alla comprensione distinte da quelle riguardanti la produzione e si sono inoltre identificati tipi di errori fondamentali, pervenendo a ipotizzare una classificazione fra errori lessicali, semantici e sintattici. Si ricorda che gli errori a livello lessicale sono quelli che riguardano «il nome» del numero, senza coinvolgere il loro posto all'interno del numero (valore posizionale delle cifre). Sono errori lessicali ad esempio: 4 al posto di 7, dove leggo o mi

rappresento mentalmente, scrivo o dico ad alta voce «quattro» invece di «sette». La sintassi del numero riguarda invece la relazione fra le diverse cifre che compongono il numero; tale sintassi è mediata dal valore posizionale delle cifre. Ad esempio, il numero 1 e il numero 3 nel 13 impongono una grammatica di relazione tra i due numeri. Tale grammatica da un lato coinvolge anche il livello lessicale, cioè il nome delle cifre (infatti l'uno nel tredici non si dice più «uno»), dall'altro regola anche il valore semantico delle cifre, cioè la quantità che esse rappresentano (nell'esempio fatto l'uno vale dieci). Errori semantici sono, in particolare, quelli associati all'incapacità di riconoscere la grandezza del numero (ad esempio che 70 è maggiore di 40).

Se le ricerche della Temple (ad esempio Temple, 1991) erano riuscite a descrivere possibili tipologie di discalculia evolutiva, caratterizzando ciascuna di esse in riferimento alle cause e alle condizioni neuropsicologiche alla base del disturbo stesso, va comunque evidenziato che a tutt'oggi manca una modalità condivisa dai diversi autori per analizzare le tipologie e le cause delle difficoltà implicate nei disturbi di calcolo.

Tuttavia, è possibile individuare in letteratura classificazioni comuni nell'analisi degli errori commessi dai bambini e ricostruire così, grazie all'aiuto fornito dai modelli stessi, possibili cause e concause, il tutto in vista di una corretta analisi, necessaria non soltanto in fase diagnostica ma anche per l'intervento riabilitativo.

Nell'analisi proposta da Lucangeli e Tressoldi (2001), ad esempio, gli errori nel sistema di calcolo sono stati attribuiti a differenti tipi di difficoltà e disturbi, dividendoli come segue.

Errori o inadeguate applicazioni procedurali e di applicazione di strategie nell'uso di procedure, come avviene in quei bambini che, pur avendo appreso procedure di conteggio facilitanti, si aiutano ancora con procedure più immature che generalmente portano a una risposta sbagliata, e che quando portano a una risposta corretta comportano costi cognitivi eccessivi. Ad esempio, nell'operazione $2 + 5$, questi bambini partono da 2 per aggiungere 5 invece che porre l'addendo più grande come punto di partenza (Svenson e Broquist, 1975).

Un altro tipo di errore deriva dal fatto che anche le più semplici regole di accesso rapido, come $n \times 0 = 0$ oppure $n + 0 = n$, non sono interiorizzate abbastanza, per cui è possibile confondersi e procedere nell'applicazione di una diversa regola (ad esempio in $8 \times 0 = 8$ viene scambiata la regola del prodotto con quella dell'addizione; in $8 - 8 = 1$ non è applicata la procedura $n - n = 0$). Data l'incapacità di usufruire di tali regole di facilitazione, il sistema di memoria può iniziare a sovraccaricarsi di informazioni che invece potrebbero essere «sintetizzate». Questo implica un notevole dispendio di energie cognitive, soprattutto nel caso di compiti più complessi rispetto alle operazioni entro la decina.

Secondo Hitch (1978) la difficoltà nei calcoli orali può essere propriamente imputabile a un simile sovraccarico, e in particolare all'incapacità di tenere a mente i risultati parziali, una volta ottenuti: ad esempio di tenere a mente in quante parti è stato scomposto un fattore o addendo (ammesso che sia possibile usare la tecnica di scomposizione). D'altra parte, anche i calcoli scritti richiedono di saper operare tramite risultati intermedi rievocati al momento opportuno.

Riguardo alle specifiche difficoltà di calcolo dovute a scorrette applicazioni delle procedure, prendendo spunto da contributi di autori diversi è possibile delinearne un potenziale profilo. In particolare, si possono incontrare difficoltà:

a) nella scelta delle prime cose da fare per affrontare una delle quattro operazioni (incolonnamento o meno; posizione dei numeri, del segno di operazione e di altri segni grafici come la riga separatoria, ecc.);
b) nella sequenza procedurale da seguire per la specifica operazione e nel suo mantenimento fino a risoluzione ultimata;

c) nell'applicazione delle regole di prestito e riporto, in tutti i casi in cui è richiesta;
d) nel passaggio a una nuova operazione: il bambino applica procedure tipiche di un'operazione a un'altra;
e) nella progettazione e nella verifica. Spesso un bambino comincia immediatamente il processo di risoluzione senza analizzare dall'esterno l'operazione, individuando difficoltà e strategie da usare. Una volta ottenuto il risultato, è frequente che un bambino lo accetti come valido senza riflettere sull'operazione nella sua globalità. Anche in questo caso sono frequenti possibili errori di perseverazione.

Quando la difficoltà coinvolge principalmente la memoria di lavoro, l'obiettivo principale è di non sovraccaricarla (Butterworth, Cipollotti e Warrington, 1996): i risultati intermedi, ad esempio, possono essere scritti a parte, oppure può essere usato un supporto concreto (pallottoliere, oggetti, ecc.) per rappresentare gli operatori, per aiutare la scomposizione e procedere con una gradualità guidata. La modalità più semplice di scomposizione è quella che fa continuo riferimento al numero 10: il calcolo intermedio ha come risultato 10, e a questo viene aggiunto o tolto il resto della quantità.
È poi ben nota la difficoltà che molti studenti incontrano con la divisione, soprattutto quando il divisore ha più di una cifra. La procedura in questo caso è complessa e richiede alta padronanza del mondo dei numeri, ma anche possesso dei fatti numerici implicati nell'utilizzazione delle procedure. Qualora si tratti di una difficoltà a carico della memoria a lungo termine, bisogna vedere se il ragazzino è stato esposto a sufficienza al fatto che doveva memorizzare. Se lo era stato, può allora sussistere un deficit a carico della memoria fonologica (una delle ragioni per cui discalculia e dislessia possono presentarsi insieme) e l'imposizione di «apprendere a memoria» ha un limite al di là del quale è meglio non ostinarsi. Può essere d'aiuto invece il conteggio in avanti e indietro, che può sostituire agilmente i processi d'accesso diretto: se la persona impara a contare nelle basi da 2 a 9 possono essere risolti anche i problemi relativi alla moltiplicazione e divisione. Si potrebbe pensare di insegnare solo le tabelline di 1, 2 e 10 e poi indurre la inferenza dei risultati prossimi. Nel nostro testo *Memocalcolo* (Poli et al., 2006) abbiamo fornito un elenco dei fatti che il ragazzino fa più fatica a memorizzare e una serie di suggerimenti per acquisirli senza ricorrere alla memorizzazione meccanica.
I modelli più popolari che consentono di spiegare gli errori nel recupero di fatti numerici dalla memoria a lungo termine sono per lo più i «modelli a rete».
Secondo Ashcraft (1992) le conoscenze aritmetiche sono simili ad altre conoscenze elaborate dalla memoria a lungo termine, sia nella loro rappresentazione in memoria, sia nei processi usati per accedere alla conoscenza. I fatti aritmetici semplici sono rappresentati nella memoria in una rete organizzata di informazioni, le quali vengono recuperate attraverso un processo di attivazione che si diffonde, così come è assunto nel funzionamento della stessa memoria semantica. Nella rete ciascuna associazione tra un compito aritmetico e la sua risposta è rappresentata in termini di forza o grado di accessibilità. La forza con cui i nodi sono immagazzinati e interconnessi è funzione della frequenza di presentazione e dell'esercizio, specialmente nelle prime fasi dell'apprendimento.
Gli errori di recupero dei fatti aritmetici in memoria a lungo termine possono dunque dipendere da errate associazioni tra i compiti aritmetici e la loro specifica risposta.
Secondo Siegler (Siegler e Shrager, 1984) gli errori di recupero diretto dei risultati possono derivare dall'immagazzinamento degli stessi: la loro memorizzazione, infatti, si rafforza ogni volta che il soggetto produce una determinata risposta per l'operazione data, e ciò avviene anche se

la risposta è errata (Geary, 1990; 1993). Nelle ripetizioni successive dell'operazione, il recupero dello stesso risultato sarà coerente con la sua memorizzazione, anche quando vi è un'associazione errata tra l'operazione e il risultato scorretto.
Anche l'abilità visuo-spaziale ha un ruolo notevole nell'apprendimento matematico. Aspetti del calcolo che possono richiedere processi visuo-spaziali riguardano la rappresentazione della quantità, la linea dei numeri, l'uso appropriato delle dita della mano in casi di necessità, la percezione del valore posizionale del numero, l'incolonnamento, la corretta organizzazione spaziale degli elementi dell'operazione (collocazione degli operandi, posizionamento di riporto e prestito).
La difficoltà visuo-spaziale può dunque riguardare non soltanto aspetti percettivi ma diversi livelli di organizzazione dei dati implicati, soprattutto nella scrittura di un'operazione. Questa confusione spaziale è facilmente riconoscibile perché porta a far iniziare a caso un'operazione, a scrivere indifferentemente da sinistra a destra, o viceversa, i risultati parziali, quindi a sorvolare sulle regole di prestito e riporto. Al contrario, non coinvolge nella stessa misura i processi di calcolo orali (Badian, 1983).
Nella analisi dell'apprendimento delle abilità di calcolo e nella valutazione dei disturbi di calcolo può infine essere utile la distinzione fra accuratezza e velocità, rivelatasi critica nello studio dei disturbi dell'apprendimento (si veda il caso della lettura, in cui i parametri di accuratezza e rapidità sono fondamentali). L'accuratezza ci indica il grado di conoscenza del dominio da parte dello studente, la rapidità ci dice quanto tale conoscenza è stata automatizzata. Così come un lettore, anche se non commette molti errori, è in grave difficoltà se ha bisogno di un tempo doppio rispetto ai coetanei per leggere lo stesso materiale, similmente uno studente che esegue dei calcoli incontrerà grossi problemi se avrà bisogno di molto tempo per eseguire le operazioni richieste. In tal caso, probabilmente non riuscirà a portare a termine il compito; inoltre, lo sforzo implicato nel calcolo impedirà allo studente di avere tempo, tranquillità, risorse cognitive disponibili per effettuare altre operazioni mentali concomitanti, come può essere necessario per individuare le operazioni richieste nella soluzione di problemi aritmetici. È ovvio, d'altra parte, che uno studente veloce nel calcolo, se non è accurato, non può trarre beneficio dalla sua rapidità. Dal punto di vista educativo appare dunque importante assicurarsi prima che la competenza sia stata acquisita e poi preoccuparsi di velocizzarla. Si noti che, per quanto accuratezza e rapidità siano positivamente correlate, risultano separabili sia in base ai riscontri psicometrici su popolazioni normali, sia in base alle caratteristiche specifiche di studenti con disturbo del calcolo.

L'apprendimento di abilità di problem solving aritmetico

Una parte cospicua dei problemi matematici proposti a scuola si caratterizza per essere costituita da prove «routinarie» in cui la situazione problematica viene proposta verbalmente e la soluzione ai quesiti viene ottenuta tramite una serie di operazioni aritmetiche. Si parla di problemi di tipo «routinario» perché sono basati su situazioni tipiche, già incontrate in precedenza seppure con una diversa formulazione linguistica, che sottendono un medesimo schema risolutivo.
Per questi problemi secondo molti studiosi il processo di soluzione può essere suddiviso in un certo numero di stadi caratterizzati da un particolare tipo di conoscenza, generale e/o specifica, necessaria per pervenire alla soluzione. Secondo il modello di Mayer (Mayer, 1987; 1998; Mayer, Larkin e Kadane, 1984) il processo di soluzione ha inizio con la «codifica del problema» (che a

sua volta è suddivisa nei processi di: 1. traduzione e 2. integrazione) cui seguono i processi di pianificazione e calcolo. Durante il processo di traduzione, il bambino mette in atto un'attività di comprensione locale che viene poi arricchita dal processo d'integrazione, in cui il solutore cerca di mettere assieme in una rappresentazione coerente tutte le varie frasi del testo. In questa fase la conoscenza dello schema, o del tipo di problema, e la sua categorizzazione sono fondamentali e sono facilitati dalla familiarità con problemi simili. Mayer, Larkin e Kadane (1984) hanno riscontrato che i problemi con alta frequenza, in particolare quelli più usati nei principali libri di testo, sono più facili da rappresentare in memoria rispetto a quelli con bassa frequenza, probabilmente perché la familiarità aiuta a integrare meglio le informazioni.

Una volta compresa la situazione problematica, durante il processo di pianificazione il solutore deve ricercare la strada per la soluzione, aiutandosi con l'esperienza accumulata con situazioni simili. Secondo Mayer il processo di pianificazione richiede competenze specifiche necessarie per costruire e monitorare il piano di soluzione, riconoscendo quali operatori applicare e quando è il momento opportuno di utilizzarli (si veda Mayer, 1987). Per problemi con un minimo di complessità, il successo nella pianificazione richiede la capacità di generare dei sotto-obiettivi senza agire direttamente su di essi, e una efficiente memoria di lavoro con risorse sufficienti per poter mantenere attiva e facilmente disponibile la struttura delle mete da raggiungere.

Dopo la rappresentazione del problema in memoria e l'individuazione del piano di soluzione, ha luogo il processo di calcolo, in cui il solutore identifica quali sono le operazioni da utilizzare per ottenere i differenti sotto-obiettivi e le esegue correttamente. Abilità di pianificazione, monitoraggio e memoria di lavoro entrano in gioco pure in questa fase, anche al fine di controllare la scelta appropriata delle operazioni e il loro svolgimento nell'ordine corretto.

Numerose ricerche, anche in Italia, si sono occupate del peso che abilità cognitive generali (ad esempio, di comprensione, metacognizione e memoria di lavoro) possono avere sull'abilità di soluzione di problemi. Passolunghi (1999) e colleghi (Passolunghi, Lonciari e Cornoldi, 1996) hanno mostrato che individui abili nella risoluzione di problemi presentano buone abilità relative alla comprensione di un testo anche privo di riferimenti matematici e buone abilità di categorizzazione (per riconoscere a quale categoria può appartenere il problema).

Nello sviluppo della capacità di risoluzione dei problemi matematici entrano in gioco anche altre abilità dominio-generali, come la memoria di lavoro e la metacognizione. Passolunghi, Cornoldi e De Liberto (1999) hanno inoltre rilevato come, in compiti che valutano la memoria di lavoro, i solutori di problemi matematici non abili abbiano un ricordo più elevato di informazioni irrilevanti rispetto a quelle rilevanti. Questi studi mettono in risalto come il ruolo dei meccanismi di aggiornamento delle informazioni (*updating*) sia fondamentale nella soluzione dei problemi matematici. Durante un compito di problem solving la capacità di *updating* o «aggiornamento» entra in gioco sia nella comprensione sia nella soluzione di un problema: la rappresentazione della situazione è arricchita non appena una nuova informazione è elaborata; è possibile inoltre che una nuova informazione porti a riconsiderare quella precedente e, se necessario, a scartarla (meccanismi di attivazione e inibizione utili alla costruzione del modello mentale). Dalla ricerca condotta da Passolunghi e Pazzaglia (2005) è evidente come in compiti di *updating* gli alunni con disabilità matematica mostrino un minor numero di ricordi corretti e contemporaneamente commettano un maggior numero di errori di intrusione. La relazione fra comprensione del testo, aggiornamento di memoria di lavoro e capacità di soluzione di problemi è stata confermata anche da Cornoldi et al. (2012) sulla base dell'esame di un gruppo di bambini con una difficoltà specifica nella comprensione di testi scritti (ma con buone abilità di decodifica nella lettura). Per quanto si tratti di abilità di carattere generale, una componente specifica è rilevante, come illustrato da Pelegrina et al. (2014) che hanno osservato che bambini con problemi di comprensione falliscono maggiormente quando l'*updating* è basato su parole e bambini con difficoltà matematiche falliscono maggiormente quando l'*updating* è basato su numeri.

Abilità metacognitive e componenti emotive nel ragionamento matematico

Per avvenire correttamente, il processo di problem solving deve essere posto, per tutto il suo svolgimento, sotto un attento controllo da parte dell'individuo. Ann Brown (1978) ha descritto i processi metacognitivi di controllo che intervengono anche nella risoluzione di problemi matematici, i quali infatti sono risultati altamente correlati con il successo in matematica (Lucangeli e Cornoldi, 1997):

1. prevedere se si è in grado di risolverlo (previsione)
2. predisporre un progetto di soluzione (pianificazione)
3. tenere sotto controllo il processo risolutivo (monitoraggio)
4. valutare il risultato conseguito (valutazione).

Questi processi riguardano il funzionamento metacognitivo per la componente del controllo. In generale, molti studi hanno confermato lo stretto legame tra delle buone competenze metacognitive, sia per la componente del controllo sia per la componente della riflessione sulla propria mente, e la qualità dell'apprendimento matematico (per l'ambito italiano si veda Lucangeli, Cornoldi e Tellarini, 1997; Lucangeli e Cabrele, 2006).

L'aspetto della riflessione sulla mente (conoscenza metacognitiva) e delle credenze non-funzionali è stato studiato in Italia con riferimento all'apprendimento della matematica attraverso alcuni questionari (vedi anche il test MeMa, Caponi et al., 2012) che offrono una stima complessiva della capacità di riflettere sull'attività della mente durante lo svolgimento di compiti matematici, e si è visto che i bambini con le risposte più soddisfacenti sono anche quelli con maggiore successo in matematica (Lucangeli, Cornoldi e Tessari, 1991). Lucangeli, Cornoldi e Tellarini (1997) hanno compiuto un'analisi sistematica delle idee disadattive più frequentemente presenti nei bambini con difficoltà matematiche rispetto ai bambini senza difficoltà e si sono soffermati su alcune di esse (ad esempio, quelle per cui un problema o si risolve subito o non si risolve, che per la matematica bisogna essere portati, che i problemi più difficili sono quelli con i numeri grandi più ancora di quelli con processi di soluzione complessi) evidenziando l'importanza di modificarle.

Oggi molti studiosi includono nell'ambito metacognitivo anche elementi emotivi che hanno un rapporto con l'idea che il bambino ha del compito e con l'atteggiamento assunto nell'affrontarlo. In questo senso ha una componente metacognitiva anche l'ansia matematica, i cui effetti sul rendimento matematico sono stati ampiamente studiati (Ramirez et al., 2013; Vukovic et al., 2013; Dowker, Bennett e Smith, 2012; per una rassegna Mammarella, Caviola e Dowker, 2019). In particolare Passolunghi, Cargnelutti e Pellizzoni (2018) hanno mostrato che l'ansia matematica contribuisce significativamente a spiegare la capacità di soluzione dei problemi aritmetici anche dopo aver controllato le abilità cognitive di memoria di lavoro e di velocità di elaborazione.

Tra i fattori emotivo-motivazionali la rassegna di Passolunghi e Cornoldi (2019) mette in luce come anche l'autostima scolastica può essere associata ai risultati ottenuti in matematica (Levpušček, Zupančič e Sočan, 2013; Giofrè, Borella e Mammarella, 2017). Similmente la convinzione di poter raggiungere gli obiettivi desiderati, espressa nella percezione di autoefficacia (Bandura, 1986), risulta associata al rendimento matematico anche perché può aiutare a tenere sotto controllo l'effetto dell'ansia sulla prestazione (Jain e Dowson, 2009).

Sulla motivazione e l'interesse del bambino per la matematica possono inoltre incidere fattori ambientali e socio-culturali e apprendimento matematico, come già ricordavamo in precedenza relativamente alle acquisizioni prescolari dovute a stimolazioni formali e anche informali. Infatti, anche le attività numeriche informali risultano predire la conoscenza matematica e la fluenza aritmetica dei bambini nella scuola dell'infanzia e nel primo e secondo anno della scuola primaria (Dunbar et al., 2017; LeFevre et al., 2009). È probabilmente legato a queste variabili il fatto che lo stato socio-economico e il grado di istruzione dei genitori (Ramani e Siegler, 2014), e alcune caratteristiche genitoriali, quali l'atteggiamento nei confronti della matematica (LeFevre et al., 2010; Skwarchuk, 2009), l'eventuale ansia specifica per questa disciplina (Maloney et al., 2015), o le credenze relative alla matematica (Skwarchuk et al., 2014) — ad esempio, ritenere che per la matematica bisogna essere portati o che i maschi siano più bravi delle femmine in questa disciplina — pure predicono il successo in matematica durante la scuola primaria e anche dopo.

L'aspetto degli stereotipi di genere secondo cui i maschi sono più competenti delle femmine in matematica è stato in modo particolare studiato anche in Italia (si veda ad esempio Galdi, Cadinu e Tomasetto, 2014).

L'atteggiamento negativo nei confronti della matematica è risultato crescere con la scolarizzazione, e avere un brusco aumento nella scuola secondaria di primo grado, in molti Paesi del mondo anche a causa della maggiore complessità della disciplina e della maggiore sensibilità all'insuccesso (Dowker, 2019). Il peggioramento della situazione con la scolarizzazione non sembra tuttavia una condizione ineluttabile, se è vero che una ricerca finlandese (Sorvo et al., 2017) ha addirittura rilevato una riduzione del livello dell'ansia matematica dai primi agli ultimi anni della scuola primaria.