Quirino Alessandro Bortolato
(a cura di)

Larte de labbacho

Il primo libro a stampa di aritmetica al mondo

Con un commento di
Camillo Bortolato

Erickson

Pubblicato a Treviso nel 1478 in veneto tardo-medievale, *Larte de labbacho* è il primo libro di matematica a stampa apparso nel mondo e sarà poi la matrice di tutti i successivi manuali di didattica dell'aritmetica.

Viene qui proposto, per la prima volta, in traduzione italiana.

Come spiega il curatore nell'ampia e dettagliata introduzione, il testo tratta principalmente degli algoritmi di calcolo scritto (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) per la soluzione dei problemi commerciali.

La sua lettura è consigliata a tutti coloro — studenti, insegnanti e studiosi appassionati — che siano interessati a capire come la matematica veniva insegnata un tempo e come potrebbe essere insegnata oggi, in questo momento di disorientamento in materia di didattica.

Infatti, una rivisitazione del passato può offrire preziose opportunità di riflessione e di studio, per comprendere bene il presente e progettare in modo migliore il futuro.

con il patrocinio dell'Ateneo di Treviso

ATENEO DI TREVISO 1810

€ 23,00

9 788859 028673

www.erickson.it

Indice

Introduzione

Larte de labbacho, il primo manuale di aritmetica a stampa

«Incommincia una practica molto bona et utile: a ciaschaduno chi vuole uxare larte dela merchadantia. chiamata vulgarmente larte de labbacho».[1] Con queste parole in volgare si apre l'incunabolo universalmente noto come *Larte de labbacho,* considerato il più antico manuale di argomento matematico edito a stampa in Occidente, pubblicato a **Treviso** nel 1478.

Il testo, scritto da un autore ignoto, si presenta come una guida pratica a uso dei mercanti e si inserisce in un filone tipico del Medioevo, quello dei trattati d'abaco, fondati sull'aritmetica indo-araba, posizionale e in base dieci portata in Europa da Leonardo Fibonacci (Pisa, settembre 1170 circa-1250 circa) nel 1202 (Ulivi, 2011; Boncompagni, 1857, p. 1).[2]

---

1 Il testo trevigiano usa sempre il termine *labbacho.* Nella letteratura precedente il termine «abaco» si trova scritto indifferentemente con una sola b o con due b: nel testo di Fibonacci pubblicato dal Boncompagni (1857) si trova sia *abaci* (p. 1, p. 318 e p. 353) che *abbaci* (nel titolo, p. 2, e 2 volte a p. 5). In ogni caso, con la parola «abaco» non si deve intendere lo strumento di calcolo, ma il metodo di calcolo basato sul sistema numerico in base 10 indo-arabico, proprio come affermò G. Loria: «Il titolo dato da Leonardo Pisano [Fibonacci, nda] al suo *opus magnum* sembra dimostrare che sino dal secolo Dodicesimo il vocabolo "abbaco" aveva perduto il suo significato di strumento ausiliare nei calcoli numerici, per assumere quello di "aritmetica" e spesso quello più particolare di aritmetica basata sull'uso di cifre indo-arabiche» (Loria, 1929-1933).

2 La collocazione di uno dei più importanti esemplari del *Liber abaci* è: Biblioteca Nazionale Centrale, Firenze, Conv. Soppr. C.1.2616.

Prima di giungere in Italia, la matematica aveva fatto un lungo viaggio, assumendo forme di calcolo e caratteristiche diverse a seconda dei luoghi dove si era formata e passando da sistemi numerici basati su modelli di tipo additivo non posizionale a sistemi basati su modelli di tipo posizionale.

La rappresentazione di un numero richiede, infatti, un simbolo o, più in generale, la combinazione di più simboli diversi. La forma più semplice è quella che prevede un simbolo per rappresentare l'unità e la sua ripetizione (tante volte quante sono le unità contenute nel numero che si vuole rappresentare). Questa modalità ha però un inconveniente: non è funzionale alla rappresentazione dei numeri più grandi. Presso ogni civiltà si è quindi adottata una modalità di rappresentazione basata su combinazioni di simboli diversi o cifre, in cui il numero è posto in relazione con la base usata per la rappresentazione, che in genere risulta essere decimale.

Oltre alla base, un altro elemento fondamentale della rappresentazione è la regola dell'accostamento delle cifre, che determina come le diverse cifre concorrano effettivamente alla formazione del numero. Due, in questo caso, sono le regole che si sono affermate: la regola dell'additività, in cui il valore del numero è dato dalla somma dei valori di tutte le cifre che lo compongono, e la notazione posizionale, in cui la giustapposizione di due cifre successive corrisponde alla moltiplicazione della prima cifra per una potenza della base e all'addizione della seconda moltiplicata per una potenza della base con esponente diminuito di uno. La notazione posizionale richiedeva la nozione dello zero, che però fu una conquista molto tarda, avvenuta peraltro lontano dall'Europa.

Il viaggio millenario della matematica: dalle origini a Fibonacci

La matematica nel mondo mediterraneo

Già gli Egizi possedevano una matematica geroglifica, additiva, in base 10, priva dello 0, non posizionale. Le operazioni fondamentali erano: l'addizione, eseguita ordinando i geroglifici secondo valori crescenti; la sottrazione, eseguita «per completamento» (cioè ricercando la cifra mancante per giungere dal sottraendo al minuendo); la moltiplicazione, basata sul «metodo del raddoppio» (ovvero sulla sola moltiplicazione per 2 e l'addizione); e la divisione, concepita come operazione inversa della moltiplicazione, eseguita cercando un numero (o una somma di numeri) che fosse un multiplo del divisore. Le frazioni erano di tipo unitario, cioè con numeratore 1 e con denominatore un numero naturale non superiore a 1.000, ed erano usate per la costruzione del quoziente nella divisione.

Le equazioni erano risolte con il metodo della falsa posizione: trovato con un tentativo un valore e dimostrato che non poteva essere la soluzione, si procedeva con una proporzione.

Gli Egizi possedevano anche nozioni di geometria. Conoscevano le formule per il calcolo dell'area del triangolo isoscele e del parallelogramma, oltre che per l'area approssimata del cerchio. In stereometria sapevano usare la formula esatta per calcolare il volume della piramide.

Nel 3300 a. C., quasi contemporaneamente agli Egizi, gli astronomi della Mesopotamia usarono il primo sistema matematico posizionale della storia. Questa notazione posizionale era a doppia base (10 e 60) e senza lo zero (un simbolo per la posizione vuota comparve solo nel Quarto secolo a. C.). I Babilonesi erano in grado, inoltre, di risolvere equazioni anche di grado superiore al primo e di estrarre la radice quadrata di un numero.

Le notazioni numerali degli altri popoli antichi dell'area mediterranea, poco adatte all'esecuzione di calcoli di una certa complessità, hanno visto prevalere la scala decimale, basata sulle dita di due mani.

Gli abitanti della Fenicia, della Siria e della Palestina iniziarono ad associare alle posizioni delle lettere nell'alfabeto i corrispondenti numeri cardinali, un accorgimento senz'altro razionale, e tuttavia poco funzionale ai fini dell'esecuzione di calcoli tracciabili per via scritta (per ogni unità di ordine superiore si introduceva un nuovo simbolo, e il valore totale del numero si otteneva sommando i valori di tutti i simboli). L'adozione della scrittura nelle operazioni commerciali — bisogna ricordare che i Fenici furono anche gli inventori della scrittura alfabetica — garantiva di fatto un vantaggio nella stipulazione di contratti e nella rendicontazione dei ricavati, ma non consentiva l'esecuzione e il controllo dei calcoli.

Presso i Greci, per indicare i numeri, si sono usati fino al Quinto secolo a. C. i segni chiamati «erodianici» o «attici», che si servivano di sei iniziali dei nomi dei primi interi e di lettere, o loro combinazioni, per rappresentare numeri maggiori. La numerazione attica o erodianica si basava dunque su un sistema additivo non posizionale. Così come anche la successiva numerazione ionica o alfabetica, nella quale prevalse una notazione che si serviva delle 24 lettere dell'alfabeto e di quattro segni speciali (si trattava, in questo caso, di un simbolismo matematico del tutto conciso, che non risultava ancora, però, operativo).

La riflessione matematica vera e propria ebbe origine, in ogni caso, proprio nel mondo ellenico. Sembra che si debba a Talete di Mileto (624 a. C.?-546 a. C.?) la prima idea di numero come aggregato di unità (un'idea ripresa, quasi un millennio dopo, da Severino Boezio – 480?-526). Sempre al filosofo ionico risalgono presumibilmente alcuni teoremi elementari e la teoria delle proporzioni, contenuta nel V libro degli *Elementi* di Euclide di Alessandria (vissuto tra il Quarto e il Terzo sec. a. C.).

Della scuola ionica fece parte anche Anassagora di Clazomène (500 a. C.?-428 a. C.), al quale può essere ricondotta la prima applicazione del metodo di esaustione, che venne esposto più tardi nelle opere di Eudosso di Cnido (408 a. C.-355 a. C.) e di Archimede di Siracusa (287 a. C.-212 a. C.).

Un passo decisivo verso la costruzione della matematica, intesa come scienza razionale, fu poi compiuto grazie al contributo della scuola pitagorica, fondata da Pitagora di Samo (585 a. C.?-497 a. C.?) a Crotone.

Aristotele di Stagira (384 a. C.-322 a. C.) codificò a sua volta la logica formale e precisò la nozione di «scienza dimostrativa», alla quale per secoli si adeguarono le teorie matematiche.

I Romani, dal canto loro, usarono notazioni che si servivano di poche lettere maiuscole e dei principi di addizione e sottrazione: in un primo tempo si servirono di segni convenzionali, di origine etrusca, che solo successivamente vennero identificati con lettere dell'alfabeto.

Come la notazione dei Greci, anche la notazione romana, basata su un sistema non posizionale, era inadatta al calcolo; ciononostante, i numeri romani rimasero in uso in Europa, per la contabilità e per esprimere frazioni, fino al secolo Diciassettesimo, ben oltre quindi l'inizio della diffusione dei numeri indo-arabi.

Per ovviare alla difficoltà di eseguire calcoli per iscritto, venivano utilizzati diversi strumenti, il più antico dei quali era l'abaco. L'efficacia dell'abaco dipendeva dal fatto che un medesimo oggetto, o un medesimo simbolo, poteva assumere valori diversi quando occupava posizioni diverse (principio che sta alla base del sistema posizionale).

Un contributo decisivo dall'India (attraverso il mondo arabo)

Se si applica il principio posizionale a segni su carta, anziché ai sassolini che originariamente si trovavano nelle caselle dell'abaco, si ottiene il nostro moderno sistema di numerazione decimale (base 10, posizionale, ecc.), che dà la possibilità di ritracciare i calcoli eseguiti.

Le prime tracce storiche di questo sistema risalgono al Sesto secolo d. C. in India, ma la sua origine è sicuramente più remota, dal momento che già nella numerazione babilonese si trovavano elementi posizionali.

Il sistema completo — con l'uso del metodo posizionale, delle nove cifre e dello zero (che fu l'ultimo simbolo introdotto) — si trova nelle opere del matematico indiano Brahmagupta (598-668): il *Brahmasphuta Siddhānta* (628) costituisce la fonte più antica a noi nota che tratta lo zero come un numero a tutti gli effetti e che enuncia le regole dell'aritmetica dei numeri negativi.

Una trattazione rigorosa del nuovo sistema di numerazione e di calcolo risale al secolo Nono e si trova in un testo di Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850) dal titolo *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala,* pubblicato a Baghdad e introdotto in Europa dai mercanti. L'opera di ibn Mūsā al-Khwārizmī ci è pervenuta attraverso due traduzioni in latino: la prima, parziale, di Roberto di Chester del 1145 *(Liber algebrae et almucabala)* e la successiva, completa, di Gerardo da Cremona (1114-1187) *(Algoritmi de numero Indorum).* Il lavoro descrive il sistema indiano di valore dei numeri basato sulle nove cifre citate e contiene il primo uso dello zero nella notazione fondamentale delle posizioni. L'opera ebbe grande fama anche per via all'enunciazione «passo per passo» delle regole per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri scritti nella notazione in base decimale. Ad essa si deve di fatto la diffusione del sistema di numerazione indo-arabico nel Vicino e Medio Oriente attraverso la Via della Seta e, successivamente, in Europa. L'approccio sistematico e logico nella risoluzione delle equazioni lineari e di secondo grado diede forma alla disciplina dell'*algebra* (in arabo *al-jabr*).

I numeri indo-arabi erano comparsi in Europa già nel Decimo secolo in Spagna, e sono contenuti nel *Codex Vigilanus* o *Codex Albeldensis,* redatto dal copista Vigila. Intorno al 980, un ecclesiastico francese, Gerbert d'Aurillac (940-950?-1003), che sarebbe poi diventato Papa Silvestro II (999-1003), studiò matematica e astronomia in Spagna e presentò l'utilizzo dei numeri mediante un abaco adattato secondo i suoi suggerimenti.

Il grande traghettatore: Leonardo Fibonacci

Il principale artefice dell'introduzione dei numeri indo-arabi nel nostro continente fu però senz'altro Leonardo Fibonacci (Leonardo Bigollo o Leonardo Pisano, 1180?-1250?), il cui *Liber abaci* uscì per la prima volta nel 1202, e poi nel 1228 (solo questa seconda stesura ci è pervenuta).

Leonardo Fibonacci è riconosciuto come il maggior esponente della matematica medievale in Europa: oltre al *Liber abaci,* scrisse anche *Practica Geometriae*, *Liber quadratorum*, *Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad geometriam, vel ad utrumque pertinentium, De modo solvendi quaestiones avium et similium,* un commento sul decimo libro degli *Elementi* di Euclide e un lavoro intitolato *Libro di merchatanti detto di minor guisa,* che è andato perduto.[3]

Le cifre indo-arabe si diffusero rapidamente nell'Europa medievale anche grazie ad altri autori operanti tra il Tredicesimo e il Quattordicesimo secolo: Alexandre de Villedieu (Alexander de Villa Dei, 1175?-1240?), autore del *Carmen de algorismo,* John of Halifax detto Sacrobosco (1195?-1256), autore dell'*Algorismus vulgaris,* Jordanus Nemorarius o Jordanus de Nemore o Giordano di Nemi (1225-1260), autore del *De elementis arismetice artis* e del *De numeris datis,* e Johannes de Lineriis, autore dell'*Algorismus de minutiis* (1340 circa) (Ambrosetti, 2008; Picutti, 1977; Bagni, 1996; 1998).

[3] Sembra, tuttavia, che il primo a usare in Italia il sistema di numerazione indo-arabico nei suoi documenti sia stato il notaio Raniero di Perugia, attivo dal 1184 al 1211: egli usò tali numeri per numerare le righe di testo ancor prima che Leonardo Fibonacci pubblicasse il suo *Liber abaci*. Lavorò soprattutto per l'Abbazia di Santa Maria di Valdiponte, in località Montelabate di Perugia, dove è conservata quasi tutta la sua produzione (Bartoli Langeli, 1989). Bartolomeo Veratti (1809-1889) avverte che «non è poi da confondere la quistione sopra l'introduzione dell'aritmetica araba o indiana, con quella intorno all'uso delle cifre; e ben potrebbe essere che di molto più antiche di Leonardo fossero queste. Ed invero non pare negabile a M. Chasles e ad altri eruditi francesi, trovarsi segni molto analoghi alle cifre moderne in alcuni Codici di Boezio; ed anche che quelle cifre erano adoprate ad uso di calcolo nell'*Arco* appellato Pitagorico» (Veratti, 1860, p. 35).

Larte de labbacho

Treviso, 1478

Traduzione dal volgare trevigiano

Se tu vuoli prouare: brãcha la pruoua de tute do le poste ionte dicendo.5.e.6.fa.i i.caua.9.roman .2.poi di.2.e.3.fa.5.e.2.fa.7.ecco la proua: la q̃le scriui per mezo de la somma fuora de la riga.poi guarda se la proua de la somma vien a esser.7.di cendo.6.e.i.fa.7.sichе la sta bene

Se tu hauessi de iongere lire.9 i 6 ß.i 4.com lire.i 9 4 5 ß.i 5.metti le toe poste ĩ forma cusi

	lire	i	9	4	5	ß	i	5	
	lire		9	i	6	ß	i	4	
Somma.	lire	2	8	6	2	ß		9	0

poi iongi primo li numeri di soldi.e di.4.e.5.fa.9. scriui sotto doue le nascuto.poi toli le dexene di sol di de le quale die guardare:iõte che sarano:sel suo nũero e par o dispar.che se sara nñero dispar tu de sciuer.i.li sotto doue le dexene sarano nascute.del resto torai la mita:e sarano lire. Se tal numero de quelle dexene sara par:tuoli da botto la mita.e sarano lire:le quale portarai a la prima figura de le lire.e fara la toa somma. Iongi adõcha le dexe- ne:e di.i.e.i.fa.2.la mita de.2 e.i.che vna lira.el qual.i.iongi a le lire.e di.i.e.6.fa.7.e.5.fa.i 2.scri ui.2.e tien.i.poi iongi quel.i.con laltro.i.e di.i.e.i. fa.2.e.4.fa.6.scriui quel.6.doue nascuto.poi di.9 e.9.fa.i8.scriui.8.e tien.i.poi iongi quello cõ lal- tro.i.e di.i.e.i.fa.2.scriuilo nel suo luogo.e monta la somma lire 2 8 6 2 ß 9

Se tu volissi pruouare questa somma:tuoli la pro

Se tu vuoi eseguire la prova del 9, prendi la prova di tutte e due le poste congiuntamente dicendo 5 e 6 fa 11, sottrai 9, rimane 2, poi di': 2 e 3 fa 5 e 2 fa 7. Ecco la prova, che scrivi vicino alla somma fuori della riga, poi guarda se la prova della somma viene ad essere 7 dicendo 6 e 1 fa 7, sicché la ragione sta bene. [6*r*]

[Addizione di due numeri con quattro e tre cifre espressi in lire e soldi con la prova del 9]

Se tu avessi da addizionare lire 916 ꝥ 14 con lire 1945 ꝥ 15, metti le tue poste in forma così:

	lire 1945	ꝥ 15	
	lire 916	ꝥ 14	
Somma	lire 2862	ꝥ 9	0

Poi come prima azione addiziona i numeri dei soldi e di': 4 e 5 fa 9, e scrivilo sotto dove si è formato, poi prendi le decine di soldi delle quali devi guardare, quando saranno sommate, se il loro numero è pari o dispari. Se sarà numero dispari tu devi scrivere 1 lì sotto dove le decine si saranno formate, del resto prenderai la metà: e saranno lire. Se tale numero di quelle decine sarà pari, prendi subito la metà e saranno lire, che sommerai con la prima cifra delle lire, e sarà la tua somma. Aggiungi dunque le decine e di': 1 e 1 fa 2, la metà di 2 è 1 che è una lira che aggiungi alle lire e di': 1 e 6 fa 7 e 5 fa 12, scrivi 2 e tieni 1, poi addiziona quell'1 con l'altro 1 e di': 1 e 1 fa 2 e 4 fa 6, scrivi quel 6 dove è nato, poi di': 9 e 9 fa 18, scrivi 8 e tieni 1, poi aggiungi quello con l'altro 1 e di': 1 e 1 fa 2, scrivilo nel suo luogo, e la somma ammonta a lire 2862 ꝥ 9.

Se tu volessi fare la prova di questa somma, prima prendi la prova

na de le lire:la quale tu die moltiplicare per la pro
ua de.2 0.che.2.de la quale moltiplicatione tolta
la soa pruoua:iongi la pruoua di soldi.Or commin-
cia e di.1.e.4.fa.5.e.5.fa.10.butando via la.0.ro-
man.1.poi di.1.e.1.fa.2.e.6.fa.8.che la pruoua de
le lire.poi moltiplica quel.8. cõ la pruoua de.2 0
che.2.e di.2.fia.8.16.caua.9.roman.7.el qual.7.
iongi con la pruoua de li soldi.e di.7.e.1.fa.8.e.5.
fa.13.caua.9.roman.4.poi di.4.e.1.fa.5.e.4.fa.9.
che.0.la pruoua roman.0.la quale tu die scriuere
per mezo la somma drieto la riga.poi guarda se
la pruoua de la somma vien in.0.e di.2.e.8.fa.10
bouta via la.0.roman.1.e.6.fa.7.e.2.fa.9.che.0.
poi moltiplica la.0.con la pruoua de.2 0.dicendo
.2.fia.0.fa.0.e li soldi sono.9.che ancha.0.siche la
raxon sta bene

Se tu hauessi de iongere lire 8 9 2 ß 1 5 e
p̃ 7 con lire 9 5 6 2 ß 1 9 p̃ 1 1 metti le
toe poste in forma cosi

	lire	9 5 6 2	ß	1 9	p̃	1 1	
	lire	8 9 2	ß	1 5	p̃	7	
Somma	lire	1 0 4 5 5	ß	1 5	p̃	6	6

Iongi primo tuti li pizoli ĩ vna somma.e di.7.e.1.
fa.8.e quella dexena e.1 0.che fa.1 8.e per che p
ogne.1 2.che se truoua ne la somma di pizoli:te
nasce.1.soldo:tu die guardare in.1 8.quanti soldi
sono nascudi dicẽdo.el.1 2.in.1 8.se truoua vna
volta:che releua.1.soldo.e viene auãzare.6.pizoli

delle lire, la quale tu devi moltiplicare per la prova di 20 che è 2; dopo questa moltiplicazione, fai la sua prova e aggiungi la prova dei soldi. Ora comincia e di': 1 e 4 fa 5 e 5 fa 10, buttando via lo 0 rimane 1, poi di': 1 e 1 fa 2 e 6 fa 8, che è la prova delle lire; poi moltiplica quell'8 con la prova di 20 che è 2, e di': 2 per 8 fa 16, sottrai 9 e rimane 7, che aggiungi con la prova dei soldi, e di': 7 e 1 fa 8 e 5 fa 13, sottrai 9 e rimane 4, poi di': 4 e 1 fa 5 e 4 fa 9 che è 0: la prova rimane 0, che tu devi scrivere vicino alla somma dietro la riga. Poi guarda se la prova della somma risulta 0, e di': 2 e 8 fa 10, butta via lo 0 e rimane 1 che con 6 fa 7 e 2 fa 9, che è 0; poi moltiplica lo 0 con la prova di 20 dicendo 2 per 0 fa 0 e i soldi sono 9, che pure è 0, e così la ragione sta bene. [6*v*]

[**Addizione di due numeri espressi in lire, soldi e piccoli con la prova del 9**]

Se tu avessi da addizionare lire 892 þ 15 p 7 con lire 9562 þ 19 p 11, metti le tue poste in forma così:

	lire	9562	þ	19	p	11	
	lire	892	þ	15	p	7	
Somma	lire	10455	þ	5	p	6	0

Addiziona per primi tutti i piccoli in una somma, e di': 7 e 1 fa 8 e quella decina è 10 che fa 18; se per ogni 12 che si trova nella somma dei piccoli ti nasce 1 soldo, tu devi guardare in 18 quanti soldi sono risultati dicendo che il 12 in 18 si trova una volta: questo significa che è 1 soldo e vengono avanzati 6 piccoli,

li quali scriui sotto li nũeri de li pizoli:e porta quel
.1.a li numeri di soldi.e di.1.e.5.fa.6.e.9.fa.15.scri
ui.5.e tien.1.poi iongi quel.1.ale dexene di soldi.e
di.1.e.1.fa.2.e.1.fa.3.del qual.3.ꝑche le nũero dis-
par:scriui.1.sotto quelle dexene:e roman.2.poi di
la mita de.2.e.1.che vna lira.el qual.1.porta a li
numeri de le lire.e di.1.e.2.fa.3.e.2.fa.5.scriui q̃lo
.5.doue nascuto.poi di.9.e.6.fa.15.scriui.5.e tiene
.1.poi di.1.e.8.fa.9.e.5.fa.14.scriui.4.e tien.1.poi
iongi quel.1.cõ quel.9.e di.1.e.9.fa.10.scriui.0.sot
to.9.e.1.verso la man zãcha.et e fatta la soma che
monta lire 1 0 4 5 5 ß 1 5 p̃ 6
E se tu la volessi ꝓuare:tuoza la pruoua de le lire
dicẽdo.5.e.6.fa.11.e.2.fa.13.caua.9.roman.4.
poi di.4.e.8.fa.12.e.2.fa.14.caua.9.roman
.5.poi moltiplica quel.5.per laproua de.20.che
.2.e di.2.fia.5.fa.10.che.1.poi iongi quelo.1.a la
proua de li soldi.e di.1.e.1.fa.2.e.1.fa.3.e.5.fa.8.
poi moltiplica quel.8.per la proua de.12.che:3.
e di.3.fia.8.fa.24.el qual.24.reduto a le soe vni
tade:vien a esser.6.dicendo.2.e.4.fa.6.poi iongi
quel.6.a la proua di pizoli dicendo.6.e.1.fa.7.e.1.
fa.8.e.7.fa.15.caua.9.roman.6.che la proua de
le poste ionte ĩsieme.el qual.6.metterai ꝑ mezo la
somma fuoza de la riga.poi tu guardarai se la ꝓ-
de la somma ven in.6 dicendo 1 e 4 fa 5 e 5 fa
.10.e.5.fa.15.caua.9.roman.6.poi moltiplica
quelo.6.per la pruoua de.20.che.2.e di.2.
fia.6.fa.12.caua.9.roman.3.el qual.3.ion-
gi a li soldi dicendo.3.e.1.fa.4.e.5.fa.9.che
.0.poi moltiplica qnella.0.pez la pruoa de.12.
che.3.dicendo.3.fia.0.fa.0.roman la proua

che scrivi sotto i numeri dei piccoli; porta quell'1 ai numeri dei soldi e di': [7*r*] 1 e 5 fa 6 e 9 fa 15, scrivi 5 e tieni 1, poi aggiungi quell'1 alle decine di soldi e di' 1 e 1 fa 2 e 1 fa 3; di questo 3, perché è numero dispari, scrivi 1 sotto quelle decine, e rimane 2, poi di': la metà di 2 è 1, che è una lira, e questo 1 portalo ai numeri delle lire, e di': 1 e 2 fa 3 e 2 fa 5, scrivi questo 5 dove è risultato, e poi di': 9 e 6 fa 15, scrivi 5 e tieni 1, poi di': 1 e 8 fa 9 e 5 fa 14, scrivi 4 e tieni 1, poi aggiungi quell'1 con quel 9 e di': 1 e 9 fa 10 scrivi 0 sotto 9 e 1 verso la tua sinistra, ed è fatta la somma, che ammonta a lire 10455 þ 15 p 6.

E se tu volessi farne la prova, prendi la prova delle lire dicendo 5 e 6 fa 11 e 2 fa 13, sottrai 9 e rimane 4, poi di': 4 e 8 fa 12 e 2 fa 14, sottrai 9 e rimane 5, poi moltiplica quel 5 per la prova di 20 che è 2 e di': 2 per 5 fa 10 che è 1, poi aggiungi quell'1 alla prova dei soldi e di': 1 e 1 fa 2 e 1 fa 3 e 5 fa 8, poi moltiplica quell'8 per la prova di 12 che è 3, e di': 3 per 8 fa 24, il quale 24, ridotto alle sue unità, risulta essere 6, dicendo 2 e 4 fa 6, e poi aggiungi quel 6 alla prova dei piccoli dicendo 6 e 1 fa 7 e 1 fa 8 e 7 fa 15, sottrai 9 e rimane 6, che è la prova delle due poste congiunte insieme; metterai questo 6 vicino alla somma fuori della riga. Infine controllerai se la prova della somma viene 6, dicendo 1 e 4 fa 5 e 5 fa 10 e 5 fa 15, sottrai 9 e rimane 6, poi moltiplica quel 6 per la prova di 20 che è 2 e di': 2 per 6 fa 12, sottrai 9 e rimane 3, che aggiungi ai soldi dicendo 3 e 1 fa 4 e 5 fa 9 che è 0, poi moltiplica quello 0 per la prova di 12 che è 3 dicendo 3 per 0 fa 0; rimane la sola prova de la somma. 6 .per quel. 6 .de li pizoli . si che la raxone sta bene

Intēdi anchora el modo de iongere ducati grossi e pizoli a oro. Per intendimento de la qual cosa: sapi che sono pizoli. 3 2 .per grosso.e grossi. 2 4 . per ducato Jonti adōcha li pizoli insieme per fare grossi:partirai tuti li pizoli per .3 2 .e lauanzo roman pizoli:i quali scriuerai sotto li pizoli. poi ionti li grossi nascuti de li pizoli con li altri grossi p fare ducati:partirai tuti queli grossi per. 2 4 .e lauāzo roman grossi:li quali tu die scriuere sotto la posta di grossi:e li ducati nascuti de li grossi:iongera cō le poste di ducati:et andera da longo iongādo verso la man zancha.

Se tu hauessi de iongere queste poste zoe

	ducati	2 1 6 9 g̃ 2 3 p̃ 3 1
	ducati	1 9 0 2 g̃ 1 6 p̃ 2 3
Sōma	ducati	4 0 7 2 g̃ 1 6 p̃ 2 2 | 6

comincia iongere li pizoli insieme dicendo.3.e.1.fa .4.per numero simplice.poi iongi le dexene e di.2 e.3.fa.5.che val.5 0.col.4.preditto : fa.5 4.e pche el.32.se truoua nel.5 4.vna volta:nasce grosso.1. et auanza.22.che romane pizoli.22.de scriuere sotto li pizoli.e quel grosso nascuto de li pizoli . tu die iongere a li numeri di grossi dicendo .1.e.6.fa .7.e.3.fa.1 0.che.0.per numero.e quello.1.del.1 0. ionzi a le dexene dicendo.1.e.1.fa.2. e.2.fa.4.el quale.4.representato nel luogo suo con la.0.lieua .4 0.che sono grossi.4 0.de partire per.2 4.che se truoua in.4 0.vna volta.nasce ducato.1.et auāza grossi.1 6.li q̃li tu de scriuer sotto le poste di grossi della somma 6 per quel 6 dei piccoli, cosicché la ragione sta bene. [7*v*]

[Addizione di due numeri espressi in ducati, grossi e piccoli con la prova del 9]

Dopo questo esempio, comprendi ora il modo di addizionare ducati, grossi e piccoli a oro. Per la comprensione di questa nuova situazione sappi che ci sono 32 piccoli per ogni grosso e 24 grossi per ogni ducato.[8]

Addizionati dunque i piccoli insieme per fare grossi, dividerai tutti i piccoli per 32 e il resto rimane piccoli, che scriverai sotto i piccoli; poi, addizionati i grossi ottenuti dai piccoli con gli altri grossi per fare ducati, dividerai tutti quei grossi per 24 e il resto rimane grossi, che tu devi scrivere sotto la posta dei grossi, e i ducati che sono risultati dai grossi saranno aggiunti con le poste dei ducati; e andranno aggiunti verso la tua sinistra.

Se tu avessi da addizionare queste poste, cioè:

	ducati 2169	g 23	p 31	
	ducati 1902	g 16	p 23	
Somma	ducati 4072	g 16	p 22	6

Comincia ad aggiungere i piccoli insieme dicendo 3 e 1 fa 4 per numero semplice e poi aggiungi le decine e di': 2 e 3 fa 5 che valgono 50, e con il 4 predetto fa 54, e poiché il 32 si trova nel 54 una volta nasce grosso 1 e avanza 22, perciò rimangono 22 piccoli, da scrivere sotto la posta dei piccoli; quel grosso ottenuto dai piccoli tu lo devi aggiungere ai numeri dei grossi dicendo 1 e 6 fa 7 e 3 fa 10 che è 0 per numero e quell'1 del 10 lo aggiungi alle decine dicendo 1 e 1 fa 2 e 2 fa 4, il quale 4 rappresentato nel luogo suo con lo 0 comporta 40, che sono grossi 40 da dividere per 24: il 24 si trova in 40 una volta, nasce ducato 1 e avanza grossi 16, che tu devi scrivere sotto le poste dei grossi, poi iongera quel ducato nascuto di grossi con li numeri di grossi dicendo.1.e.2.fa.3.e.9.fa.12.scriui .2.e tien.1.poi di.1.e.6.fa.7.scriui quel.7.doue nascuto.poi iongi quel.9. a quelo.1.dicendo.1.e.9.fa .10.scriui.0.e tien.1.el qual.1.iongera con laltro.1. e fara.2.e.2.fa.4.scriui.4.e monta la tua somma

ducati 4072. g̃. 16. p̃ .22.

Poi ꝓua se la sta bene.togliãdo la ꝓua de li ducati iõcti dicẽdo.2.e.1.fa.3.e.6.fa.9.che.0.poi di.1. e .2.fa.3.che la proua di ducati ionti.el qual.3.moltiplica per la proua de.24.che.6.dicendo.3.fia.6. fa.18.reduto a le suo vnitade dicendo.1.e.8.fa.9. che.0.poi tuoli la proua di grossi dicẽdo.2.e.3.fa .5.e.1.fa.6.e.6.fa.12.caua.9.roman. 3.el qual.3. moltiplica con la proua del.32.che.5.e di.3.fia.5. fa.15.caua.9.roman.6.el qual.6.iongera a li pizoli dicendo.6.e.3.fa.9.che.0.e procedendo oltra di .1.e.2.fa.3.e.3.fa.6.la proua de le poste ionte fa .6.el qual.6.scriui drieto la riga per mezo la somma.poi guarda se la proua de la somma vien in.6 dicendo.4.e.7.fa.11.caua.9. roman .2.e.2.fa .4. el qual.4.moltiplicara per la pruoua de.24.che .6.dicendo.4.fia.6.fa.24.reduto a le soe vnitade dicendo.2.e.4.fa.6.che la proua:de iongere con li grossi dicendo 6.e.1.fa.7.e.6.fa.13.caua.9.ro. .4.poi motiplica quel.4.per la proua de.32.che .5.dicendo.4.fia.5.fa.20.del qual la soa pruoua e .2.la qual tu die iongere con li pizoli dicendo.2.e .2.fa.4.e.2.fa.6.che la proua.e sta bene.e ꝑ questo modo farai altre simile raxone.

poi aggiungerai quel ducato nato dalla somma dei grossi con i numeri dei ducati dicendo 1 e 2 fa 3 e 9 fa 12, scrivi 2 e tieni 1, poi di': 1 e 6 fa 7, scrivi quel 7 dove è nato, poi aggiungi quel 9 a quell'1 dicendo 1 e 9 fa 10, scrivi 0 e tieni 1, che aggiungerai con l'altro 1 e farà 2 e 2 fa 4, scrivi 4, e la tua somma ammonta a ducati 4072 g 16 p 22. [8*r*]

Poi prova se il calcolo è stato condotto a termine bene, considerando la prova dei ducati presi insieme, dicendo 2 e 1 fa 3 e 6 fa 9 che è 0, poi di': 1 e 2 fa 3 che è la prova di tutti i ducati insieme; moltiplica questo 3 per la prova di 24 che è 6 dicendo 3 per 6 fa 18 che, ridotto alle sue unità dicendo 1 e 8 fa 9, vale 0; poi esegui la prova dei grossi dicendo 2 e 3 fa 5 e 1 fa 6 e 6 fa 12, sottrai 9 e rimane 3, il quale 3 tu moltiplichi con la prova del 32 che è 5 e di': 3 per 5 fa 15, sottrai 9 rimane 6, che aggiungerai ai piccoli dicendo 6 e 3 fa 9 che è 0 e, procedendo oltre, di': 1 e 2 fa 3 e 3 fa 6. La prova di tutte le poste congiunte fa 6, che tu scrivi dietro la riga vicino alla somma, e poi verifica se la prova della somma viene 6 dicendo 4 e 7 fa 11, sottrai 9, rimane 2 e 2 fa 4; questo 4 lo moltiplicherai per la prova di 24 che è 6 dicendo 4 per 6 fa 24 che, ridotto alle sue unità dicendo 2 e 4 fa 6, è la prova da aggiungere con i grossi dicendo 6 e 1 fa 7 e 6 fa 13, sottrai 9, rimane 4, poi moltiplica quel 4 per la prova di 32 che è 5 dicendo 4 per 5 fa 20, la prova del quale è 2, che tu devi aggiungere con i piccoli dicendo 2 e 2 fa 4 e 2 fa 6 che è la prova e sta bene, e in questo modo eseguirai altre simili ragioni.