Impariamo l'aritmetica con il Gioco dell'uguale

Attività ludiche per sviluppare il concetto di uguaglianza nella scuola primaria

Andrea Maffia e Eleonora Pellegrini

MATERIALI
DIDATTICA

Erickson

IL LIBRO

IMPARIAMO L'ARITMETICA CON IL GIOCO DELL'UGUALE

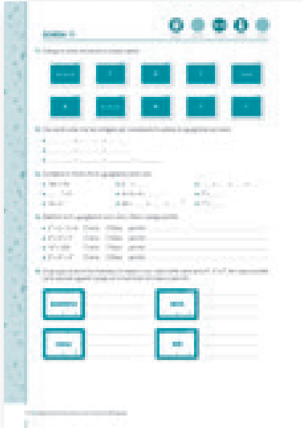
Il simbolo di uguaglianza, per quanto possa apparire semplice nel suo significato e applicazione, non sempre risulta banale da comprendere per chi è ancora immerso nel processo di apprendimento della matematica. La sua mancata (o errata) interpretazione emerge in maniera prepotente durante gli ultimi anni della scuola primaria e nel passaggio alla secondaria di primo grado, momento in cui gli alunni si trovano per la prima volta a dover affrontare le equazioni. Risulta quindi di fondamentale importanza attuare un intervento precoce, così da evitare o, quanto meno, limitare l'insorgere di difficoltà severe.

> Il «Gioco dell'uguale» è un gioco di confutazione/conferma di uguaglianze che ben si presta a essere introdotto sin dall'inizio della primaria ed essere modulato e proposto nei cicli scolastici successivi.

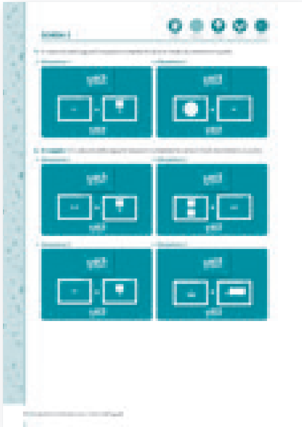
Attraverso un percorso ludico-didattico strutturato sull'utilizzo di 7 mazzi di carte differenti (mazzo 100, mazzo 100+, mazzo Proprietà, mazzo Espressioni, mazzo Decimali, mazzo Frazioni, mazzo Potenze), l'alunno avrà la possibilità di:

- acquisire un corretto utilizzo del simbolo di uguaglianza (=) e comprenderne le proprietà;
- potenziare le abilità di calcolo mentale sviluppando le strategie più opportune;
- riflettere sulle proprietà delle operazioni;
- comprendere il significato delle espressioni numeriche e delle convenzioni che stanno alla base della loro scrittura e della loro interpretazione;
- sviluppare capacità strategiche in un contesto ludico.

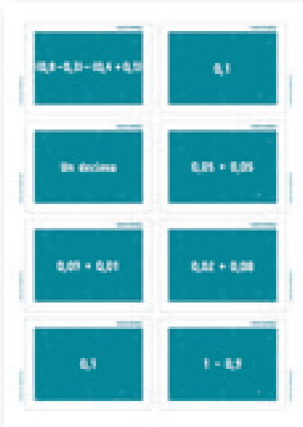
Spiegazione pratica dell'utilizzo dei mazzi di carte



Scheda con attività da svolgere singolarmente



Scheda con attività da svolgere in coppia o in piccoli gruppi



Carte del mazzo Decimali

GLI AUTORI

ANDREA MAFFIA

PhD in didattica della matematica, è ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Già insegnante di matematica nella scuola secondaria di primo grado, si occupa dello studio dei processi di apprendimento, soprattutto in ambito aritmetico e algebrico, da un punto di vista semiotico.

ELEONORA PELLEGRINI

Dal 2005 collabora con le più importanti case editrici italiane ed è autrice di testi di matematica per Rizzoli Education. Dal 2016 insegna nella scuola secondaria di primo grado, sviluppando percorsi didattici originali che diano la possibilità a ogni studente di fare matematica in modo attivo.

€ 23,00
libro + schede indivisibili
9 788859 027843
www.erickson.it

INDICE

Introduzione

Il simbolo di uguaglianza

Il simbolo di uguaglianza è usato in modo pervasivo in tutta la matematica, a livello scolastico ma non solo. Si tratta di un simbolo che indica una relazione e viene infatti utilizzato tanto per impostare le equazioni che permettono di risolvere i problemi (ovvero per esplicitare le relazioni tra le variabili e le incognite del problema), quanto per definire equazioni che rappresentano curve sul piano cartesiano e/o funzioni (pensiamo per esempio alla classica equazione della retta $y = mx + q$).

In termini tecnici, possiamo dire che il simbolo di uguaglianza viene generalmente utilizzato per indicare relazioni di equivalenza. Si tratta di relazioni definite da tre particolari proprietà: riflessività, simmetria e transitività. Per esemplificare il significato di queste tre proprietà ricorreremo all'uso dell'uguale per indicare l'equivalenza tra due espressioni aritmetiche.

Diciamo che l'uguaglianza è *riflessiva* per dire che ogni numero è uguale a se stesso. In maniera apparentemente banale possiamo dire che 8 = 8, ma anche che 4 + 5 = 4 + 5. Chiamiamo invece una relazione *simmetrica* quando i due membri (ciò che sta a destra e ciò che sta a sinistra del simbolo) possono essere invertiti mantenendo vera la relazione. Ad esempio, è vero che 5 + 6 = 10 + 1 e quindi è anche vero che 10 + 1 = 5 + 6. Ancora, così come diciamo che 8 + 4 = 12, possiamo anche scrivere 12 = 8 + 4 e abbiamo ancora un'affermazione vera. Infine, diremo che una relazione è *transitiva* quando, nel caso in cui un elemento sia in relazione con due altri elementi, allora anche questi due elementi sono in relazione tra loro. Per capirci, sappiamo che 3 + 4 = 7 e che anche 7 = 5 + 2, da questo ricaviamo senza dubbio che 3 + 4 = 5 + 2. Sfruttiamo questa proprietà quando scriviamo catene di uguaglianze come 8 + 2 = 7 + 3 = 10 = 4 + 6 in cui intendiamo dire che ciascuno dei numeri rappresentati prima o dopo uno di quei simboli di uguaglianza è uguale a tutti gli altri numeri nella catena.

Sebbene queste proprietà siano poche e apparentemente semplici da enunciare, non sempre sono altrettanto banali da comprendere per chi è ancora immerso nel processo di apprendimento della matematica, ad esempio gli alunni del primo ciclo d'istruzione. Da ormai più di 40 anni, i ricercatori in didattica della matematica di tutto il mondo stanno studiando il modo in cui la comprensione di questo simbolo evolve nel corso del processo di apprendimento, mettendo in luce numerose difficoltà che i bambini e i ragazzi possono incontrare.

Difficoltà nell'apprendimento dell'uguaglianza

Il problema dell'interpretazione del simbolo di uguaglianza da parte degli studenti è stato affrontato sin dalla fine degli anni Settanta del secolo scorso; ne sono un esempio le pubblicazioni di svariati ricercatori a livello internazionale, quali Merlyn Behr, Gerard Vergnaud e molti altri (Behr, 1980; Byers e Herscovics, 1977; Vergnaud et al., 1979).

Uno dei lavori più influenti è stato sicuramente quello di Carolyn Kieran (1981) che presentò sulla nota rivista scientifica «Educational Studies in Mathematics» una rassegna di come questo simbolo fosse utilizzato dagli allievi nei diversi livelli scolastici, a partire dalla scuola dell'infanzia fino all'insegnamento universitario. In estrema sintesi, l'autrice classifica due differenti tipologie di interpretazione del simbolo:

1. il simbolo di uguaglianza è inteso come un operatore, ovvero un segno che indica che si deve fare qualcosa, svolgere un calcolo. Scritture errate del tipo $3 + 2 = 5 + 4 = 9$ sono tipiche manifestazioni di questa concezione del simbolo di uguaglianza;
2. il simbolo di uguaglianza è inteso come simbolo di un'equivalenza. Il riconoscimento della verità di uguaglianze del tipo $3 + 4 = 6 + 1$ è indice di questo tipo di interpretazione del simbolo.

L'autrice sostiene che il primo tipo di interpretazione sia legato alla necessità di «chiudere» l'operazione, ovvero all'incapacità di gestire termini che non siano stati ancora calcolati. Kieran, inoltre, nota che evidenze del secondo tipo di interpretazione sono estremamente rare prima dei 13 anni di età. Questa osservazione non deve spingerci a pensare che quindi non sia possibile maturare la visione dell'uguaglianza come equivalenza prima della fine della scuola secondaria di primo grado. Tutt'altro. Il lavoro di Kieran ha mostrato quanto le pratiche didattiche più diffuse non permettessero lo sviluppo di quella visione. Vari gruppi di ricerca sparsi in tutto il globo hanno iniziato a studiare come l'introduzione delle operazioni aritmetiche potesse essere cambiata al fine di aiutare gli studenti a sviluppare una corretta visione del simbolo di uguaglianza. Parleremo degli studi che hanno ottenuto ampio successo nella prossima sezione. Qui di seguito commentiamo invece uno studio statunitense che ci permette di osservare quanto le difficoltà nell'interpretazione del simbolo di uguaglianza non possano risolversi semplicemente con la crescita dello studente, ma richiedano uno specifico intervento didattico.

Nel 1999 Karen Falkner, Linda Levi e Thomas Carpenter pubblicarono un articolo dal titolo *Children's Understanding of Equality* in cui presentavano uno studio longitudinale sull'interpretazione del simbolo di uguaglianza. Chiesero a numerosi studenti di scuola primaria (dalla classe prima alla classe sesta, dato che la scuola primaria statunitense dura un anno in più di quella italiana) di completare correttamente l'uguaglianza $8 + 4 = \square + 5$.

Si invita il lettore, prima di proseguire oltre, a immaginare quali siano state le risposte date più frequentemente dagli studenti. I risultati del gruppo statunitense confermano quello che era già stato rilevato da Kieran e dagli altri prima di lei: la maggior parte degli studenti risponde indicando 12 o 17 quali numeri da inserire al posto del quadratino. Stanno quindi interpretando il simbolo di uguaglianza come indicazione per la somma dei soli numeri che si trovano alla sua sinistra, o addirittura per tutti i numeri presenti nell'uguaglianza. In aggiunta a questo, Falkner e colleghi mostrano che non ci sono sostanziali differenze nei risultati ottenuti nei diversi anni della scuola primaria, così come mostrato nella tabella 1.

TABELLA 1
Children's Understanding of Equality
(*Falkner, Levi e Carpenter, 1999*)

	Risposta fornita			
Classi	**7**	**12**	**17**	**Sia 12, sia 17**
Prime e seconde	6%	69%	15%	10%
Terze e quarte	10%	53%	27%	11%
Quinte e seste	2%	75%	21%	2%

Nonostante gli studenti degli ultimi anni di scuola primaria avessero più conoscenze riguardo alle operazioni aritmetiche, questo non li ha aiutati a scegliere più frequentemente la risposta corretta, anzi: la percentuale di studenti che sceglie 12 come risposta è maggiore negli ultimi due anni rispetto agli anni precedenti. Non dobbiamo pensare che i risultati sarebbero stati diversi se la rilevazione fosse stata fatta nel nostro Paese. Rosetta Zan mostra, attraverso uno studio di caso, quanto i bambini italiani resistano a una visione di uguaglianza che sia diversa rispetto al considerare tale simbolo «come un operaio, come un uomo che fa tutte le azioni della matematica perché lui dà il risultato» (Zan, 2007, p. 81).

Marta Molina e Rebecca Ambrose (2008) hanno portato avanti gli studi sull'interpretazione del simbolo di uguaglianza notando uno stadio intermedio rispetto ai due indicati da Kieran. Ottengono così un modello di sviluppo in tre stadi:

1. **Uguale come stimolo per una risposta.** Si riferisce all'interpretazione procedurale, con una lettura unidirezionale da sinistra a destra (la relazione non è quindi riflessiva). Il simbolo viene interpretato come comando per dare la risposta a un calcolo.
2. **Uguale come espressione di azione.** Si riferisce ancora a un'interpretazione procedurale ma bidirezionale (relazione riflessiva). Hanno questa concezione gli studenti che riescono a rispondere correttamente in completamenti del tipo __ = 8 + 4, ma forniscono 12 come riposta per 8 + 4 = __ + 5.
3. **Uguale come espressione di equivalenza.** Si tratta dell'interpretazione relazionale, ovvero della corretta identificazione della relazione simmetrica, riflessiva e transitiva.

Le autrici dello studio citato fanno inoltre notare che l'evoluzione non è lineare per tutti gli studenti. Alcuni saltano il secondo stadio; altri sono «instabili», nel senso che mostrano concezioni diverse a seconda della particolare uguaglianza che stanno analizzando. Inoltre, appare lecito pensare che questo percorso possa dipendere fortemente dall'insegnamento: si potrebbero riscontrare profonde differenze variando il contesto culturale.

Classificazioni analoghe sono state fatte da vari altri gruppi di ricerca sia in ambito della ricerca in didattica della matematica (si vedano ad esempio i risultati del gruppo di Carpenter e colleghi, 2003), sia nell'ambito della psicologia educativa (sono celebri i lavori di Nicole McNeil, 2014, e del gruppo di Bethany Rittle-Johnson, 2011). Queste classificazioni vogliono servire a indirizzare nella creazione di traiettorie di apprendimento. Lo scopo è quello di lavorare sul simbolo di uguaglianza in modo coerente a quello che è l'uso che se ne fa in contesto algebrico; per questo vari autori propongono di lavorare su consegne quali il completamento uguaglianze differenti, oppure la discussione collettiva di uguaglianze vere o false.

Imparare a interpretare il simbolo di uguaglianza

La ricerca svolta negli ultimi due decenni ha dato forti evidenze del fatto che le principali cause della scorretta interpretazione del simbolo di uguaglianza sono in larga misura didattiche, dipendono cioè dal modo in cui l'aritmetica viene insegnata (McNeil, 2008). I bambini sono esposti in modo continuo, a partire dal primo anno di scolarizzazione, a scritture del tipo $a + b = c$ in cui il simbolo di uguaglianza è sempre preceduto da un'operazione (sia essa un'addizione, una sottrazione, una moltiplicazione o una divisione) e sempre seguito da un unico numero, il risultato. I bambini, in modo più o meno consapevole, identificano ed estraggono questa regolarità e costruiscono rappresentazioni prototipiche delle operazioni nella loro memoria a lungo termine. In alcune occasioni queste rappresentazioni potrebbero portare benefici, ma rischiano di divenire talmente rigide (McNeil, 2014) da risultare poi difficilmente modificabili con gli apprendimenti successivi.

Vari gruppi di ricerca in didattica della matematica si sono occupati di progettare e sperimentare consegne volte a promuovere una visione relazionale del simbolo di uguaglianza sin dai primissimi anni di scuola. L'assunto di questi ricercatori è che una prima consapevolezza delle relazioni tra i numeri e le operazioni sia la chiave per il successivo apprendimento dell'algebra. Per questo, l'insieme di ricerche che persegue questa finalità prende il nome di *Early Algebra*. L'obiettivo di queste ricerche non è certo un'introduzione precoce del formalismo algebrico, ma piuttosto quello di riuscire a notare il carattere «algebrico» dell'aritmetica. Dicono Carpenter e colleghi: «il pensiero relazionale coinvolge le proprietà fondamentali dei numeri e delle operazioni nella trasformazione di espressioni matematiche invece che calcolare la risposta seguendo una sequenza prescritta di procedure. Questo implica un certo livello di consapevolezza delle proprietà, ma non necessariamente una comprensione completa di esse o la conoscenza delle definizioni formali» (2005, p. 54). Il lavoro sul simbolo di uguaglianza (fondamentale nell'impostare e risolvere equazioni) è un classico esempio. Cosa significa trasformare espressioni matematiche senza calcolare? Consideriamo la seguente uguaglianza:

$$87 + 54 = 84 + 57$$

Possiamo notare che ai due membri dell'uguaglianza troviamo somme che coinvolgono numeri formati dalle stesse decine, ma con unità scambiate. Dato che scrivere 87 è un modo compatto per indicare la somma di 8 decine e 7 unità, così come 54 sta a indicare il numero composto da 5 decine e 4 unità, è la stessa proprietà associativa della somma a garantire la veridicità di questa uguaglianza, senza bisogno di eseguire calcoli.

In un suo articolo, John Mason (2018) — noto esperto di didattica della matematica — dice che riconoscere che $87 + 54 = 84 + 57$ senza svolgere calcoli contribuisce al pensiero algebrico e ne è parte. Sostiene che è fondamentale che gli studenti affrontino questo tipo di consegne sin dall'inizio della scolarizzazione (e aggiunge, provocatoriamente, anche prima).

La lista di consegne che la ricerca identifica come adatte per lavorare sull'interpretazione del simbolo di uguaglianza è ben lunga. Possiamo identificare due macrocategorie: la prima relativa alla *confutazione* (o conferma) *di uguaglianze*, la seconda rappresentata dai *completamenti di uguaglianze*. Qui sotto (figura 1) sono elencati vari esempi. Si invita il lettore a stabilire quali delle uguaglianze nella prima colonna sono vere e quali false, e a completare le uguaglianze della seconda colonna stabilendo quale numero debba prendere il posto del quadratino perché l'uguaglianza sia vera.

Confutazione/conferma di uguaglianze *(esempi tratti da Carpenter et al., 2003)*	**Completamento di uguaglianze** *(esempi tratti da Stephen, 2006, e da Stephen e Wang, 2008)*
$3 = 12 - 9$	$23 + 15 = 26 + \square$
$15 = 34 - 19$	$73 + 49 = 72 + \square$
$24 + 47 = 47 + 24$	$\square + 17 = 15 + 24$
$58 + 76 = 354$	$39 - 15 = 41 - \square$
$27 + 48 - 48 = 27$	$99 - \square = 90 - 59$
$345 + 568 - 568 = 353$	$104 - 45 = \square - 46$
$48 + 63 - 62 = 49$	$746 - 262 + \square = 747$
$674 + 56 - 59 = 671$	$746 + \square - 262 = 747$
$4 \times 6 = 12 + 12$	$\square \times 5 = 20 \times 15$
$3 \times 8 = 2 \times 8 + 8$	$21 \div 56 = \square \div 8$

Fig. 1 Confutazione di uguaglianze e completamento di uguaglianze.

Ognuna di queste uguaglianze può essere completata eseguendo calcoli. Per esempio, per stabilire se sia vero che $4 \times 6 = 12 + 12$ posso calcolare separatamente 4×6 e $12 + 12$ per poi notare che entrambe le operazioni danno lo stesso risultato. Oppure, potrei notare che 12 è il doppio di 6 e che quindi fare 12 + 12 significa fare il doppio del doppio di 6, il che equivale a moltiplicare il numero 6 per 4 volte. Ancora, potrei scoprire quale numero manca per completare l'uguaglianza $73 + 49 = 72 + \square$, calcolando la somma 73 + 49 per poi sottrarre 72 dal numero ottenuto. Oppure, potrei notare che la differenza tra 73 e 72 è soltanto 1, quindi per mantenere invariata la somma complessiva, a 72 dovrò aggiungere un numero che sia 1 in più di 49, ovvero 50. In questo modo posso completare l'uguaglianza senza aver bisogno di sapere quale sia il totale della somma 73 + 49. Secondo Mason e colleghi (2009) queste modalità di operare con i numeri sono il primo passo fondamentale verso la generalizzazione di relazioni tra i numeri e le operazioni. Queste relazioni generali potranno poi essere applicate a un'infinità di altri casi numerici e diverranno fondamenta solide su cui fondare la futura didattica dell'algebra.

Numerose ricerche (si veda il testo di Carpenter et al., 2003) testimoniano come questo tipo di strategie relazionali possano essere messe in atto anche spontaneamente dagli studenti della scuola del primo ciclo quando vengono loro proposte consegne adeguate. A livello italiano questi risultati sono stati confermati e sviluppati dal progetto di ricerca denominato *ArAl,* un progetto di larga diffusione e lunga durata (Malara e Navarra, 2003). Molti insegnanti continuano tutt'oggi a proporre esempi di buone pratiche per aiutare gli studenti a sviluppare una visione relazionale dell'uguaglianza. Per esempio, il lettore può provare a cercare in rete gli esempi raccolti in occasione dell'Equal-Day, celebrato su vari social network nel giorno 11 novembre.

Questo libro fornisce ai docenti del primo ciclo l'opportunità di lavorare con i propri alunni su questi importanti aspetti dell'aritmetica all'interno di un contesto ludico. Il «Gioco dell'uguale», presentato nelle prossime pagine, è un gioco di confutazione/conferma di uguaglianze le cui carte sono pensate per poterlo introdurre sin dall'inizio della primaria, per poi fornire nel tempo (a seconda delle carte utilizzate) contesti adatti ad apprendere nuove operazioni e nuove proprietà. Ciascuno dei prossimi capitoli presenta diverse schede che permettono di realizzare attività didattiche su vari contenuti dell'aritmetica. Le tipologie di attività proposte nelle diverse schede sono presentate nel prossimo capitolo.

Il Gioco dell'uguale

Dal punto di vista del docente che lo propone ai suoi alunni, il Gioco dell'uguale ha lo scopo di promuovere una corretta visione del simbolo di uguaglianza. La centralità di questo simbolo nel gioco è evidente già dalla plancia di gioco, che lo riporta al centro. Ai due lati del simbolo di uguaglianza, sono rappresentate due caselle vuote che serviranno a ospitare le carte che ciascuno dei giocatori, a turno, calerà sulla plancia.

Per l'alunno che gioca, l'obiettivo è quello di calare carte che rendano vera l'uguaglianza quando vuole ottenere punti per se stesso, che la falsifichino quando vorrà impedire all'avversario di guadagnare punti. Alle regole del gioco di base, descritte nella sezione che segue, si aggiungono poi alcune varianti alle regole, che saranno utili in alcuni dei capitoli a seguire. Tra le varianti, vi è anche la possibilità di usare l'altro lato della plancia di gioco. Il gioco cambia molto anche a seconda del mazzo utilizzato.

Le regole del gioco

Nel Gioco dell'uguale si affrontano due avversari che possono essere due alunni o due squadre di alunni. Per iniziare, occorre che ciascuno degli avversari si trovi a uno dei due lati opposti di un tavolo su cui viene disposta la plancia di gioco. Si deve poi scegliere con quale mazzo sarà giocata la partita. Per la descrizione dei mazzi si rimanda alla fine di questo capitolo.

Inizio del gioco

All’inizio del gioco ciascun avversario pesca una carta dal mazzo. Inizierà il primo turno di gioco colui o colei che pesca la carta che rappresenta il numero maggiore (eventualmente calcolato come risultato dell’operazione indicata). Se le due carte pescate rappresentano lo stesso numero, allora entrambi gli avversari pescano un’altra carta e si confrontano queste nuove carte. Una volta stabilito chi inizierà il gioco, si mettono di nuovo tutte le carte pescate nel mazzo e lo si mescola. Si distribuiscono quattro carte a ciascun giocatore e si poggia il resto del mazzo di fianco alla plancia.

Svolgimento

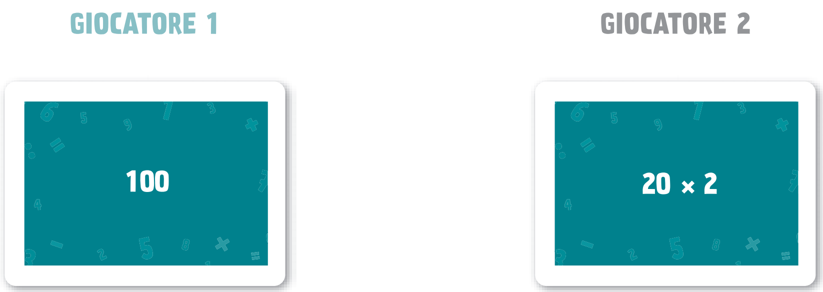
Il giocatore che inizia prende una carta dalla propria mano e la poggia sulla plancia di gioco in uno dei due spazi ai lati dell’uguale. Pesca quindi una carta dal mazzo e passa il turno all’avversario. Se l’avversario ha in mano una carta che rende vera l’uguaglianza, può calarla e guadagnare così un punto. Se non ha una carta adatta, può scegliere una carta dalla propria mano e scartarla per poi pescare una nuova carta dal mazzo. A questo punto il turno torna al giocatore che ha iniziato che può provare a completare l’uguaglianza mettendo sulla plancia una carta dalla sua mano che la renda vera. Se riesce, ottiene un punto e pesca una carta, altrimenti dovrà scartare una carta, pescarne un’altra e passare di nuovo il turno all’avversario. Il giocatore che completa in modo scorretto l’uguaglianza regala un punto all’avversario. Quando un giocatore ottiene un punto lo registra (ad esempio sulla linea dei numeri, come mostrato di seguito), poi si rimuovono dal gioco le due carte sulla plancia e la partita prosegue. I due giocatori si alternano nel posizionare la prima carta sulla plancia quando è vuota.

Fine del gioco

Il gioco termina quando un giocatore, mettendo giù una carta o scartandola, rimane con tre carte in mano e il mazzo è vuoto. A questo punto del gioco si contano i punti ottenuti da ciascuno dei due avversari e vince chi ha ottenuto il punteggio più alto.

Esempio di partita

Simuliamo una partita tra due giocatori che utilizzano il primo mazzo (che sarà chiamato in seguito «Mazzo 100»). In questo esempio, i giocatori tengono traccia dei punti muovendo delle pedine su una linea dei numeri; il giocatore 1 usa la pedina blu mentre il giocatore 2 usa la pedina grigia. All’inizio del gioco, entrambi i giocatori pescano una carta dal mazzo per stabilire chi inizierà il primo turno di gioco.

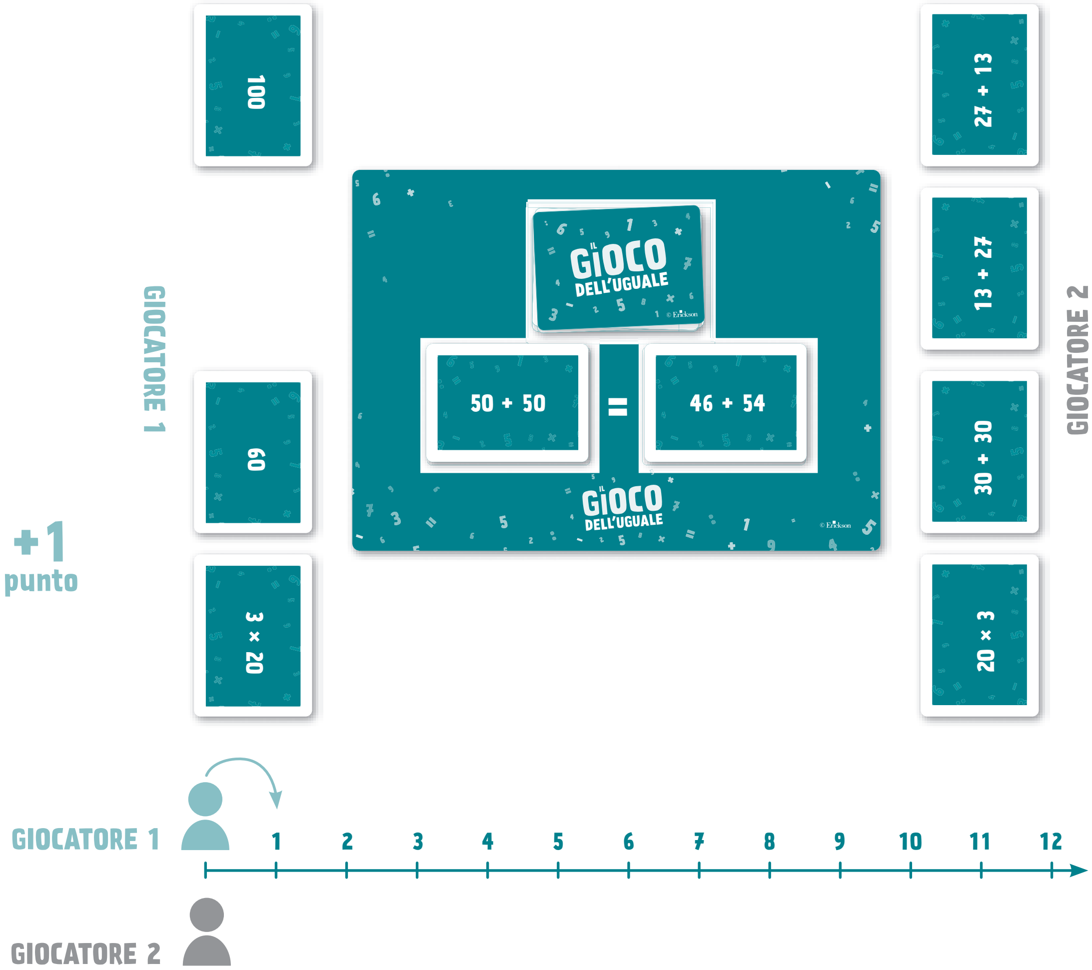


Il giocatore 1 ha pescato una carta che rappresenta il numero 100, il giocatore 2 ha invece pescato una carta che rappresenta il numero 40. Inizierà quindi il giocatore 1 dato che 100 è maggiore di 40. Le due carte pescate vengono messe nuovamente nel mazzo che viene quindi mescolato. Si distribuiscono quattro carte a ciascuno dei giocatori che avrà cura di non mostrare le proprie carte all'avversario.

Inizia il giocatore 1 che sceglie una tra le carte che ha in mano e la posiziona sulla plancia. Pesca poi una nuova carta dal mazzo. Nell'immagine di seguito il giocatore 1 ha giocato la carta con su scritto «50 + 50» e ha pescato dal mazzo una carta con scritto «100». Il turno passa al giocatore 2 che deve cercare, tra le carte che ha in mano, una carta che possa rendere vera l'uguaglianza.

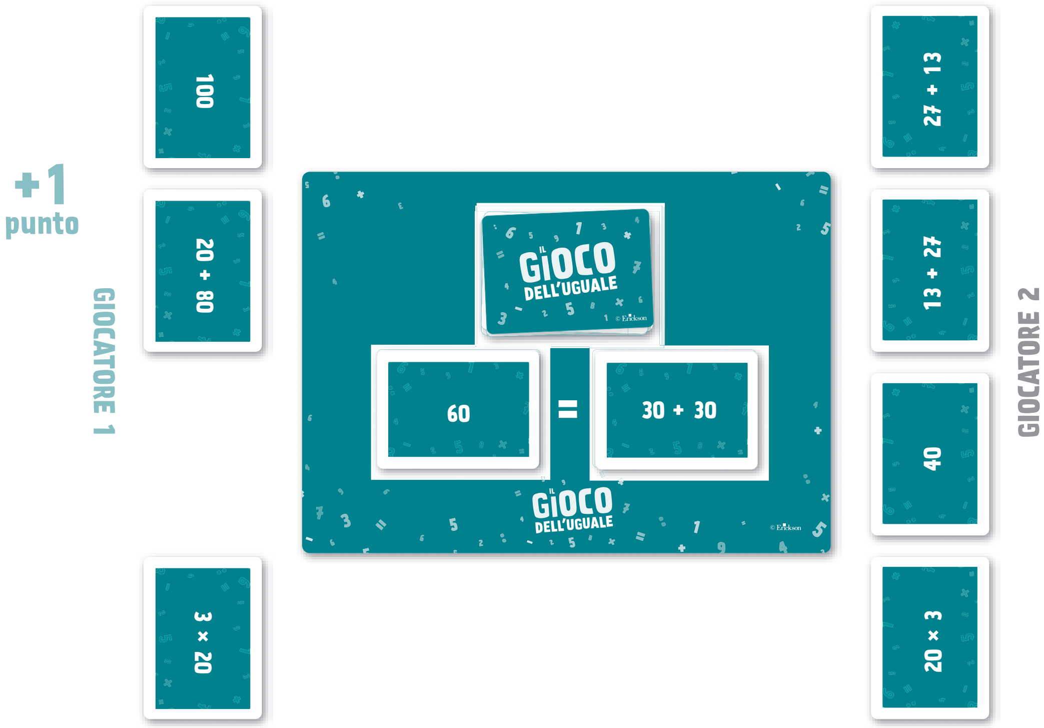
In questo esempio, il giocatore 2 non ha nessuna carta in mano che possa rendere vera l'uguaglianza. Si trova quindi costretto a scegliere una carta da scartare per poi pescarne una nuova. Nell'immagine di seguito, il giocatore 2 ha scartato la carta con scritto «40» e ne ha pescata una con scritto «20 × 3». Deve adesso passare il turno all'avversario.

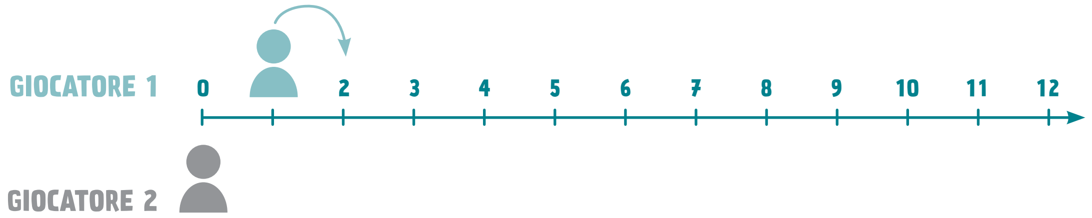
Il giocatore 1 ha adesso la possibilità di ottenere un punto posizionando sulla plancia una carta che renda vera l'uguaglianza. Nell'immagine qui sotto, il giocatore 1 completa correttamente l'uguaglianza ponendo sulla plancia la carta con scritto «46 + 54». Ottiene quindi un punto e le due carte sulla plancia (quelle con scritto «50 + 50» e «46 + 54») sono poi rimosse dal gioco.



A questo punto il giocatore 1 pesca un'altra carta e stavolta è il giocatore 2 a scegliere, tra quelle che ha in mano, una carta da mettere sulla plancia rimasta vuota. Pesca poi un'altra carta e passa il turno all'avversario.

Il giocatore 1 può ora scegliere una carta che renda vera l'uguaglianza. Nell'immagine sotto il giocatore 1 posiziona sulla plancia la carta con scritto «60», ma avrebbe anche potuto scegliere quella con scritto «3 × 20». Guadagna in questo modo un punto, dovrà poi pescare una carta.





In questo momento il giocatore 1 ha 2 punti mentre il giocatore 2 non ne ha. Le carte sulla plancia sono rimosse dal gioco e starà al giocatore 1 scegliere quale carta posizionare sulla plancia vuota.

Il gioco prosegue in questo modo finché il mazzo contiene carte da pescare così da non rimanere mai con meno di quattro carte in mano.

Varianti alle regole

Le regole presentate precedentemente costituiscono la base del gioco; è consigliabile presentare per la prima volta il gioco con tali regole. Tuttavia, diverse finalità didattiche possono essere meglio raggiunte attraverso piccole variazioni. Di seguito elenchiamo le variazioni che saranno sfruttate nelle schede presenti in questo libro; le schede in cui è usata una variante sono indicate dall'icona corrispondente. Gli alunni potrebbero proporre altre varianti che l'insegnante potrebbe decidere di integrare a seconda dei propri obiettivi.

Carte speciali

Non appena gli studenti avranno compreso le regole di base del gioco, si possono introdurre in maniera graduale le carte speciali. Dato che queste carte rendono il gioco più interessante, aumentando la motivazione degli studenti, può essere importante proporle prima che le partite diventino troppo ripetitive.

Le carte speciali introducono però un certo numero di regole nuove ed è quindi importante essere sicuri che gli alunni abbiano compreso le regole di base prima di inserire queste carte nel mazzo. Le schede proposte nei prossimi capitoli forniscono alcuni suggerimenti sui momenti in cui possono essere presentate.

Ci sono due tipi di carte speciali: le carte con fondo scuro e quelle con sfondo chiaro. Le carte speciali con fondo scuro possono essere inserite in qualsiasi mazzo: vengono giocate al posto di una normale carta e, dopo averle giocate, si pesca una carta in modo da avere sempre quattro carte in mano. Ce ne sono quattro tipi diversi.

Gioca ancora
Calando questa carta, il giocatore può pescare una carta dal mazzo e poi effettuare un altro turno.

Vedo
Il giocatore che cala questa carta ha 10 secondi di tempo per guardare le carte che il suo avversario ha in mano. Quando questa carta viene inserita nel mazzo, può essere utile procurarsi un cronometro.

Scarta una carta
Quando cala questa carta, il giocatore dichiara il valore di una carta che un suo avversario dovrà scartare. Se l'avversario ha almeno una carta di quel valore, dovrà scartarla e pescare una nuova carta dal mazzo; altrimenti il gioco prosegue normalmente.

Spia il mazzo
Il giocatore che cala questa carta può guardare le prime due carte che si trovano in cima al mazzo, sceglie poi quale delle due tenere e quale scartare. Passa poi il turno all'avversario.

Le carte speciali a fondo chiaro possono essere giocate insieme a un'altra carta che non sia una carta speciale, alterandola. Quando un giocatore posiziona sulla plancia una carta insieme a una carta con fondo chiaro, dovrà poi pescare due carte dal mazzo alla fine del proprio turno. La carta con fondo chiaro **+1 Punto** può essere inserita in qualsiasi mazzo e permette di ottenere un punto aggiuntivo se giocata insieme a una carta che permette di ottenere un punto, ad esempio se giocata insieme a una carta che completa correttamente un'uguaglianza.

Altre carte a fondo chiaro sono contenute in specifici mazzi e saranno pertanto descritte nelle sezioni relative ai singoli mazzi. Quando si introduce una carta speciale (a fondo chiaro o scuro) in un mazzo, si introducono tutte le copie disponibili di quella carta.

La dichiarazione

Scopo di questa variante è quello di stimolare gli studenti a elaborare strategie sia per validare un'uguaglianza, sia per confutarla. In questa variante del gioco, il primo giocatore mette una carta sulla plancia di gioco e il secondo giocatore può rispondere con la carta che preferisce. Quando il secondo giocatore cala la carta, deve dichiarare se l'uguaglianza ottenuta sarà vera oppure falsa. Se la sua dichiarazione è corretta, allora guadagna un punto, altrimenti nessun giocatore guadagna punti. Le carte che compongono l'uguaglianza (vera o falsa che sia) sono rimosse dal gioco e sarà poi il secondo giocatore a mettere una carta sulla plancia vuota.

Questa variante del gioco lo rende generalmente più veloce e promuove strategie rapide per la verifica/confutazione di uguaglianze.

L'arbitro

In questa variante del gioco è necessario il coinvolgimento di almeno tre alunni per ogni partita: oltre ai due (o più, nel caso della prossima variante) avversari, sarà presente anche un arbitro (o più di uno). Scopo dell'arbitro è verificare la correttezza dell'attribuzione dei punteggi (e quindi delle uguaglianze che vengono a formarsi nel corso del gioco) oltre a tener traccia della partita. Questa variante del gioco può essere applicata sia al gioco base, sia alle diverse varianti.

Per tener traccia della partita, l'arbitro dovrà riportare su un foglio tutte le uguaglianze che vengono a formarsi indicando di volta in volta se si tratta di uguaglianze vere o false. Nell'immagine di seguito sono mostrati esempi di uguaglianze (o disuguaglianze) che possono formarsi nel corso di una partita insieme a diversi modi per annotarne la verità/falsità.

$$300 + 60 \overset{V}{=} 100 + 100 + 160 \qquad 15 \times 4 + 15 \times 4 = 10 \times 12$$

$$10 \times 9 \times 4 \overset{F}{=} 5 \times 9 \times 10 \qquad 2 \times 15 \times 3 \times 4 \neq 9 \times 12 + 12$$

$$5 \times 3 \times 3 \times 10 = 15 \times 30$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 10 < 5 \times 9 \times 10$$

Per tener traccia della partita in modo ordinato, l'arbitro può servirsi di un tabellone dei punteggi come quello mostrato nell'ultima pagina di questo libro. Il tabellone dei punteggi costituisce uno strumento utile allo svolgimento della partita, ma anche materiale prezioso dal punto di vista didattico, perché permette all'insegnante di impostare successive discussioni con gli studenti, volte al consolidamento delle competenze matematiche sviluppate attraverso il gioco.

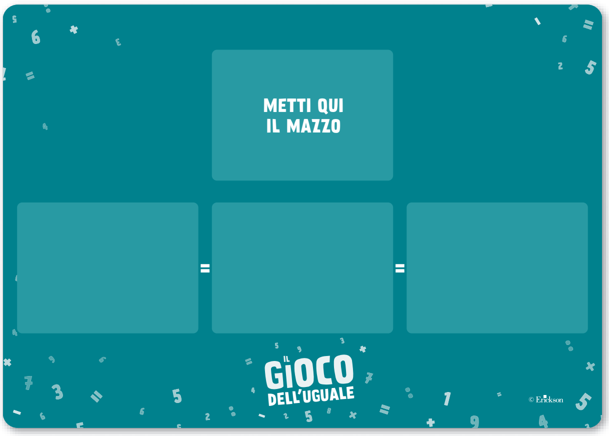
Dopo aver compilato l'intestazione della tabella, l'arbitro indica il nome dei giocatori in testa alle ultime due colonne. Nella seconda colonna scriverà l'uguaglianza e indicherà se è vera o falsa, riportando la giustificazione fornita e validata dai giocatori. Nelle ultime colonne verranno riportati i punti conseguiti da ciascun giocatore a ogni mano.

Se l'insegnante svolge il ruolo dell'arbitro, oppure quando gli alunni hanno raggiunto sufficiente esperienza, l'arbitro può anche attribuire un punto extra al giocatore che riesce a riconoscere la verità/falsità di un'uguaglianza senza calcolare il risultato delle due operazioni ai lati, ma sfruttando una proprietà delle operazioni. Questo tipo di strategia sarà promosso soprattutto nel capitolo relativo alle proprietà.

L'altro lato della plancia

Questa variante del gioco prevede di utilizzare il lato della plancia in cui ci sono tre spazi per le carte e due simboli di uguaglianza. In questa variante del gioco si sfidano tre giocatori e riceve un punto colui che riesce a completare una concatenazione di uguaglianze corretta. In ogni turno di gioco ogni giocatore dovrà sempre calare almeno una carta; se una delle tre non è uguale alle altre due, allora nessun giocatore otterrà un punto.

Lo scopo di questa variante è quello di lavorare sulla transitività del simbolo di uguaglianza. Verrà proposta in vari capitoli per notare come questa proprietà del simbolo «uguale» si conservi a prescindere dai particolari numeri o operazioni considerati.



-10

Punteggi negativi

Se l'insegnante lo desidera, questo gioco può prestarsi anche a una prima introduzione dei numeri negativi. Per farlo, si possono modificare le regole cambiando l'obiettivo dei due giocatori: il giocatore che mette la carta sulla plancia vuota ha lo scopo di completare correttamente l'uguaglianza, quello che risponde cerca invece di creare un'uguaglianza falsa. Ad esempio, se il primo giocatore mette sulla plancia una carta di valore 100, il secondo giocatore calerà una carta di valore diverso nella sua mano, togliendo così un punto all'avversario. Se non ha carte di valore diverso da 100, dovrà scartare una carta per pescarne un'altra e quindi passare il turno all'avversario. Il primo giocatore tenterà quindi di completare correttamente la propria uguaglianza e, nel caso in cui riesca, otterrà un punto. Se nessuna carta in mano gli consente di completare l'uguaglianza in modo corretto, allora dovrà passare il turno all'avversario che avrà un'altra opportunità per creare un'uguaglianza falsa.

Nel caso in cui venga usata questa variante, si consiglia di utilizzare una linea dei numeri che va da -20 a +20 come segna-punti. Due segna-posto serviranno a tener traccia del punteggio di ciascuno dei due avversari.

Mazzi di carte

Ciascuno dei capitoli di questo libro prevede l'uso di un differente mazzo; su ogni scheda è indicato il mazzo coinvolto attraverso un'icona apposita. I mazzi sono pensati per riflettere su particolari proprietà dei numeri, così come spiegato di seguito e meglio dettagliato all'inizio di ciascun capitolo. In totale ci sono sette mazzi, ciascuno dei quali potrebbe indicativamente corrispondere all'attività di un quadrimestre di scuola, dalla classe terza alla classe quinta. Il settimo mazzo potrebbe essere utilizzato come strumento in continuità tra la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado.

Chiaramente è possibile combinare alcuni dei mazzi per rendere il gioco più variegato, soprattutto quando gli alunni giocano in modo spontaneo (ad esempio a ricreazione o nei momenti di gioco libero). Per esempio, è possibile combinare il **mazzo 100+** con il **mazzo Proprietà,** oppure il **mazzo Espressioni** con il **mazzo Decimali.**

Mazzo 100

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e semplici divisioni. Di queste, 22 hanno valore 40, 12 hanno valore 20 e 12 hanno valore 100. Nel mazzo sono anche incluse due copie della carta speciale DOPPIO/METÀ che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, ne raddoppia o dimezza il valore, a scelta del giocatore.

Questo mazzo sarà impiegato soprattutto per scoprire il gioco cominciando a esplorare il significato del simbolo di uguaglianza con operazioni alla portata dello studente. Le operazioni che compaiono sulle carte sono comunque pensate per poter cominciare a mettere in luce alcune proprietà delle operazioni (ad esempio la proprietà commutativa di addizione e moltiplicazione) e quindi riconoscere alcune uguaglianze senza dover necessariamente svolgere tutti i calcoli.

Mazzo 100+

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e semplici divisioni. Di queste, 22 hanno valore 500, 12 hanno valore 400, 12 hanno valore 600. Nel mazzo sono anche incluse due copie della carta speciale ±100 che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, permette al giocatore di scegliere di aggiungere o togliere 100 al valore.

Questo mazzo sarà impiegato per generalizzare alcune scoperte fatte precedentemente, notando che le proprietà messe in evidenza sono ancora più utili nel caso di numeri di dimensioni maggiori. Alcune carte sono state ideate anche per mettere in evidenza cosa succede quando si moltiplica o divide un numero per 10 o per 100.

Mazzo Proprietà

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano semplici espressioni confrontabili mediante le proprietà associativa e distributiva. Di queste, 24 hanno valore 360, 12 hanno valore 720 e 12 hanno valore 450.

Questo mazzo è progettato per far emergere la proprietà distributiva e la proprietà associativa nell'addizione e nella moltiplicazione. Molte combinazioni delle semplici espressioni presentate permettono di notare che l'uguaglianza tra esse è garantita dalle proprietà stesse, senza necessità di svolgere calcoli. Le diverse varianti alle regole potranno permettere di riflettere su queste proprietà e di generalizzarle.

Mazzo Espressioni

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano semplici espressioni con le quattro operazioni fondamentali. Di queste, 20 hanno valore 10, 10 hanno valore 0 e 10 hanno valore 1. Ci sono poi 4 carte con espressioni che non rappresentano nessun numero e che riportano espressioni del tipo 0 : 0 o altre divisioni per 0. Nel mazzo sono anche incluse due tipologie di carte speciali. Ci sono due copie della carta speciale $\divideontimes 10$ che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, permette al giocatore di scegliere di moltiplicare o dividere per 10 il valore. Ci sono anche due copie della carta speciale $\times 0$ che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, permette al giocatore di moltiplicarne il valore per zero.

Questo mazzo ha lo scopo di introdurre espressioni con strutture più complesse rispetto a quelle nel mazzo precedente. In particolare, è progettato perché le espressioni possano anche essere risolte senza svolgere tutti i calcoli, ad esempio notando proprietà di 0 e 1 oppure applicando le proprietà delle operazioni scoperte usando il mazzo precedente. Le quattro carte che non rappresentano nessun numero.

Mazzo Decimali

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano semplici espressioni che coinvolgono anche numeri decimali. Di queste, 20 hanno valore uguale a 1, 5 hanno valore uguale a 0 e 15 hanno valore uguale a 1. Ci sono poi 4 carte con espressioni che non rappresentano nessun numero ma che riportano espressioni del tipo a $0 : 0$ o altre divisioni per 0. Nel mazzo sono anche incluse due tipologie di carte speciali. Ci sono due copie della carta speciale $\divideontimes 10$ che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, permette al giocatore di scegliere di moltiplicare o dividere per 10 il valore. Ci sono anche due copie della carta speciale $\times 0$ che, se giocata insieme a una carta che riporta un'operazione o un numero, permette al giocatore di moltiplicarne il valore per zero.

Anche questo mazzo è progettato perché le espressioni possano anche essere risolte senza svolgere tutti i calcoli, ad esempio lavorando sulla notazione posizionale dei numeri, notando proprietà di 0 e 1 oppure applicando le proprietà delle operazioni già note nel contesto dei numeri naturali, stavolta nel caso dei numeri razionali.

Mazzo Frazioni

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano un numero razionale espresso mediante una rappresentazione frazionaria, percentuale, decimale o grafica. Di queste, 26 carte rappresentano $\frac{1}{2}$, 11 rappresentano $\frac{1}{10}$, 11 rappresentano $\frac{3}{4}$. Le carte espresse sotto forma di percentuale sono in tutto 4.

Questo mazzo è progettato per lavorare sia sul concetto di frazioni equivalenti, sia per notare che esistono rappresentazioni tra loro equivalenti per alcuni numeri razionali di uso frequente.

Mazzo Potenze

Questo mazzo è composto da 48 carte che riportano espressioni contenenti potenze di 2. Di queste, 20 hanno valore 16, 12 hanno valore 4 e altre 12 hanno valore 8. Ci sono poi 2 carte speciali DOPPIO e 2 carte speciali METÀ.

Questo mazzo è progettato per introdurre l'elevamento a potenza e di far prendere confidenza con la notazione esponenziale, allo scopo di consolidare il suo significato come moltiplicazione ripetuta e di far scoprire alcune semplici proprietà delle potenze.

Le schede di questo libro

Ciascuno dei capitoli del libro è dedicato a diverse operazioni, proprietà o insiemi numerici. Tuttavia, tutti i capitoli sono composti di schede di lavoro dello stesso tipo. Consegne analoghe vengono proposte allo studente in modo che possa pian piano imparare a conoscerle.

Ogni scheda riporta cinque icone che rappresentano il mazzo da utilizzare, eventuali varianti del gioco impiegate, la tipologia di consegna, il setting dell'attività e la durata.

Sono previste tre possibilità per il setting:

Consegna individuale | Lavoro di gruppo | Discussione collettiva

Di seguito si elencano le cinque tipologie di consegne presenti fornendo una breve spiegazione del loro funzionamento; per ciascuna tipologia di consegna viene anche indicata la rispettiva icona.

Cosa giocheresti tu?

Schede di questo tipo simulano una **partita in corso.** L'alunno deve immedesimarsi nel ruolo di uno dei giocatori e scegliere quale carta giocare tra alcune carte proposte. Lo scopo è quello di stimolare lo studente nel completamento di uguaglianze, riflettendo (da solo o in gruppo) sulle proprietà delle operazioni coinvolte. Facendo scegliere tra alcune carte proposte (non necessariamente realmente presenti in uno dei mazzi) si spinge l'alunno a mettere a confronto varie operazioni e/o espressioni numeriche notando quindi differenze e somiglianze.

Dalla plancia al quaderno

Queste schede propongono di tradurre quanto scoperto nel contesto delle carte (ovvero sulla plancia di gioco) nel linguaggio simbolico dell'aritmetica, ovvero decontestualizzandolo dal gioco. La scheda viene quindi proposta come spazio di riflessione sulle proprietà generali che sono state scoperte giocando e di formalizzazione del linguaggio con cui descriverle.

Inventa una carta che…

Queste schede propongono all'alunno di immaginare una carta che possa completare in modo corretto (o meno) un'uguaglianza; hanno quindi lo scopo di stimolare lo studente a elaborare strategie originali o ad applicare in un contesto nuovo le strategie apprese precedentemente. Schede di questo tipo sono ottimi strumenti di valutazione per l'insegnante.

Inventa un mazzo che…

Queste schede sono quelle che richiedono maggior competenza da parte dell'alunno. Viene richiesto di inventare alcuni tipi di carte (o addirittura un intero mazzo) che soddisfino certe proprietà tra quelle scoperte nel corso del capitolo. Si tratta di un compito autentico che può essere svolto efficacemente in piccoli gruppi o con l'intera classe, sfruttando diverse modalità di apprendimento cooperativo.

Esercitati

Queste schede propongono varie consegne che dovrebbero risultare semplici una volta svolte le schede precedenti del capitolo. Lo scopo è quello di far lavorare l'alunno in autonomia per riflettere nuovamente su scoperte fatte con l'aiuto dei compagni e dell'insegnante. Possono essere utilizzate come compito per casa e come strumento per il rafforzamento di abilità di base.

Sei tu l'arbitro

In schede di questo tipo viene chiesto all'alunno di immedesimarsi nel ruolo dell'arbitro per alcune partite di gioco inventate. Si chiede ad esempio di stabilire se un giocatore ha agito correttamente o se l'attribuzione di un certo punteggio è opportuna. Scopo di queste schede è quello di proporre la confutazione o conferma di particolari uguaglianze e far riflettere l'alunno (da solo o in gruppo) sulle strategie che possono essere adottate per farlo.

Una partita particolare

Mentre stanno giocando, gli alunni possono effettuare numerose riflessioni, specialmente quando vengono utilizzate particolari carte o specifiche varianti delle regole. Le schede di questo tipo suggeriscono di tener traccia dell'andamento di una partita in modo da permettere una successiva riflessione su quanto è accaduto. Si tratta quindi di una partita che non ha come unica finalità il giocare ed è quindi per questo «particolare». Ciascuna di queste schede specifica le carte da utilizzare e la variante alle regole da adottare. La partita può svolgersi a coppie, piccoli gruppi o essere una simulazione svolta dall'intera classe.