PROGRAMMI DI POTENZIAMENTO DELLA COGNIZIONE NUMERICA E LOGICO-SCIENTIFICA
Collana diretta da Daniela Lucangeli

Gian Marco Malagoli, Eugenia Pellizzari e Daniela Lucangeli

# STRATEGIE DI CALCOLO

## Dalla matematica vedica alla cognizione numerica

Erickson

# Indice

# Introduzione

Perché scomodare la matematica vedica per una serie di libretti operativi finalizzati alle strategie di calcolo?

Tanti «perché» e di diversa natura:

– tanti… troppi bambini continuano a far fatica ad apprendere bene il sistema dei numeri, del calcolo e della soluzione di problemi aritmetici anche elementari (si vedano i risultati INVALSI);
– tanti… troppi *falsi positivi* nell'ambito dei disturbi del calcolo, cioè bambini che apprendono a calcolare come se avessero significativi disturbi cognitivi e che invece non hanno alcun deficit di base ma solo bisogno di strategie didattiche funzionali al dominio cognitivo del numero (per una sintesi si veda Lucangeli e Mammarella, 2010);
– tanti… troppi sistemi di classificazione e di interpretazione della «fatica ad apprendere» intelligenti sistemi di calcolo.

E allora che fare?

Da anni sosteniamo l'idea che i disturbi specifici dell'apprendimento, e in particolare la discalculia evolutiva, non siano da confondere con il basso risultato nella prestazione scolastica. E soprattutto da anni portiamo evidenze sperimentali di come, adottando didattiche efficaci nel potenziamento delle abilità cognitive alla base del calcolo, gli alunni in difficoltà possano finalmente acquisire le giuste competenze e sperimentare successo e nuova motivazione ad apprendere.

Per questo, studiando e cercando proprio di coniugare strategie didattiche e processi di cognizione numerica, abbiamo trovato nell'antica saggezza vedica interessanti spunti da percorrere: si tratta per lo più di creative strategie di calcolo basato sull'utilizzo delle proprietà delle operazioni e sul complemento al 10… e in estrema sintesi su processi strategici e metacognitivi piuttosto che su processi algoritmici e procedurali.

Le evidenze sperimentali sull'efficacia dell'uso didattico di tali strategie sono molto incoraggianti sia dal punto di vista scientifico (si veda Re et al., 2013) che didattico.

In particolare, oltre a risultati significativi nei parametri di correttezza, l'uso di tali strategie risulta molto efficace nei parametri di velocità dell'acquisizione dei metodi e delle corrispondenti prestazioni di calcolo. Test effettuati hanno infatti dimostrato che, nonostante la scarsa abitudine all'uso delle metodologie proposte, in brevissimo tempo le prestazioni di calcolo diventano in molti casi (soprattutto con numeri alti) significativamente più efficienti.

## La matematica vedica

> Guardando l'applicazione di questo genere di calcoli, che riescono a eseguire anche i bambini, dottori, professori e altri «pezzi grossi» della matematica rimangono trasecolati ed esclamano: «Ma è matematica o magia?».
>
> Noi rispondiamo dicendo: «È entrambe le cose. È magia finché non la comprendi, dopo di che è matematica». (Bharati Krishna Tirthaji)

Per «matematica vedica» si intende in generale la matematica risalente ai Veda, i testi sacri dell'induismo, fonte della conoscenza trasmessa oralmente attraverso i Sutra, regole, o meglio, aforismi della saggezza indiana.

Tra il 1911 e il 1918, Jagadguru Shankaracharya Shri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja studia l'essenza della saggezza matematica, racchiusa nei 16 Sutra dei Veda e nei loro corollari, giungendo a una nuova e originale teoria matematica, pubblicata per la prima volta nel 1965 nel testo *Vedic Mathematics.* Nell'opera vengono presentate diverse tecniche di calcolo, utili per sviluppare una maggiore flessibilità nel ragionamento matematico perché propongono metodi alternativi di risoluzione dei problemi.

Da qualche anno, la matematica vedica è stata introdotta nelle scuole indiane e l'Università di Nuova Delhi ha organizzato un corso di matematica vedica con l'obiettivo di rendere la matematica più attraente agli occhi degli studenti; tale metodologia si sta diffondendo anche nelle più prestigiose scuole americane.

Riportiamo per completezza i 16 Sutra; in questo manuale faremo riferimento ad alcuni di essi nello spiegare le strategie.

| I 16 SUTRA |
|---|
| 1. Per uno più del precedente |
| 2. Tutti dal 9 e l'ultimo dal 10 |
| 3. In verticale e in diagonale |
| 4. Trasponi e applica |
| 5. Se la *Samuccaya* è la stessa, è zero |
| 6. Se uno è in rapporto, l'altro è zero |
| 7. Per addizione e per sottrazione |
| 8. Per completamento o non-completamento |
| 9. Calcolo differenziale |
| 10. Per difetto |
| 11. Specifico e generale |
| 12. I resti per l'ultima cifra |
| 13. L'ultimo e due volte il penultimo |
| 14. Per uno meno del precedente |
| 15. Il prodotto della somma |
| 16. Tutti i moltiplicatori |

Il nucleo di base della matematica vedica può essere riassunto nel concetto di «semplificazione», ovvero la progressiva riduzione dei calcoli complessi in calcoli sempre più semplici che possono essere eseguiti anche a mente.

Le strategie che proponiamo nel manuale e nei volumi di approfondimento sono una raccolta di esempi semplici di calcolo, a volte immediato a volte più ragionato, in ogni caso creativo e interessante; un approccio di questo tipo proietta una luce tutta nuova sulla matematica che conosciamo e a cui, a volte forzatamente, ci siamo abituati.

L'aura di magia che avvolge le tecniche della matematica vedica viene dissipata dalle dimostrazioni algebriche che seguono la presentazione di ogni singola strategia: l'intento è di convincere anche i più scettici che le metodologie, per quanto audaci e prodigiose possano a prima vista apparire, sono in realtà ben fondate.

«Ma è matematica o magia?» «È magia finché non la comprendi, dopo di che è matematica.»

Noi aggiungiamo che la matematica, con i suoi delicati equilibri, il suo ordine preciso e la sua rigorosa eleganza, detiene comunque dentro di sé una componente di poetica magia.

## Struttura dell'opera

L'opera completa è composta dal presente manuale e da una serie di volumi di approfondimento.

Nel manuale viene proposta una selezione delle tecniche e delle strategie in modo da offrire una visione generale ed esaustiva del metodo; ad ogni argomento esposto corrisponde un fascicolo in cui la trattazione delle strategie sarà più completa, corredata da esempi ed esercizi per i ragazzi.

Sia nel manuale che nei volumi di approfondimento, la presentazione delle strategie procede seguendo passi ben precisi:

- attraverso esempi numerici viene proposta la tecnica, commentando e spiegando ogni singolo passaggio;
- il metodo viene, se necessario, generalizzato, riordinando la sequenza di passaggi necessari per giungere alla soluzione;
- la tecnica viene giustificata attraverso la dimostrazione algebrica. Questa parte non è necessaria alla comprensione del metodo, ma consente di corroborarne la validità, confermando al lettore, come si diceva nel paragrafo precedente, di stare davvero eseguendo calcoli matematici ben fondati. I ragionamenti sono generalmente adatti a ragazzi del biennio della scuola secondaria di secondo grado (salvo diversamente specificato): sono un valido esercizio di algebra e consentono, tra le altre cose, di esibire la potenza e l'utilità dell'algebra stessa, troppo spesso vista dagli studenti come una disciplina meccanica (quindi «facile»), ma inutile (di conseguenza non motivante).

# 1.1 TABELLINA DEL 2

La tabellina del 2 funziona essenzialmente per conteggio: poiché le nostre mani sono esattamente 2, possiamo facilmente stendere le dita delle 2 mani corrispondenti al numero per cui vogliamo moltiplicare il 2 e contare le dita.

**2 • 2 = 4**

**2 • 3 = 6**

# 2.5 SOTTRAZIONI: STRATEGIA NIKHILAM

La sottrazione prevede una strategia che nel mondo orientale viene chiamata Nikhilam, basata sull'aforisma del Sutra 2: «Tutti dal 9 e l'ultimo dal 10».
Nell'introduzione, parlando del Cerchio del 10, abbiamo visto l'importanza di saper calcolare a mente il *complementare di qualsiasi numero.* Il Sutra 2 utilizza questo calcolo per risolvere le sottrazioni.
Esercitiamoci a calcolare il complementare secondo le regole del Sutra 2.

*Esercizio 1: Trova il complementare*

| | |
|---|---|
| **3.648** | **(9)(9)(9)(10)**<br>**3.648**<br>**6.352**<br>6 è il complementare di 3 rispetto al 9<br>3 è il complementare di 6 rispetto al 9<br>5 è il complementare di 4 rispetto al 9<br>2 è il complementare di 8 rispetto al 10 |
| **30.400** | **(9)(9)(10)**<br>**30.400**<br>**69.600** |

Questo esercizio è propedeutico alla strategia della *sottrazione Nikhilam*, la quale permette di sottrarre sommando il complementare.

| | |
|---|---|
| **5.322 –**<br>**3.876 =** | *Quando la cifra da sottrarre è maggiore, è sufficiente aggiungere il complementare secondo l'aforisma del Sutra 2:*<br>**5.322 –**<br>**3.876 =**<br>2 – 6 = > 2 + 4, 4 è il complementare di 6 rispetto a 10 (perché è la prima cifra a destra)<br>2 – 7 = > 2 + 2, 2 è il complementare di 2 rispetto a 9<br>3 – 8 = > 3 + 1, 1 è il complementare di 8 rispetto a 9<br>L'ultima cifra, 5, è superiore a 3: si sottrae 3 da 5 – 1.<br>Riassumendo, il risultato è:<br>**1.446**<br>Oppure possiamo anche qui considerare il complementare a 9 di 3, 6, al quale togliamo 5; il risultato è sempre 1. |

# 4.1 LA DIVISIONE CORTA

La prima strategia che analizzeremo prevede che il *divisore* abbia *1 cifra*.

## *Divisore a 1 cifra (esempio 1)*

| Schema di calcolo | **Operazione**<br>**777 : 4** | Osservazioni |
|---|---|---|
| Nella modalità grafica di rappresentazione dell'operazione di divisione è dato risalto al divisore, ponendolo a sinistra come prima cifra | **4 )7 7 7** | Questa disposizione sembra essere funzionale a una lettura lineare dell'operazione e quindi a una migliore possibilità di visualizzazione mentale |
| *STEP 1*<br>Calcoliamo quante volte il 4 è contenuto nella prima cifra del DIVIDENDO.<br>**Il 4 nel 7 (centinaia) ci sta 1 volta con resto 3** | **1**<br>**4 )7 7 7**<br>**3** | L'1 è la prima cifra del risultato.<br>Il 3 va a modificare le decine del dividendo |
| *STEP 2*<br>Il resto 3 centinaia viene considerato come 30 decine che vanno a sommarsi alle 7 già presenti nel DIVIDENDO per cui diventano **37**.<br>**Il 4 nel 37 ci sta 9 volte con resto 1** | **1 9**<br>**4 )7 7 7**<br>**3 1** | Il 9 è la seconda cifra del risultato.<br>L'1 va a modificare le unità del dividendo |
| *STEP 3*<br>Il resto 1 decina viene considerato come 10 unità che vanno a sommarsi alle 7 già presenti nel DIVIDENDO per cui diventano **17**.<br>**Il 4 nel 17 ci sta 4 volte con resto 1** | **1 9 4 R. 1**<br>**4 )7 7 7**<br>**3 1** | Il 4 è la terza cifra del risultato; l'ultimo resto è il resto finale della divisione |
| Risultato finale | 194 con resto 1 | Questo modo di rappresentazione risulta vicino alla visualizzazione mentale |

# 5.2 QUADRATI CON LA MOLTIPLICAZIONE SU BASE

Nel capitolo «Strategie per le moltiplicazioni» abbiamo esposto e dimostrato la strategia della moltiplicazione su base. Questa tecnica ci consente di calcolare velocemente il quadrato di numeri costituiti da 2 o 3 cifre: vediamo come con alcuni esempi.

*Esempio 1*

| Schema di calcolo | **Operazione**<br>**12 • 12** | Osservazioni |
|---|---|---|
| Si determina la base del multiplo di 10 di riferimento, in questo caso 10.<br>Si determina la differenza rispetto alla base (+2) | | |
| La strategia prevede il calcolo diviso in due parti:<br>– al numero si somma la differenza alla base (centinaia e decine)<br>– si moltiplicano le differenze alla base (unità) | (base 10)<br>12 + 2<br>12 + 2<br>14 / 4 | Primo blocco: 12 + 2 = 14<br>Secondo blocco: 2 · 2 = 4 |
| Risultato | 144 | |

*Esempio 2*

| Schema di calcolo | **Operazione**<br>**133 • 133** | Osservazioni |
|---|---|---|
| *STEP 1*<br>Al numero si somma la differenza alla base: 166, primo blocco<br>*STEP 2*<br>Si moltiplicano le differenze alla base: 33 · 33 = 1.089 (con la tecnica dell'esempio precedente, su base 30) | (base 100)<br>133 + 33<br>133 + 33<br>$166\ /\ {}_{10}89$ | Ci sono 10 centinaia da riportare sul primo blocco:<br>166 + 10 = 176 |
| Risultato | 17.689 | |