PROGRAMMI DI POTENZIAMENTO DELLA COGNIZIONE NUMERICA E LOGICO-SCIENTIFICA

Collana diretta da Daniela Lucangeli

Gian Marco Malagoli, Eugenia Pellizzari e Daniela Lucangeli

Strategie di calcolo

MOLTIPLICAZIONI

Schede e attività per il potenziamento

Erickson

Indice

Introduzione

L’importanza del calcolo a mente

Di fronte ad una qualsiasi operazione di calcolo dobbiamo considerare tre aspetti fondamentali (Lucangeli, Sella e Berteletti, 2012):

1. La lettura e l’interpretazione corretta dei *segni dell’operazione* richiesta. Questo aspetto è fondamentale perché traduce il tipo di manipolazione che deve essere compiuta sulle numerosità presentate: a ogni simbolo corrisponde una precisa operazione logica. Il numero di simboli (e quindi delle operazioni logiche sottese), aumenta progressivamente proseguendo l’iter scolastico: +, –, •, :, ≤, $\sqrt{\ }$, Σ, ∫…
2. La *procedura* da applicare. La conoscenza procedurale si manifesta in modo differente a seconda che il calcolo che stiamo eseguendo sia mentale o scritto. Nel *calcolo mentale,* le strategie procedurali da applicare sono di tipo costruttivo. Nel *calcolo scritto,* propriamente detto, le procedure sono legate alla componente grafica dell’operazione e alle regole di tipo algoritmico che devono essere applicate secondo una precisa sequenza temporale (ad esempio, incolonnamento, sequenze di riporti, ecc.). Con il passare del tempo tali procedure si automatizzano.
3. I *fatti numerici,* ovvero quelle operazioni di base, come le tabelline o semplici combinazioni/operazioni, di cui conosciamo il risultato senza dover eseguire alcun calcolo (6 + 4 = 10; 19 – 4 = 15, 16 : 2 = 8). Sono appunto dei fatti che sono noti e immediatamente disponibili. I fatti numerici sono fondamentali sia quando eseguiamo i calcoli a mente sia quando eseguiamo i calcoli scritti; nel calcolo a mente possono anche bastare quando l’operazione è piuttosto facile o l’allenamento e l’esperienza approfonditi.

Poste tali considerazioni, in questa sede vorremo rivolgere l’attenzione su alcune questioni:

– L’aspetto costruttivo del calcolo a mente. Il calcolo a mente è forse la competenza fondamentale che sta alla base dell’apprendimento matematico. Per eseguire corretti calcoli a mente sono coinvolti diversi processi cognitivi, tra cui la memoria di fatti numerici, la memoria di lavoro e, soprattutto, l’applicazione delle strategie. Allenare all’uso costruttivo delle strategie, stimolando il

calcolo a mente, è un buon metodo per favorire l'evoluzione e il potenziamento dell'intelligenza numerica intesa come processo di manipolazione cognitiva del sistema del calcolo.
– L'automatizzazione delle procedure. Affinché una procedura possa essere efficacemente automatizzata deve essere profondamente compresa, altrimenti il carico per la memoria di lavoro diventa tale da appesantire e quindi rallentare il calcolo. Inoltre ricordiamo che le procedure di natura algoritmica, tipicamente legate al calcolo scritto, anche se consolidate, stimolano molto poco i processi cognitivi legati alla cognizione numerica, perché rischiano di ridursi a una mera ripetizione meccanica di passaggi.
– Il recupero dei fatti numerici. È fondamentale che i fatti numerici siano ben memorizzati cosicché il loro recupero avvenga in modo automatico e con il minimo sforzo cognitivo; inoltre, più sono i fatti numerici a disposizione nel bagaglio cognitivo, più veloci e sicure saranno le operazioni di calcolo.

Le attività proposte nell'opera *Strategie di calcolo* hanno proprio lo scopo di:
– potenziare l'aspetto costruttivo del calcolo a mente;
– comprendere a fondo le procedure;
– aumentare il numero dei fatti numerici immediatamente disponibili.

In questa sede, parleremo principalmente di «calcolo a mente», per sottolineare la natura tipicamente costruttiva delle strategie; nel caso di numeri a più cifre può essere utile aiutarsi trascrivendo i risultati parziali su un foglio di carta, ma senza regole precise (per questo non parliamo in modo esplicito di «calcolo scritto»); l'allenamento e il consolidamento delle tecniche consentirà allo studente di risolvere sempre più calcoli completamente a mente, andando così a potenziare in maniera significativa la sua capacità di manipolare il sistema di calcolo a livello cognitivo.

Struttura dell'opera

L'opera completa *Strategie di calcolo* nasce da un approfondito studio dei metodi orientali antichi e moderni per affrontare il calcolo aritmetico, considerati attraverso i paradigmi dell'algebra.

Proponiamo dunque una selezione di strategie, divertenti e accattivanti, tutte facenti riferimenti ai *sutra* o regole dell'aritmetica vedica, dandone prima rigorosa dimostrazione algebrica e quindi esibendone la potenza per velocizzare e rendere semplice il calcolo.

Ci siamo ispirati al lavoro di Jagadguru Shankaracharya Shri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja, che tra il 1911 e il 1918, studia l'essenza della saggezza matematica racchiusa nei sedici Sutra dei Veda e nei loro corollari, giungendo a una nuova e originale teoria, pubblicata per la prima volta nel 1965 nel testo *Vedic Mathematics*. Nell'opera vengono presentate diverse tecniche di calcolo utili per sviluppare una maggiore flessibilità nel ragionamento logico perché propongono metodi alternativi di risoluzione dei problemi.

Riportiamo per completezza i 16 sutra. In questo fascicolo faremo riferimento ad alcuni di essi nello spiegare le strategie.

I 16 SUTRA
1. Per uno più del precedente 2. Tutti dal 9 e l'ultimo dal 10 3. In verticale e in diagonale 4. Trasponi e applica 5. Se la *Samuccaya* è la stessa, è zero 6. Se uno è in rapporto, l'altro è zero 7. Per addizione e per sottrazione 8. Per completamento o non-completamento 9. Calcolo differenziale 10. Per difetto 11. Specifico e generale 12. I resti per l'ultima cifra 13. L'ultimo e due volte il penultimo 14. Per uno meno del precedente 15. Il prodotto della somma 16. Tutti i moltiplicatori

Il nucleo di base della teoria può essere riassunto nel concetto di «semplificazione», ovvero la progressiva riduzione dei calcoli complessi in calcoli sempre più semplici che possono essere eseguiti anche a mente. Ricordiamo che questa è una tecnica classica delle scienze matematiche in genere; ad esempio, fa spesso riferimento a tale paradigma l'informatica. Citiamo a tal proposito il classico metodo di programmazione «top-down», che si basa sull'idea di scomporre il problema principale in sotto-problemi più semplici, tali da potere essere proposti a un elaboratore elettronico che ha a disposizione un numero davvero limitato di funzioni. La bravura del programmatore sta nel semplificare opportunamente il problema principale, scegliendo la via più veloce e sicura.

Allo stesso modo, lo studente strategico, di fronte a un calcolo complesso e avendo a disposizione un'ampia rosa di tecniche di calcolo e di fatti numerici, può attingere a essi e alla sua esperienza di solutore, per giungere al risultato velocemente e senza errori.

L'opera completa è composta da un manuale e da una serie di fascicoli di approfondimento, in cui la presentazione delle strategie procede seguendo precisi passi:

– se la strategia è stata già proposta nel manuale, si fa esplicito rinvio aggiungendo solo qualche esempio numerico;
– se la strategia è nuova, attraverso esempi numerici viene proposta la tecnica, generalizzando il metodo in un secondo tempo;
– ricordiamo che, come nel manuale, ciascuna nuova tecnica viene giustificata attraverso la dimostrazione algebrica. Questa parte non è necessaria alla comprensione del metodo, ma consente di corroborarne la validità, confermando al lettore di stare davvero eseguendo calcoli ben fondati. I ragionamenti sono generalmente adatti a ragazzi dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado e della prima classe della secondaria di secondo grado (salvo diversamente

specificato): sono un valido esercizio di algebra e consentono, tra le altre cose, di esibire la potenza e l'utilità dell'algebra stessa, troppo spesso vista dagli studenti come una disciplina meccanica (quindi «facile»), ma inutile (di conseguenza non motivante);
– in ogni caso, dopo la presentazione di una strategia, verranno proposti degli esercizi guidati per aiutare l'allievo a familiarizzare con essa.

Bibliografia

Bergamini M., Trifone A. e Barozzi G. (2013), *Matematica Verde, vol. 1,* Bologna, Zanichelli.

Glover J.T. (2008), *Vedic Mathematics for Schools: Book 3,* Dehli, Motilal Banarsidass.

Glover J.T. (2011), *Vedic Mathematics for Schools: Book 1,* Dehli, Motilal Banarsidass.

Glover J.T. (2013), *Vedic Mathematics for Schools: Book 2,* Dehli, Motilal Banarsidass.

Herstein I.N. (1988), *Algebra,* Roma, Editori Riuniti.

Lucangeli D. e Mammarella I.C. (a cura di) (2010), *Psicologia della cognizione numerica: Approcci teorici, valutazione ed intervento,* Milano, FrancoAngeli.

Lucangeli D., Sella F. e Berteletti I. (2012), *La discalculia e le difficoltà in aritmetica* (guida), Firenze, Giunti Scuola.

Malagoli G., Pellizzari E. e Lucangeli D. (2013a), *Strategie di calcolo – Dalla matematica vedica alla cognizione numerica,* Trento, Erickson.

Malagoli G., Pellizzari E e Lucangeli D. (2013b), *Strategie di calcolo – Imparare le tabelline usando le dita,* Trento, Erickson.

Mnemonic A.S. (2012), *Il mago matematico,* Narcissus Self Publishing (eBook).

Mahadevan C. (2011), *Basics of Speed Mathematics,* Astrarka Educational Solutions Private Limited (eBook).

Re A.M., Pedron M., Tressoldi P.E. e Lucangeli L. (2013), *Response to specific training for students with different levels of mathematical difficulties: A controlled clinical study,* «Exceptional Children».

Sharma N. e Sharma P. (2011), *Math Made Simple,* Create Space (eBook).

Williams K. e Gaskell M. (2010), *The Cosmic Calculator: A Vedic Mathematics course for schools (voll. 1-3),* Inspiration Books.

Strategie di base per le moltiplicazioni

In questo capitolo riassumeremo le proprietà dei numeri, delle operazioni e gli strumenti di algebra che saranno utilizzati nel corso dell'opera per esibire o giustificare le strategie di calcolo proposte.

Il sistema numerico decimale

Il nostro sistema numerico ci consente di scrivere i numeri in formato polinomiale, utilizzando le potenze di 10.

Ad esempio, il numero 5871 può essere scritto come:

$$5871 = 5 \bullet 10^3 + 8 \bullet 10^2 + 7 \bullet 10 + 1 \bullet 10^0, \text{ dove } 10^0 = 1$$

Tale scrittura è anche detta «posizionale» (a base 10), poiché il valore delle cifre è diverso a seconda della posizione che occupano nella notazione.

Osserviamo che il «peso» delle cifre può essere anche descritto da una tabella come questa:

MIGLIAIA	CENTINAIA	DECINE	UNITÀ
5	8	7	1

Riconoscere e comprendere profondamente la struttura del numero in notazione decimale consente di migliorare le competenze di calcolo.

Ad esempio, il numero 3161 a seconda delle operazioni che devono essere svolte con esso, potrebbe essere visto come:

MIGLIAIA	CENTINAIA	DECINE	UNITÀ
3	1	6	1
3	0	16	1
2	11	6	1
1	20	16	1

Alleniamo i ragazzi a ragionare sul sistema numerico decimale, migliorando l'«agilità» di gestione dei riporti.

Esempio: Dato il numero 5401, completare la seguente tabella:

MIGLIAIA	CENTINAIA	DECINE	UNITÀ
5	4	?	1
4	?	0	1
5	2	?	1
1	?	0	1

Nel testo utilizzeremo spesso questa modalità; nelle strategie di calcolo proposte, infatti il risultato in molti casi si compone di «parti»o «blocchi» (separati dal simbolo «/»), corrispondenti a unità, decine, centinaia, migliaia… in modo non rigido.

Ad esempio, facendo riferimento alle tabelle precedenti, consideriamo il numero 7424:

MIGLIAIA	CENTINAIA	DECINE	UNITÀ
7	4	2	4

Con i blocchi separati: 7/4/2/4, ma anche:

MIGLIAIA	CENTINAIA	DECINE	UNITÀ
7	3	12	4

Con i blocchi: 7/3/12/4; scriveremo: 7/3/$_1$2/4 , per ricordarci che l'1 piccolo appartiene al blocco alla sua sinistra (cioè è di competenza delle centinaia) dove lo «riporteremo» sommandolo alle centinaia già presenti (3) per ottenere il risultato finale.

Alleniamo i ragazzi a ragionare sui «blocchi», proponendo esercizi di questo tipo.

Esempio: 4/8/21 → 4/8/$_2$1 → 4/10/1 → 4/$_1$0/1 → 501

5/45/17 → …

7/15/34/12 → …

8/7/67/34/12 → …

9/12/33/71/21 → …

4/45/36/19/23/36/12 → …

Il cerchio del 10

Costruiamo una circonferenza e inseriamo in modo equidistante i numeri da 1 a 10 lungo il perimetro e proseguiamo secondo il metodo descritto dal disegno: tale rappresentazione ci consente di dedurre una serie di osservazioni e caratteristiche legate ai numeri (fig. 1).

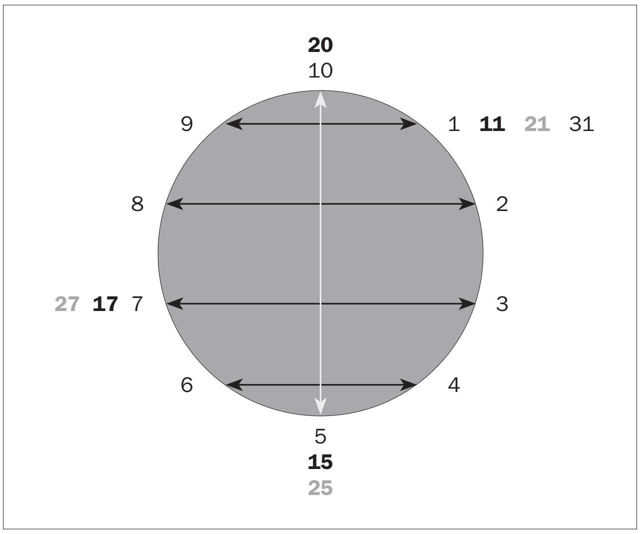

Fig. 1
Il cerchio del 10.

Immediatamente osserviamo che le coppie di numeri collegati con le frecce orizzontali hanno 10 come somma (sono detti «coppie di amici del 10» o «complementari rispetto al 10»):

1 _ 9
2 _ 8
3 _ 7
4 _ 6
6 _ 4
7 _ 3
8 _ 2
9 _ 1

I numeri 5 e 10 sono collegati con una linea verticale; non sono complementari, ma il 5 è complementare di se stesso. Se proseguiamo a scrivere i numeri lungo la circonferenza, incontriamo i complementari del 20, del 30…

Ad esempio (figura 2):

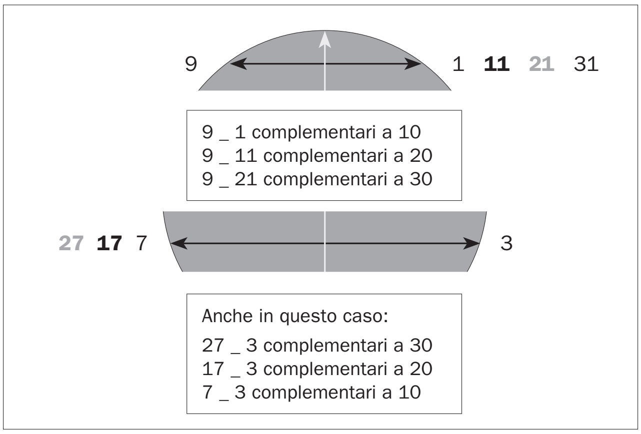

Fig. 2
Complementari rispetto al 10, al 20 e al 30.

Il cerchio del 10 consente di utilizzare la modalità visuale per ricordare la disposizione e i rapporti di complementarità.

Moltiplicazione con numeri a 3 cifre

Moltiplicazione «sopra la base»

Schema di calcolo	**Operazione** **216 • 217**	Osservazioni
I due numeri hanno come base 200	217 +17 216 +16	+17 e +16 rappresentano rispettivamente la differenza rispetto alla base 200
STEP 1 Moltiplicare le differenze alla base	27 · 26 = +272 (NB: applichiamo le stesse strategie della moltiplicazione incrociata a 2 cifre)	Otteniamo le UNITÀ. In questo caso alla destra del separatore abbiamo decine e unità; poiché 272 prevede anche 2 centinaia, alla fine del processo aggiungeremo le 2 centinaia al blocco di sinistra
STEP 2 Sottrarre/sommare le differenze rispetto alla base in senso incrociato	217 +17 216 +16	Otteniamo sempre lo stesso risultato: 233 (che corrisponde a 23.300)
STEP 3 Siccome siamo in base 200 la parte a sinistra del separatore deve essere moltiplicata per 2	$233\ /\ {}_{2}72$ $(233 \cdot 2)\ /\ {}_{2}72$ $466\ /\ {}_{2}72$	
STEP 4 Sommare a sinistra la centinaia contenuta nelle UNITÀ	468 / 72	Le CENTINAIA sono 468 (corrispondenti a 46.600 + 200)
Risultato finale	46.872	

Rispetto ai calcoli precedenti, alla destra del separatore ci sono 2 cifre. La regola generale vuole che alla destra del separatore ci siano tante cifre quanti sono gli zeri della base (10: una cifra, 20: una cifra, 100: due cifre, 200: 2 cifre, ecc.).

Moltiplicazione «sotto la base»

Schema di calcolo	**Operazione** **172 • 175**	Osservazioni
I due numeri hanno come base 200	172 –28 175 –25	–28 e –25 rappresentano rispettivamente la differenza rispetto alla base 200
STEP 1 Moltiplicare le differenze alla base	–28 · –25 = +700 (NB: applichiamo le stesse strategie della moltiplicazione incrociata a 2 cifre)	Otteniamo le UNITÀ. In questo caso alla destra del separatore abbiamo decine e unità; poiché 700 prevede anche 7 centinaia, alla fine del processo aggiungeremo le 7 centinaia al blocco di sinistra
STEP 2 Sottrarre/sommare le differenze rispetto alla base in senso incrociato	172 –28 175 –25	Otteniamo sempre lo stesso risultato: 147
STEP 3 Poiché la base è 200 (2 · 100), moltiplicare · 2 le centinaia	147 / $_{7}$00 294 / $_{7}$00	
STEP 4 Sommare la centinaia contenuta nelle UNITÀ	301 / 00	Le CENTINAIA sono 301
Risultato finale	30.100	

Moltiplicazione «sotto e sopra la base»

Schema di calcolo	**Operazione** **172 • 234**	Osservazioni
I due numeri hanno come base 200	172 –28 234 +34	–28 e +34 rappresentano rispettivamente la differenza rispetto alla base 200

4 MOLTIPLICAZIONE PER 11 E PER 111

Questa strategia è stata già presentata nel manuale: rimandiamo pertanto ad esso per ulteriori esempi e per la dimostrazione algebrica delle tecniche proposte.

Moltiplicare un numero a 2 cifre per 11

Schema di calcolo	**Operazione** **64 • 11**	Osservazioni
Per una migliore visualizzazione del metodo di calcolo impostiamo l'operazione secondo lo schema: (6)/ (10) /(4)	6 4 · 1 1 =	Il risultato avrà 3 blocchi. (numero cifre + 1)
Da sinistra verso destra sommiamo le cifre	6 4 · 1 1 = $6 \,/\, {}_{1}0 \,/\, 4$	Centinaia: 6, decine di 64 Decine: 10 = 6 + 4 Unità: 4, unità di 64
Risultato	704	Gestendo i riporti

Moltiplicare un numero a 3 cifre per 11

Schema di calcolo	**Operazione** **746 • 11**	Osservazioni
Per una migliore visualizzazione del metodo di calcolo impostiamo l'operazione secondo lo schema: (7)/(7+4)/(4+6)/(6)	7 4 6 · 1 1 =	Il risultato avrà 4 blocchi: (numero cifre del numero +1)
Da sinistra verso destra sommiamo le cifre	7 4 6 · 1 1 = $7 \,/\, {}_{1}1 \,/\, {}_{1}0 \,/\, 6$	Migliaia: 7 (centinaia di 746) Centinaia: 7 + 4 (centinaia + decine di 746) Decine: 4 + 6 (decine + unità di 746) Unità: 6 (unità di 746)
Risultato	8.206	Gestendo i riporti

Il metodo vale per tutti i numeri. Osserviamo che non sempre i blocchi separati dalle /, corrispondono al numero di cifre del risultato.
Ad esempio:

99 · 11, i blocchi sono sempre 3 ma le cifre del risultato sono 4, 1.089.

Moltiplicare un numero a 2 cifre per 111

Schema di calcolo	Operazione 68 • 111	Osservazioni
Per una migliore visualizzazione del metodo di calcolo impostiamo l'operazione secondo lo schema: (6) /(6 + 8)/(8 + 6) /(8)	68 · 111 =	Il risultato avrà 4 blocchi (numero cifre di 68 + 2)
Da sinistra verso destra sommiamo le cifre secondo le schema.	68 · 111 = $6 / {}_{1}4 / {}_{1}4 / 8$	
Risultato	7.548	Gestendo i riporti

Moltiplicare un numero di 3 cifre per 111

Schema di calcolo	Operazione 624 • 111	Osservazioni
Per una migliore visualizzazione del metodo di calcolo impostiamo l'operazione secondo lo schema: (6) /(6 + 2) / (6 + 2 + 4)/ (2 + 4) / (4)	624 · 111 =	Il risultato avrà 5 blocchi. (numero cifre di 624 + 2)
Da sinistra verso destra sommiamo le cifre secondo le schema.	624 · 111 = $6 / 8 / {}_{1}2 / 6 / 4$	
Il risultato	69.264	Gestendo i riporti

Moltiplicare un numero di 4 cifre per 111

Schema di calcolo	**Operazione** **5.268 • 111**	Osservazioni
Per una migliore visualizzazione del metodo di calcolo impostiamo l'operazione secondo lo schema: (5)/(5 + 2)/(5 + 2 + 6) /(2 + 6 + 8)/(6 + 8)/(8)	$\begin{array}{r} 5\,2\,6\,8\,\cdot \\ 1\,1\,1 = \\ \hline \end{array}$	Il risultato avrà 6 blocchi (numero cifre di 5.268 + 2)
Da sinistra verso destra sommiamo le cifre secondo le schema. Anche in questo caso possiamo inserire i delimitatori posizionali	$\begin{array}{r} 5\,2\,6\,8\,\cdot \\ 1\,1\,1 = \\ \hline 5/7/_{1}3/_{1}6/_{1}4/8 \end{array}$	
Risultato	584.748	Gestendo i riporti

Attività 6

La moltiplicazione incrociata (★★)

Risolvi le seguenti moltiplicazioni utilizzando il metodo della moltiplicazione incrociata *sopra la base:*

$12 \cdot 11 =$

$22 \cdot 21 =$

$33 \cdot 32 =$

$41 \cdot 43 =$

$51 \cdot 53 =$

$62 \cdot 64 =$

Risolvi le seguenti moltiplicazioni utilizzando il metodo della moltiplicazione incrociata *sotto la base:*

$18 \cdot 17 =$

$29 \cdot 28 =$

$39 \cdot 39 =$

$46 \cdot 49 =$

$77 \cdot 78 =$

$87 \cdot 87 =$

Risolvi le seguenti moltiplicazioni utilizzando il metodo della moltiplicazione incrociata *sopra e sotto la base:*

$9 \cdot 14 =$

$18 \cdot 23 =$

$39 \cdot 42 =$

$59 \cdot 63 =$

$66 \cdot 72 =$

Attività 7

Un mix di strategie (★★)

Osserva che le moltiplicazioni precedenti sono tutte prossime a una base. Se così non fosse, si possono utilizzare le tecniche del doppio, della moltiplicazione per 10 e le proprietà delle operazioni per avvicinarsi a una base comune.

Esempi:

$24 \cdot 43 = 24 \cdot (10 + 10 + 23) = (24 \cdot 10) + (24 \cdot 10) + (24 \cdot 23)$
$= 240 + 240 + 552 = 1.032$

Abbiamo:

– applicato la proprietà dissociativa dell'addizione
– applicato la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
– eseguito le moltiplicazioni per 10 e una moltiplicazione rispetto a una base «comoda»
– ricondotto il calcolo a una sequenza di somme.

$19 \cdot 38 = 19 \cdot 19 \cdot 2 = (19 \cdot 19) \cdot 2 = 361 \cdot 2 = 722$

Abbiamo:

– applicato la proprietà dissociativa della moltiplicazione
– eseguito la moltiplicazione rispetto ad una base «comoda»
– raddoppiato.

Continua tu…

$45 \cdot 72 =$

$57 \cdot 33 =$

$31 \cdot 72 =$

$28 \cdot 89 =$

$44 \cdot 61 =$

$53 \cdot 82 =$

