

**PROGRAMMI DI POTENZIAMENTO DELLA COGNIZIONE
NUMERICA E LOGICO-SCIENTIFICA**

Collana diretta da Daniela Lucangeli

Gian Marco Malagoli, Eugenia Pellizzari e Daniela Lucangeli

Strategie di calcolo

ADDIZIONI E SOTTRAZIONI

Schede e attività per il potenziamento

Erickson

Indice

- 7 Introduzione
- 11 CAP. 1 Strategie di base per le addizioni e le sottrazioni
- 13 CAP. 2 Iniziamo dal principio
- 27 ① Addizioni con le proprietà
- 29 ② Alla ricerca dei complementari
- 33 ③ Addizioni con i dots
- 35 ④ Addizioni e sottrazioni con arrotondamento
- 37 ⑤ Sottrazioni: strategia Nikhilam
- 43 Giochiamo con le addizioni e le sottrazioni
- 45 Esercitiamoci con le addizioni e le sottrazioni

Introduzione

L'importanza del calcolo a mente

Di fronte a una qualsiasi operazione di calcolo dobbiamo considerare tre aspetti fondamentali (Lucangeli, Sella e Berteletti, 2012):

1. La lettura e l'interpretazione corretta dei *segni dell'operazione* richiesta. Questo aspetto è fondamentale perché traduce il tipo di manipolazione che deve essere compiuta sulle numerosità presentate: a ogni simbolo corrisponde una precisa operazione logica. Il numero di simboli (e quindi delle operazioni logiche sottese), aumenta progressivamente proseguendo l'iter scolastico: $+$, $-$, \bullet , $:$, \leq , $\sqrt{\quad}$, Σ , \int , ecc.
2. La *procedura* da applicare. La conoscenza procedurale si manifesta in modo differente a seconda che il calcolo che stiamo eseguendo sia mentale o scritto. Nel *calcolo mentale*, le strategie procedurali da applicare sono di tipo costruttivo. Nel *calcolo scritto*, propriamente detto, le procedure sono legate alla componente grafica dell'operazione ed alle regole di tipo algoritmico che devono essere applicate secondo una precisa sequenza temporale (ad esempio, incolonnamento, sequenze di riporti, ecc.). Con il passare del tempo tali procedure si automatizzano.
3. I *fatti numerici*, ovvero quelle operazioni di base, come le tabelline o semplici operazioni, di cui conosciamo il risultato senza dover eseguire alcun calcolo ($6 + 4 = 10$; $19 - 4 = 15$, $16 : 2 = 8$). Sono appunto dei fatti che sono noti e immediatamente disponibili. I fatti numerici sono fondamentali sia quando eseguiamo i calcoli a mente sia quando eseguiamo i calcoli scritti; nel calcolo a mente possono anche bastare quando l'operazione è piuttosto facile o l'allenamento e l'esperienza approfonditi.

Poste tali considerazioni, in questa sede vogliamo rivolgere l'attenzione su alcune questioni:

- L'interpretazione corretta del segno dell'operazione. È bene supportare con l'uso di oggetti concreti l'associazione fra un determinato segno di operazione e la procedura di manipolazione corrispondente (immagini di insiemi di oggetti concreti che subiscono un cambiamento in numerosità a seconda delle quattro operazioni: $+$, $-$, \bullet , $:$).

- L’aspetto costruttivo del calcolo a mente. Il calcolo a mente è forse la competenza fondamentale che sta alla base dell’apprendimento matematico. Per eseguire corretti calcoli a mente sono coinvolti diversi processi cognitivi, tra cui la memoria di fatti numerici, la memoria di lavoro e, soprattutto, l’applicazione delle strategie. Allenare all’uso costruttivo delle strategie, stimolando il calcolo a mente, è un buon metodo per favorire l’evoluzione e il potenziamento dell’intelligenza numerica intesa come processo di manipolazione cognitiva del sistema del calcolo.
- L’automatizzazione delle procedure. Affinché una procedura possa essere efficacemente automatizzata deve essere profondamente compresa, altrimenti il carico per la memoria di lavoro diventa tale da appesantire e quindi rallentare il calcolo. Inoltre ricordiamo che le procedure di natura algoritmica, tipicamente legate al calcolo scritto, anche se consolidate, stimolano molto poco i processi legati alla cognizione numerica, perché rischiano di ridursi ad una mera ripetizione meccanica di passaggi.
- Il recupero dei fatti numerici. È fondamentale che i fatti numerici siano ben memorizzati cosicché il loro recupero avvenga in modo automatico e con il minimo sforzo cognitivo; inoltre, più sono i fatti numerici a disposizione nel bagaglio cognitivo, più veloci e sicure saranno le operazioni di calcolo.

Le attività proposte nell’opera *Strategie di calcolo* hanno proprio lo scopo di:

- facilitare la corretta interpretazione dei segni dell’operazione;
- potenziare l’aspetto costruttivo del calcolo a mente;
- comprendere a fondo le procedure;
- aumentare il numero dei fatti numerici immediatamente disponibili.

In questa sede parleremo principalmente di «calcolo a mente», per sottolineare la natura tipicamente costruttiva delle strategie; nel caso di numeri a più cifre può essere utile aiutarsi trascrivendo i risultati parziali su un foglio di carta, ma senza regole precise (per questo non parliamo esplicitamente di «calcolo scritto»); l’allenamento e il consolidamento delle tecniche consentiranno allo studente di risolvere sempre più calcoli completamente a mente, andando così a potenziare significativamente la sua capacità di manipolare cognitivamente il sistema di calcolo.

Struttura dell’opera

L’opera completa *Strategie di calcolo* nasce da un approfondito studio dei metodi orientali antichi e moderni per affrontare il calcolo aritmetico, considerati attraverso i paradigmi dell’algebra.

Proponiamo dunque una selezione di strategie, divertenti e accattivanti, tutte facenti riferimento ai *sutra* o regole dell’aritmetica vedica, dandone prima rigorosa dimostrazione algebrica e quindi esibendone la potenza per velocizzare e rendere semplice il calcolo.

Ci siamo ispirati al lavoro di Jagadguru Shankaracharya Shri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja, che tra il 1911 e il 1918 studia l’essenza della saggezza matematica racchiusa nei sedici Sutra dei Veda e nei loro corollari, giungendo a

una nuova e originale teoria, pubblicata per la prima volta nel 1965 nel testo *Vedic Mathematics*. Nell'opera vengono presentate diverse tecniche di calcolo, utili per sviluppare una maggiore flessibilità nel ragionamento logico perché propongono metodi alternativi di risoluzione dei problemi.

Riportiamo per completezza i 16 sutra. In questo fascicolo faremo riferimento ad alcuni di essi nello spiegare le strategie.

I 16 SUTRA
1. Per uno più del precedente
2. Tutti dal 9 e l'ultimo dal 10
3. In verticale e in diagonale
4. Trasponi e applica
5. Se la <i>Samuccaya</i> è la stessa, è zero
6. Se uno è in rapporto, l'altro è zero
7. Per addizione e per sottrazione
8. Per completamento o non-completamento
9. Calcolo differenziale
10. Per difetto
11. Specifico e generale
12. I resti per l'ultima cifra
13. L'ultimo e due volte il penultimo
14. Per uno meno del precedente
15. Il prodotto della somma
16. Tutti i moltiplicatori

Il nucleo di base della teoria può essere riassunto nel concetto di «semplificazione», ovvero la progressiva riduzione dei calcoli complessi in calcoli sempre più semplici che possono essere eseguiti anche a mente. Ricordiamo che questa è una tecnica classica delle scienze matematiche in genere; ad esempio fa spesso riferimento a tale paradigma l'informatica. Citiamo a tal proposito il classico metodo di programmazione «top-down» che si basa sull'idea di scomporre il problema principale in sotto-problemi più semplici, tali da poter essere proposti a un elaboratore elettronico che ha a disposizione un numero davvero limitato di funzioni. La bravura del programmatore sta nel semplificare opportunamente il problema principale, scegliendo la via più veloce e sicura.

Allo stesso modo, lo studente strategico, di fronte ad un calcolo complesso ed avendo a disposizione un'ampia rosa di tecniche di calcolo e di fatti numerici, può attingere da essi e dalla sua esperienza di solutore, per giungere al risultato velocemente e senza errori.

L'opera completa è composta da un manuale e da una serie di fascicoli di approfondimento. Nel manuale viene proposta una selezione delle tecniche e delle strategie in modo da offrire una visione generale ed esaustiva del metodo; a ogni argomento esposto corrisponde un fascicolo in cui la trattazione delle strategie sarà più completa, corredata di esempi ed esercizi per i ragazzi.

Sia nel manuale che nei volumi di approfondimento, la presentazione delle strategie procede seguendo passi ben precisi:

- attraverso esempi numerici viene proposta la tecnica, commentando e spiegando ogni singolo passaggio;
- il metodo viene, se necessario, generalizzato, riordinando la sequenza di passaggi che permettono di giungere alla soluzione;
- nei fascicoli operativi vengono proposti esercizi e attività per consolidare le tecniche proposte, ponendo l'accento sul confronto tra strategie diverse.

Bibliografia

- Bergamini M., Trifone A. e Barozzi G. (2013), *Matematica Verde, vol. 1*, Bologna, Zanichelli.
- Glover J.T. (2008), *Vedic Mathematics for Schools: Book 3*, Dehli, Motilal Banarsidass.
- Glover J.T. (2011), *Vedic Mathematics for Schools: Book 1*, Dehli, Motilal Banarsidass.
- Glover J.T. (2013), *Vedic Mathematics for Schools: Book 2*, Dehli, Motilal Banarsidass.
- Linardi S. e Galbusera R. (2007), *Percorsi modulari di matematica, vol. A – Aritmetica*, Milano, Mursia Scuola.
- Lucangeli D. e Mammarella I.C. (a cura di) (2010), *Psicologia della cognizione numerica: Approcci teorici, valutazione ed intervento*, Milano, FrancoAngeli.
- Lucangeli D., Sella F. e Berteletti I. (2012), *La discalculia e le difficoltà in aritmetica* (guida), Firenze, Giunti Scuola.
- Mahadevan C. (2011), *Basics of Speed Mathematics*, Astrarka Educational Solutions Private Limited (eBook).
- Malagoli G., Pellizzari E. e Lucangeli D. (2013a), *Strategie di calcolo. Dalla matematica vedica alla cognizione numerica*, Trento, Erickson.
- Malagoli G., Pellizzari E. e Lucangeli D. (2013b), *Imparare le tabelline usando le dita*, Trento, Erickson.
- Malagoli G., Pellizzari E. e Lucangeli D. (2014), *Moltiplicazioni*, Trento, Erickson.
- Mnemonic A.S. (2012), *Il mago matematico*, Narcissus Self Publishing (eBook).
- Re A.M., Pedron M., Tressoldi P.E. e Lucangeli L. (2013), *Response to specific training for students with different levels of mathematical difficulties: A controlled clinical study*, «Exceptional Children».
- Sharma N. e Sharma P. (2011), *Math Made Simple*, Create Space (eBook).
- Williams K. e Gaskell M. (2010), *The Cosmic Calculator: A Vedic Mathematics course for schools (voll. 1-3)*, Inspiration Books.

Strategie di base per le addizioni e le sottrazioni

In questa sezione riassumeremo le proprietà dei numeri, delle operazioni e gli strumenti di algebra che utilizzeremo nel corso dell'opera per esibire o giustificare le strategie di calcolo proposte.

Le proprietà

Molte strategie di calcolo a mente e scritto utilizzano le proprietà delle operazioni; durante l'esposizione delle tecniche, avremo cura di menzionare le specifiche proprietà a cui fanno riferimento, giustificando nel modo il più generale ed esaustivo possibile i passaggi che conducono alla strategia. L'addizione gode di due proprietà (commutativa e associativa), la sottrazione gode di una proprietà (invariantiva).

► Proprietà commutativa dell'addizione

Scambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia.

$$A + B = B + A$$

► Proprietà associativa dell'addizione

La somma di tre o più numeri non cambia se si associano diversamente gli addendi.

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$

► Proprietà invariantiva della sottrazione

La differenza tra due numeri non cambia aggiungendo o togliendo lo stesso numero sia dal minuendo che dal sottraendo.

$$A - B = (A \pm C) - (B \pm C)$$

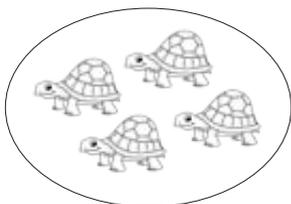
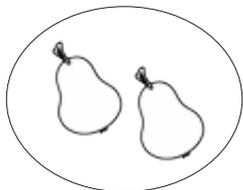
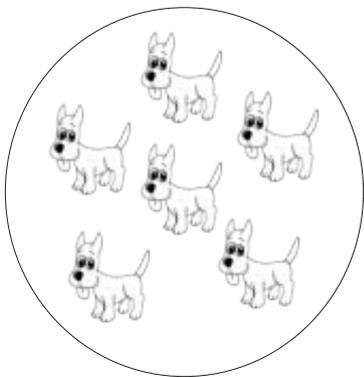
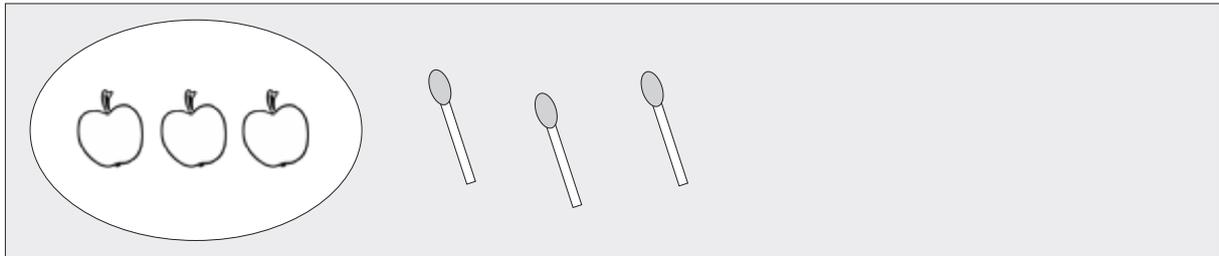
Il cerchio del 10

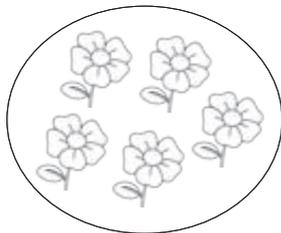
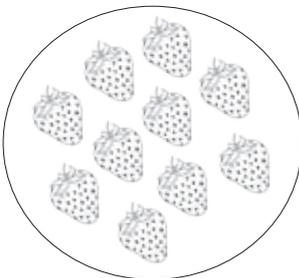
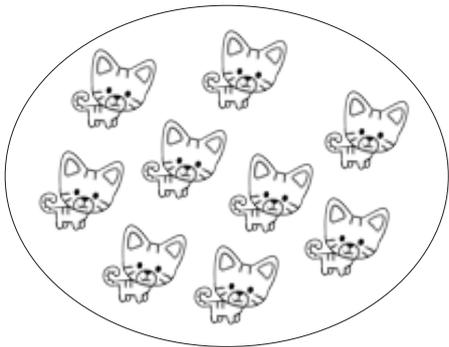
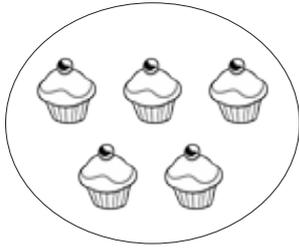
Costruiamo una circonferenza e inseriamo in modo equidistante i numeri da 1 a 10 lungo il perimetro e proseguiamo secondo il metodo descritto dal disegno: tale rappresentazione ci consente di dedurre una serie di osservazioni e caratteristiche legate ai numeri (figura 1.1).

Procurati un pacchetto di fiammiferi (o cannuce, o colori, ecc.).

Dati i seguenti insiemi, estrai dal tuo pacchetto tanti fiammiferi quanti sono gli elementi rappresentati negli insiemi proposti e appoggiali di volta in volta a fianco delle immagini.

Esempio:





Esercizi guidati

Trova il complementare rispetto al 100:

87	<p>(9) (10)</p> <p>.....</p> <p>..... è il complementare di 8 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 7 rispetto al</p>
----	---

Trova il complementare rispetto al 1000:

745	<p>(9) (9) (10)</p> <p>.....</p> <p>..... è il complementare di 7 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 4 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 5 rispetto al</p>
-----	--

Trova il complementare rispetto al 10000:

2647	<p>(9) (9) (9) (10)</p> <p>.....</p> <p>..... è il complementare di 2 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 6 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 4 rispetto al</p> <p>..... è il complementare di 7 rispetto al</p>
------	---

Esegui le sottrazioni con la strategia Nikhilam:

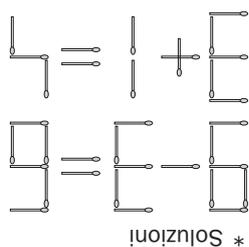
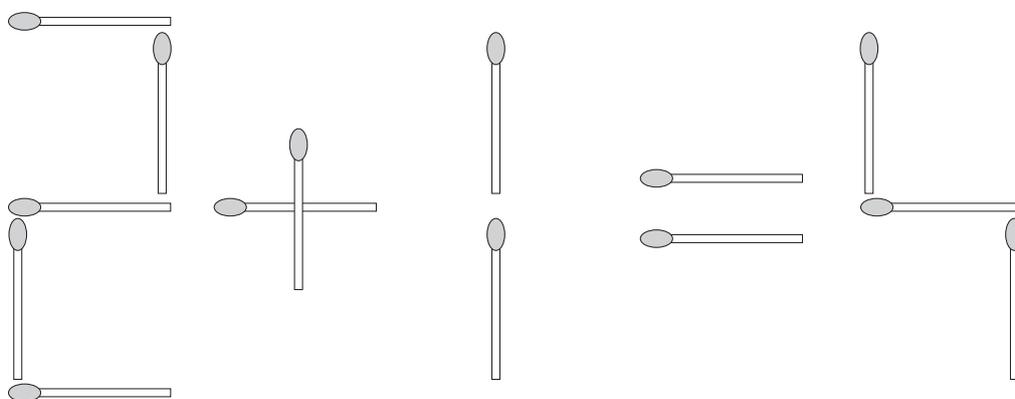
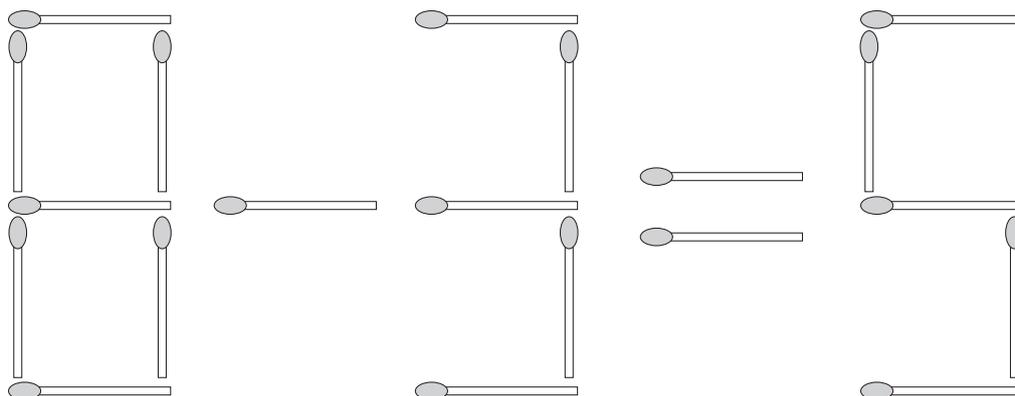
$\begin{array}{r} 4321 - \\ 3876 = \end{array}$	$\dots\dots\dots$
---	-------------------

$\begin{array}{r} 54328 - \\ 13876 = \end{array}$	$\dots\dots\dots$
---	-------------------

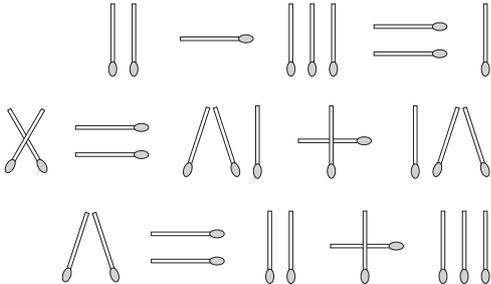
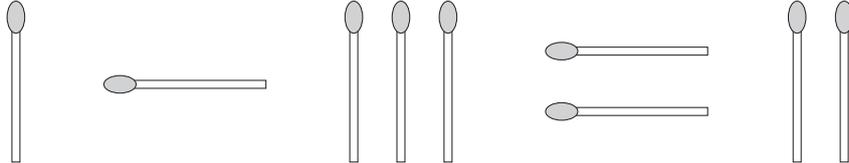
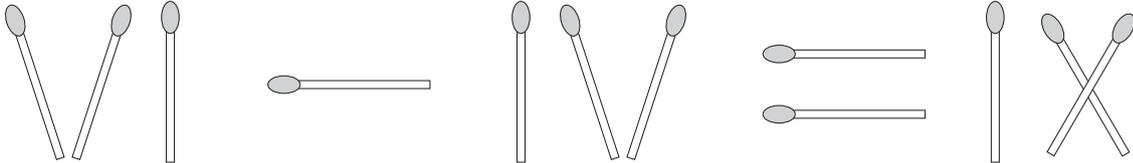
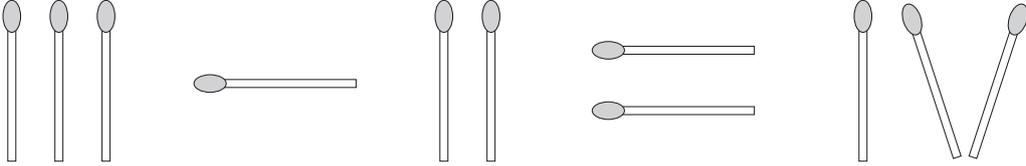
GIOCHIAMO CON LE ADDIZIONI E LE SOTTRAZIONI

Le divertenti attività che proponiamo in questa sezione hanno lo scopo di potenziare la capacità di manipolare i simboli che rappresentano le numerosità (espresse in cifre arabe e romane) e quelli che rappresentano le operazioni su di esse (limitatamente a +, -, =). Invitiamo a realizzare fisicamente i giochi utilizzando i fiammiferi.

Sposta un fiammifero e ottieni una nuova uguaglianza corretta.*



Sposta un fiammifero per ottenere un'uguaglianza corretta.*



* Soluzioni!