ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

Н. С. ПРОКОПЕНКО
Ю. О. ЗАХАРІЙЧЕНКО
Н. Л. КІНАЩУК

АЛГЕБРА 9

Н. С. ПРОКОПЕНКО
Ю. О. ЗАХАРІЙЧЕНКО
Н. Л. КІНАЩУК

АЛГЕБРА 9

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 9 КЛАСУ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2017

УДК [512:37.016](075.3)
П80

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Е к с п е р т и, які здійснили експертизу підручника під час проведення
конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів
і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа
«Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:
М. М. Пшечук, вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії Волицької загальноосвітньої школи
I–III ступенів Красилівського району Хмельницької області, старший вчитель;
Г. Я. Антонів, методист комунальної установи «Зборівський районний методичний кабінет»
Зборівської районної ради Тернопільської області;
О. М. Задоріна, в. о. доцента кафедри природничо-математичних дисциплін та інформаційних технологій
Одеського обласного інституту удосконалення вчителів, канд. пед. наук

Р е ц е н з е н т и:
Б. В. Олійник, завідувач кафедри математики факультету інформатики Національного університету
«Києво-Могилянська Академія», доцент, доктор фіз.-мат. наук;
Р. І. Петришин, перший проректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича,
професор, доктор фіз.-мат. наук;
С. В. Мартинюк, доцент кафедри алгебри та інформатики факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, канд. фіз.-мат. наук;
О. А. Олексюк, методист Науково-методичного центру
природничо-математичної освіти та технологій Інституту післядипломної педагогічної освіти
Київського університету імені Бориса Грінченка;
Л. В. Пекарська, методист кабінету фізико-математичних предметів, старший викладач кафедри
природничо-математичної освіти Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти;
І. П. Сігетій, учитель математики Ужгородської загальноосвітньої спеціалізованої школи-інтернату
з поглибленим вивченням окремих предметів Закарпатської обласної ради;
У. В. Остапчук, учитель математики, Заслужений учитель України

Автори висловлюють щиру вдячність Марії Прокопенко за надані можливості,
пов’язані з використанням фотографій

Автор концепції підручника Н. С. Прокопенко

Прокопенко Н. С.
П80 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. С. Прокопенко, Ю. О. Захарійченко, Н. Л. Кінащук. — Харків : Вид-во «Ранок», 2017. — 288 с.
ISBN 978-617-09-3352-2

УДК [512:37.016](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-3352-2

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

САМОКОНТРОЛЬ

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

В ОДИН КЛІК

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

TO BE SMART

РОЗДІЛ 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

ПОВТОРЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

САМОКОНТРОЛЬ

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

В ОДИН КЛІК

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

TO BE SMART

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

Шановні дев'ятикласники й дев'ятикласниці!

Ви рушаєте в подорож захопливим світом алгебри. Вашим надійним помічником буде підручник, який ви тримаєте в руках. Зорієнтуватися в його змісті вам допоможуть різноманітні рубрики, з якими вас ознайомить невеличкий дороговказ.

Цікавої вам подорожі!

1 НЕРІВНОСТІ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Лінійні нерівності та їх системи мають важливе практичне значення. За їх допомогою можна моделювати певні процеси, визначати оптимальні умови виробництва, транспортування, розміщення ресурсів, тобто розв'язувати задачі лінійного програмування. Опанувавши цей розділ, ви зможете:

- будувати математичні моделі реальних ситуацій у вигляді нерівностей та їх систем;
- розв'язувати геометричні задачі, досліджувати функції за допомогою нерівностей;
- правильно читати географічні карти, маркування на етикетках товарів; оцінювати переваги користування тими чи іншими послугами; вибирати оптимальні маршрути;
- розв'язувати тригонометричні, показникові, ірраціональні нерівності та їх системи, з якими ви познайомитеся в наступних класах.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Методи доведення нерівностей
- Нерівності в геометрії
- Розв'язування нерівностей із параметрами
- Розв'язування нерівностей із модулями
- Графічне розв'язування систем нерівностей із двома змінними
- Нерівності в «Началах» Евкліда
- Парадокси в теорії множин

«Найважливіше — не те велике, до чого додумалися інші, а те маленьке, до чого дійшов ти сам.»

Харукі Муракамі

Застосовуємо на практиці: відомості щодо практичного застосування знань, яких ви набудете, опанувавши цей розділ

Шляхом досліджень: теми навчальних проектів і досліджень

Цитати: висловлювання видатних людей

§1 ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ. ДОВЕДЕННЯ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ВЧОРА — Ви порівнювали натуральні, раціональні, дійсні числа та застосовували ці знання для порівняння геометричних та фізичних величин

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся про новий спосіб порівняння чисел та зробите перші кроки в доведенні нерівностей

ЗАВЖДИ — Ви зможете записувати математичною мовою «більше — менше», «тепліше — холодніше», «дорожче — дешевше», «швидше — повільніше» тощо

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Щороку в межах соціального проекту «Клич друзів — граймо разом!» Фонд Кличко проводить конкурс на встановлення сучасного спортивного майданчика. Кожен учень може позмагатися за свою школу, заповнивши анкету на сайті: my.klitschkofoundation.org

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Благодійний фонд виділив на створення дитячих спортивних майданчиків 200 000 грошових одиниць (далі — г. о.). Яку найбільшу кількість майданчиків за ціною 12 000 г. о. можна побудувати за ці кошти?

Розв'язання

Створимо математичну модель задачі. Якщо позначити кількість майданчиків через n, то їх вартість становитиме $(12\,000\cdot n)$ г. о. Щоб сума коштів на побудову майданчиків була меншою ніж 200 000 г. о., має виконуватись умова: $12\,000\cdot n<200\,000$.

Кількість майданчиків є **натуральним** числом. Найбільшим натуральним значенням n, яке задовольняє умову $12\,000\cdot n<200\,000$, є $n=16$. Отже, на виділені кошти можна побудувати 16 майданчиків.

Запис $12\,000\cdot n<200\,000$ відрізняється від відомого вам запису $12\,000\cdot n=200\,000$ тим, що замість знака «=» використано знак «<».

ГОЛОВНА ІДЕЯ

- Два вирази, які з'єднані між собою знаками «>», «<», «⩾», «⩽», називають **нерівностями**.
- Нерівності, у яких обидві частини є числовими виразами, називають **числовими нерівностями**.

Числові нерівності бувають:

- правильними (істинними), наприклад: $-2>-4$; $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$; $\sqrt{7}<3$;
- неправильними (хибними), наприклад: $-2>1$; $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$; $\sqrt{11}>4$.

СЛІД ЗНАТИ!

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числова нерівність
- знаки «>», «<», «⩾», «⩽»
- метод різниці
- строгі та нестрогі нерівності
- правильні та неправильні нерівності

РОЗМИНКА 1

Укажіть серед наведених числових нерівностей правильні:

1) $-25>-1$; 2) $5{,}8<-8{,}5$; 3) $\frac{3}{8}>\frac{3}{11}$; 4) $-\frac{5}{9}<-\frac{4}{9}$; 5) $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

16

Вчора, сьогодні, завжди: що ви знаєте, чого навчитеся, як зможете застосувати

Актуальна задача: задачі практичного змісту (з повним або частковим розв'язанням)

Головна ідея: основний теоретичний матеріал

Слід знати: основні формули, пояснення, зауваження, які потрібно враховувати під час виконання вправ

Ключові терміни параграфа

§ 1

Ви вже вмієте порівнювати між собою натуральні числа, цілі числа, десяткові дроби тощо (тобто дійсні числа), використовуючи певні правила. У цьому параграфі ви познайомитеся з методом порівняння чисел і виразів, який має назву **метод різниці**.

Розглянемо приклади, наведені в таблиці. Для кожної правильної нерівності та рівності знайдемо різницю чисел, розташованих у лівій і правій частинах, та порівняємо цю різницю з нулем.

Нерівність або рівність	Різниця лівої та правої частин	Порівняння різниці з нулем
$12>5$	$12-5=7$	$7>0$, різниця чисел більша за нуль
$47<60$	$47-60=-13$	$-13<0$, різниця чисел менша від нуля
$9=9$	$9-9=0$	$0=0$, різниця чисел **дорівнює** нулю

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Знаки відношень першими почали використовувати англійські математики: знаки «>» і «<» — Томас Гарріот (1560–1621); знак «=» — Роберт Рекорд (бл. 1510–1587).
- Окрім знаків нерівностей, вам відомий знак «≠» (не дорівнює). Запис $a \neq b$ означає, що $a<b$ або $a>b$.

Чи помітили ви залежність між значенням шуканої різниці та знаками «>», «< », «=»? Залежно від знака різниці роблять висновок про результат порівняння чисел.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Число a вважають **більшим** за число b, якщо різниця $a-b$ є **додатним** числом. Число a вважають **меншим** від числа b, якщо різниця $a-b$ є **від'ємним** числом.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо $a>b$, то $a-b>0$, і навпаки, якщо $a-b>0$, то $a>b$.

Якщо $a<b$, то $a-b<0$, і навпаки, якщо $a-b<0$, то $a<b$.

Якщо $a=b$, то $a-b=0$, і навпаки, якщо $a-b=0$, то $a=b$.

СЛІД ЗНАТИ!

Для двох чисел a і b виконується лише одне зі співвідношень: або $a>b$, або $a<b$, або $a=b$.

Для порівняння двох чисел a і b досить утворити різницю $a-b$ і з'ясувати, яким числом вона є: додатним, від'ємним чи нулем.

Такий метод порівняння називають **методом різниці**.

АЛГОРИТМ

Алгоритм порівняння чисел a і b методом різниці

1. Утворити різницю $a-b$.
2. Визначити знак різниці $a-b$.
3. Зробити висновок: якщо $a-b>0$, то $a>b$; якщо $a-b<0$, то $a<b$; якщо $a-b=0$, то $a=b$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для порівняння чисел a і b можна визначати знак різниці $a-b$ або знак різниці $b-a$.

17

Чи відомо вам? Цікава інформація про історію та сучасність

Запам'ятайте: основні означення, правила, твердження, теореми

Ключовий момент: коментарі, на які слід звернути увагу

Алгоритми виконання математичних дій

Розминка: усні та письмові вправи на закріплення нового матеріалу

Поміркуйте: запитання і завдання для більш глибокого осмислення матеріалу

Перерва на логіку: задачі на розвиток логічного мислення

Розділ 1

$a<b$

$a \quad b \quad x$

$b<a$

$b \quad a \quad x$

Кожному числу відповідає деяка точка координатної (числової) прямої, причому більшому числу відповідає точка, розташована праворуч від точки, яка відповідає меншому числу (див. рисунок).

РОЗМИНКА 2

1 Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $a-b=2{,}7$; 2) $a-b=-\sqrt{3}$; 3) $a=b+\frac{2}{3}$; 4) $b+3=a+1$.

2 Порівняйте значення виразів $5x-1$ і $4x+1$, якщо:

1) $x=0$; 2) $x=2$; 3) $x=\frac{3}{5}$; 4) $x=2{,}5$.

3 Дано числа a, b, c, d, e. Відомо, що $d<c$, $a>c$, $b>e$, $e>a$.

1) Зобразіть на числовій прямій задані числа.
2) Запишіть задані числа в порядку: а) зростання; б) спадання.
3) Знайдіть серед заданих чисел найбільше і найменше.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте записати всі нерівності між числами, зображеними на числовій прямій.

$a \quad d \quad c \quad x$

СЛІД ЗНАТИ!

Нерівності бувають **строгими** і **нестрогими**:

- знаки «>» і «<» є знаками строгих нерівностей;
- знаки «⩾» і «⩽» є знаками нестрогих нерівностей.

Нерівності	Знак нерівності	Як читають, що означає
Строгі	$a<b$	a менше від b
	$a>b$	a більше за b
Нестрогі	$a \leqslant b$	a менше або дорівнює (не більше) b, тобто $a<b$ або $a=b$
	$a \geqslant b$	a більше або дорівнює (не менше) b, тобто $a>b$ або $a=b$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1. Чи зможете ви за 5 секунд визначити, який дріб більший: $\frac{4}{9}$ або $\frac{8}{17}$?

2. У заданому виразі розставте дужки так, щоб отримати число не менше від 50:

$2:2-3:3-4:4-5:5.$

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Доведіть нерівність, якщо x — довільне дійсне число:

1) $x^2+9 \geqslant 6x$; 2) $x^2+25 \geqslant 10x$; 3) $4x^2 \geqslant 12x-9$; 4) $16x^2 \geqslant 8x-1$.

Доведіть, що:

5) квадрат суми двох довільних дійсних чисел не менший від їх добутку, помноженого на 4;

6) сума квадратів двох довільних дійсних чисел не менша від їх добутку, помноженого на -2.

Доведіть нерівність, якщо x і y — довільні дійсні числа:

7) $x^6+y^6 \geqslant 2x^3y^3$; 8) $x^8+y^8 \geqslant 2x^4y^4$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{a+b}{2}$ — середнє арифметичне двох чисел a і b

ПРИКЛАД 3

Доведіть нерівність $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, якщо a і b — невід'ємні дійсні числа.

Доведення

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо різницю лівої та правої частин нерівності.	$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$
КРОК 2	Виконаємо перетворення — зведемо числові вирази до спільного знаменника і застосуємо в чисельнику формулу квадрата різниці.	$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$
КРОК 3	Проаналізуємо знак отриманого числового виразу.	$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, $2>0$, тому $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqslant 0$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
КРОК 4	Зробимо висновок: різниця додатна, отже, ліва частина нерівності не менша від правої. **Нерівність доведено.**	$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
	Зверніть увагу: вираз $\sqrt{ab}$ називають **середнім геометричним** двох чисел a і b.	

Тренуємося: вправи, що містять 8 завдань, диференційованих за рівнем навчальних досягнень: завдання 1 і 2 — початковий рівень; 3 і 4 — середній; 5 і 6 — достатній; 7 і 8 — високий

Приклади з покроковим розв'язанням, докладним поясненням і записом розв'язання

Інтелектуальний фітнес: система різнорівневих вправ зростаючої складності

Зверніть увагу: коментарі, пояснення, зауваження

To be smart: інформація про цікаві книжки, курси, проекти тощо

Завдання із зіркою: вправи на аналіз, узагальнення та систематизацію отриманих знань

Math for life: задачі на створення математичних моделей до ситуацій із реального життя

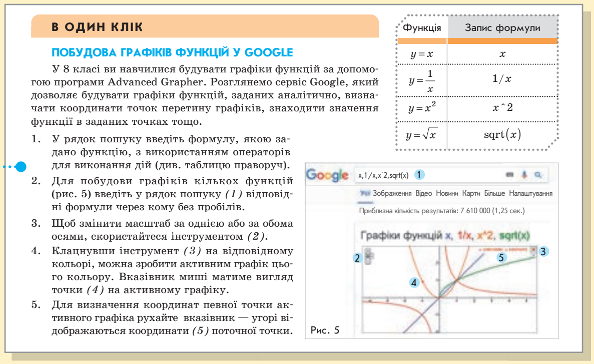
Домашнє завдання з посиланням на відповідні приклади в параграфі

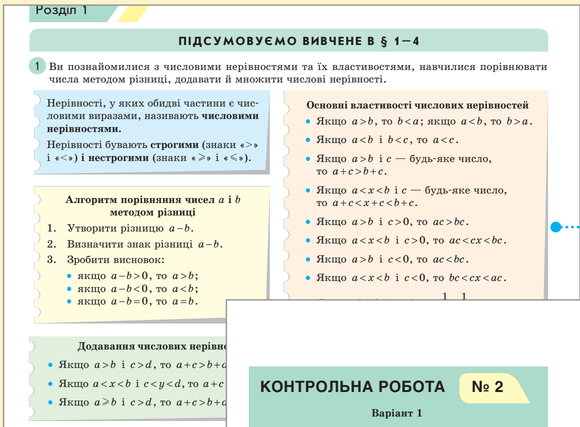
Майбутня професія: корисна інформація щодо вибору професії

Знаю, вмію, можу: самостійні роботи для самоконтролю та підготовки до ДПА

Вправи на повторення для підготовки до наступного параграфа

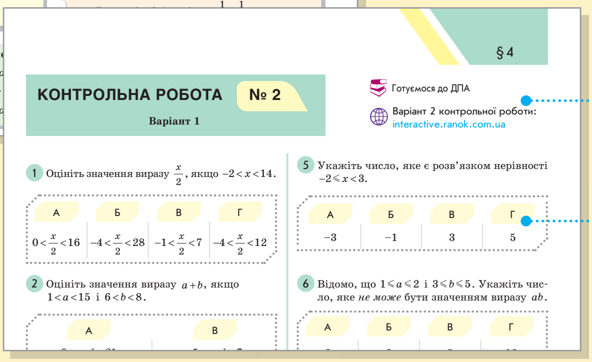
В один клік: приклади використання комп'ютерних програм і сервісів для дослідження функцій, розв'язання нерівностей та їх систем





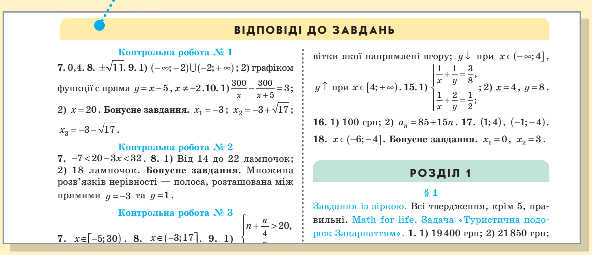
Підсумовуємо: узагальнюючий теоретичний матеріал для підготовки до контрольної роботи

Інтернет-підтримка підручника: онлайн-тестування за кожною темою

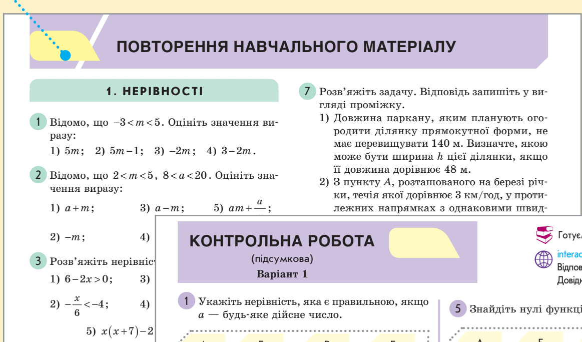


Контрольні роботи

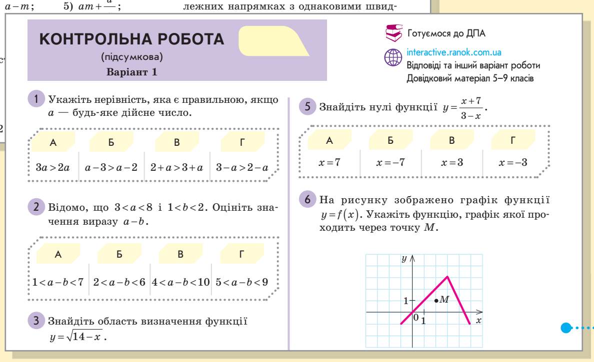
Відповіді до завдань

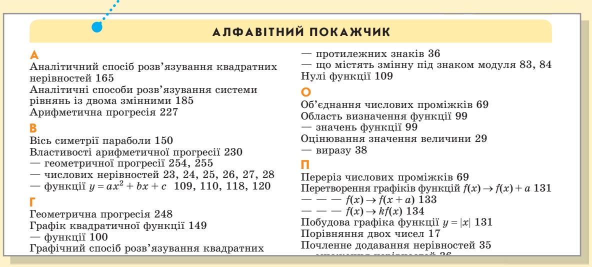


Повторення навчального матеріалу: завдання для повторення за основними темами на початку та в кінці підручника



Алфавітний покажчик





Підсумкова контрольна робота

ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

Областю допустимих значень виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot a}{n\cdot a}=\frac{ma}{na}$, $a\neq 0$, $n\neq 0$
- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot a\cdot b}{n\cdot a\cdot b}=\frac{mab}{nab}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $n\neq 0$

- $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$, $c\neq 0$
- $\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\frac{AD\pm BC}{CD}$, $C\neq 0$, $D\neq 0$

- $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$, $B\neq 0$, $D\neq 0$
- $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$, $B\neq 0$, $D\neq 0$, $C\neq 0$

1 Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $\frac{3}{x}$; 3) $\frac{x+4}{6}$; 5) $\frac{x-8}{x+7}$; 7) $\frac{5x}{x^2-1}$;
2) $-\frac{5}{x}$; 4) $\frac{x-1}{10}$; 6) $\frac{x+2}{x-3}$; 8) $\frac{9x}{x^2-4}$.

2 Скоротіть дріб:

1) $\frac{6}{6x}$; 3) $\frac{14a}{7a}$; 5) $\frac{60m^8}{10m^4}$; 7) $\frac{a^2x^5y^8}{x^4y^8a^3}$;
2) $\frac{8y}{8}$; 4) $\frac{3b}{9b}$; 6) $\frac{20n^3}{40n}$; 8) $\frac{m^5n^{12}c^{11}}{n^{12}m^4c^{10}}$.

3 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}$; 4) $\frac{4}{m}+\frac{6}{m}$; 7) $\frac{b^2}{b+3}-\frac{3^2}{b+3}$;
2) $\frac{9}{7}-\frac{2}{7}$; 5) $\frac{a}{a+7x}+\frac{7x}{a+7x}$; 8) $\frac{n^2}{n-4}-\frac{16}{n-4}$.
3) $\frac{5}{n}-\frac{4}{n}$; 6) $\frac{4y}{4y-3}-\frac{3}{4y-3}$;

4 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; 3) $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}$; 5) $\frac{1}{x}-\frac{3}{y}$; 7) $\frac{7}{y^3}+\frac{3}{y^2}$;
2) $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$; 4) $\frac{p}{5}+\frac{p}{20}$; 6) $\frac{5}{b}+\frac{1}{k}$; 8) $\frac{1}{t^5}-\frac{2}{t^4}$.

5 Виконайте дії:

1) $\frac{18}{5}\cdot\frac{5}{9}$; 4) $\frac{6}{p-3}:\frac{18}{p-3}$; 7) $\left(\frac{2}{a^4}\right)^5\cdot\frac{a^{20}}{16}$;
2) $\frac{7}{6}:\frac{7}{24}$; 5) $\frac{x-1}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{7}$; 8) $\frac{3^5}{b^{16}}:\left(\frac{3}{b^4}\right)^4$.
3) $\frac{q+2}{4}\cdot\frac{8}{q+2}$; 6) $\frac{y+2}{2}:\frac{y^2-4}{y-2}$;

6 Відомо, що $n-p=5$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{10}{n-p}$; 4) $\frac{20}{p}:\frac{n-p}{p}$; 7) $\frac{15-p}{n-p}+\frac{n}{n-p}$;
2) $\frac{p-n}{5}$; 5) $\frac{30}{6n-6p}$; 8) $\frac{n+45}{n-p}+\frac{p}{p-n}$.
3) $\frac{n}{n-p}\cdot\frac{15}{n}$; 6) $\frac{25}{5p-5n}$;

7 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x+1}=0$; 3) $\frac{x-1}{x+3}=0$; 5) $\frac{6}{x-4}=0$; 7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$;

2) $\frac{3x}{x-1}=0$; 4) $\frac{x+4}{x-2}=0$; 6) $\frac{7}{x+5}=0$; 8) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$$

8 Обчисліть значення виразу:

1) 8^{-1}; 3) 2^{-3}; 5) $40\cdot 5^{-1}$; 7) $2^{-20}\cdot 4^{10}$;

2) 7^{-1}; 4) 3^{-2}; 6) $54\cdot 6^{-1}$; 8) $9^{-12}\cdot 3^{24}$.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$
- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^{n}$, $a\neq 0$
- $a^0=1$, $a\neq 0$

9 Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 14; 3) 300; 5) 34 000; 7) 34,8;

2) 56; 4) 600; 6) 910 000; 8) 652,1.

10 Задано функцію $y=\frac{1}{x}$. Знайдіть:

1) $y(1)$; 3) $y(-2)$; 5) $y(4)$; 7) $y\left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $y(2)$; 4) $y(-3)$; 6) $y(-4)$; 8) $y\left(-\frac{1}{3}\right)$.

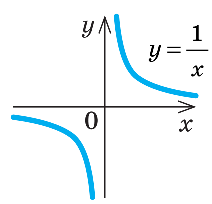
$a=a_1\cdot 10^n$,

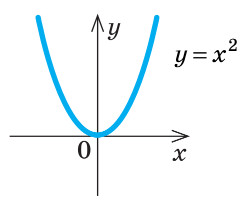
де $1\leqslant a_1<10$, $n\in \boldsymbol{N}$

11 Укажіть точки, які належать графіку функції $y=x^2$:

1) $O(0;0)$; 3) $B(2;4)$; 5) $D(-5;25)$; 7) $P\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$;

2) $A(1;1)$; 4) $C(3;9)$; 6) $E(-10;100)$; 8) $Q\left(\frac{2}{7};\frac{49}{4}\right)$.





12 Обчисліть:

1) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{25}$; 5) $5\cdot\sqrt{4}$; 7) $\frac{30}{\sqrt{36}}$;

2) $\sqrt{1}$; 4) $\sqrt{9}$; 6) $6\cdot\sqrt{16}$; 8) $\frac{\sqrt{81}}{90}$.

13 Укажіть вираз, значення якого є ірраціональним числом:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; 3) $\sqrt{2}$; 5) $5-\sqrt{16}$; 7) $\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)$;

2) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; 4) $5\sqrt{6}$; 6) $\sqrt{49}+3$; 8) $\left(\sqrt{19}-4\right)\left(\sqrt{19}+4\right)$.

14 Порівняйте числа:

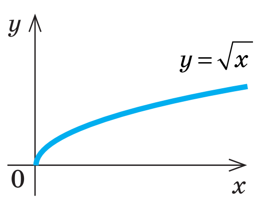
1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$; 4) 5 і $\sqrt{25}$; 7) 1,87... і 1,(8);

2) $\sqrt{11}$ і $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt{57}$ і 8; 8) 18,53... і 18,(5).

3) $\sqrt{16}$ і 4; 6) $\sqrt{51}$ і 7;

$\frac{m}{n}$ — раціональне число, $m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$

- $\sqrt{a^2}=|a|$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$, $ab\geqslant 0$
- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$,
  $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, $\dfrac{a}{b}\geqslant 0$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$



- $x^2=m$, $x=\pm\sqrt{m}$, $m\geqslant 0$
- $ab=0$, якщо
  $a=0$ або $b=0$

Для $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

де $D=b^2-4ac$

15 Обчисліть:

1) $\sqrt{(-3)^2}$; 3) $1+\sqrt{(-1)^2}$; 5) $\sqrt{(7-8)^2}$; 7) $\sqrt{49}\cdot\sqrt{(-2)^2}$;

2) $\sqrt{(-5)^2}$; 4) $4-\sqrt{(-4)^2}$; 6) $\sqrt{(1-31)^2}$; 8) $\sqrt{100}:\sqrt{(-10)^2}$.

16 Обчисліть:

1) $\sqrt{\dfrac{12^2}{10^2}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{4}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7\cdot 16}$;

2) $\sqrt{\dfrac{11^2}{15^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{36}{25}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 8) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5\cdot 49}$.

17 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 7) $\dfrac{1}{5-\sqrt{24}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 8) $\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}$.

18 Укажіть точки, які належать графіку функції $y=\sqrt{x}$:

1) $O(0;0)$; 3) $B(-1;1)$; 5) $D(16;4)$; 7) $P(0{,}01;0{,}1)$;

2) $A(1;1)$; 4) $C(5;25)$; 6) $E(36;6)$; 8) $Q(0{,}09;0{,}3)$.

19 Укажіть старший коефіцієнт a, другий коефіцієнт b та вільний член c квадратного рівняння вигляду $ax^2+bx+c=0$:

1) $2x^2+7x-1=0$; 5) $-x^2+x-12=0$;

2) $-3x^2-4x+2=0$; 6) $x^2+x+11=0$;

3) $x^2+6x=0$; 7) $0{,}5x^2+2{,}3x-6{,}1=0$;

4) $x^2-2=0$; 8) $-4{,}6x^2+1{,}9x+0{,}4=0$.

20 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=1$; 3) $x^2-4=0$; 5) $x^2-3x=0$; 7) $x^2=5x$;

2) $x^2=5$; 4) $x^2-6=0$; 6) $x^2+2x=0$; 8) $x^2=-7x$.

21 Укажіть рівняння, які не мають коренів:

1) $x^2=-1$; 3) $x^2+9=0$; 5) $x^2=-25x$; 7) $x^2+8=8$;

2) $x^2=-5$; 4) $x^2+16=0$; 6) $x^2=-100x$; 8) $x^2-6=-6$.

22 Знайдіть дискримінант квадратного рівняння вигляду $ax^2+bx+c=0$ і визначте, скільки коренів має рівняння:

1) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-4x+4=0$; 7) $2x^2-3x+1=0$;

2) $x^2+3x-4=0$; 5) $x^2+x+3=0$; 8) $3x^2+5x-2=0$.

3) $x^2+2x+1=0$; 6) $-x^2+x-4=0$;

23 Використовуючи теорему Вієта, знайдіть суму та добуток коренів квадратного рівняння (якщо вони існують):

1) $x^2-2x-3=0$; 4) $x^2+9x-6=0$; 7) $2x^2-16x+4=0$;

2) $x^2+5x+1=0$; 5) $x^2-x+5=0$; 8) $3x^2+12x-6=0$.

3) $x^2-8x+3=0$; 6) $x^2+3x+8=0$;

24 Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+10)(x-3)}{x+10}$; 4) $\frac{x}{x^2+6x}$; 7) $\frac{x^2-3x+2}{x-2}$;

2) $\frac{x-14}{(x+5)(x-14)}$; 5) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$; 8) $\frac{x+1}{x^2-2x-3}$.

3) $\frac{x^2-5x}{x-5}$; 6) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$;

25 Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $x^4-7x^2+6=0$; 5) $x-5\sqrt{x}+4=0$;

2) $x^4+8x^2-9=0$; 6) $x-2\sqrt{x}-8=0$;

3) $(3x+1)^4-(3x+1)^2-6=0$; 7) $\sqrt{x-10}-\frac{6}{\sqrt{x-10}}=5$;

4) $(8x-7)^4+3(8x-7)^2-10=0$; 8) $\sqrt{5+2x}+\frac{14}{\sqrt{5+2x}}=9$.

26 До штучного ставка рівномірно надходить вода зі швидкістю 10 л/с. Три помпи відкачують воду зі ставка. Продуктивність кожної помпи дорівнює x л/с. Відомо, що за 5 хв об'єм води в ставку збільшується на 300 л.

1) Скільки літрів води відкачують три помпи за 1 с?
2) На скільки літрів збільшується об'єм води в ставку щосекунди?
3) Запишіть рівняння для визначення x.
4) Знайдіть x.
5) Скільки помп із такою самою продуктивністю необхідно задіяти, щоб об'єм води в ставку став зменшуватися?

27 Першу частину маршруту завдовжки 120 км автобус проїхав зі швидкістю x км/год, а другу частину завдовжки 180 км — $(x+10)$ км/год. Уся подорож тривала 3 год 30 хв.

1) Складіть вираз для визначення часу, витраченого автобусом на подолання першої частини маршруту.
2) Складіть вираз для визначення часу, витраченого автобусом на подолання другої частини маршруту.
3) Складіть рівняння для визначення x.

- Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$
- Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

Виконуючи дії з дробами, пам'ятайте про ОДЗ!

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою рівняння

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Рівняння
↓
Розв'язування рівняння
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1
(діагностична)

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Варіант 2 контрольної роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Скоротіть дріб $\frac{6a}{2a^2}$.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{a}$	$3a$	$\frac{3}{a}$	$\frac{a}{3}$

2 Винесіть множник із-під знака кореня $\sqrt{20}$.

А	Б	В	Г
$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{10}$	$5\sqrt{2}$

3 $\left(\frac{8}{n}\right)^{-1} =$

А	Б	В	Г
$\frac{n}{8}$	$-\frac{n}{8}$	$-\frac{8}{n}$	$\frac{8}{n}$

4 Якщо $y<0$, то $\sqrt{y^6} =$

А	Б	В	Г
y^3	$-y^3$	$-y^4$	y^4

5 Виконайте дії $\frac{b+1}{4}:\frac{b+1}{b}$.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{b}$	$\frac{(b+1)^2}{4b}$	$\frac{4b}{(b+1)^2}$	$\frac{b}{4}$

6 Розв'яжіть рівняння $x^2-2x-3=0$.

А	Б	В	Г
$-3;\ 1$	$3;\ -1$	$3;\ 1$	$-3;\ -1$

7 Обчисліть: $\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}$.

8 Розв'яжіть рівняння $x^4-10x^2-11=0$.

9 Задано функцію $y=\frac{x^2-3x-10}{x+2}$.

1) Знайдіть область визначення функції.

2) Побудуйте графік функції.

10 У новому будинку бригада робітників мала змонтувати 300 металопластикових вікон, монтуючи x вікон щодня. Завдання було виконано на три дні раніше наміченого строку, оскільки щодня бригада монтувала на 5 вікон більше, ніж було заплановано.

1) Складіть рівняння для визначення x.

2) Розв'яжіть отримане рівняння.

Бонусне завдання

Розв'яжіть рівняння

$(x^2+6x-7)(x^2+6x+8)=16$.

«Якщо не робиш промахів, перестаєш удосконалюватися.»

Джордж Мартін

1 НЕРІВНОСТІ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Лінійні нерівності та їх системи мають важливе практичне значення. За їх допомогою можна моделювати певні процеси, визначати оптимальні умови виробництва, транспортування, розміщення ресурсів, тобто розв'язувати задачі лінійного програмування. Опанувавши цей розділ, ви зможете:

- будувати математичні моделі реальних ситуацій у вигляді нерівностей та їх систем;
- розв'язувати геометричні задачі, досліджувати функції за допомогою нерівностей;
- правильно читати географічні карти, маркування на етикетках товарів; оцінювати переваги користування тими чи іншими послугами; вибирати оптимальні маршрути;
- розв'язувати тригонометричні, показникові, ірраціональні нерівності та їх системи, з якими ви ознайомитеся в наступних класах.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Методи доведення нерівностей
- Нерівності в геометрії
- Розв'язування нерівностей із параметрами
- Розв'язування нерівностей із модулями
- Графічне розв'язування систем нерівностей із двома змінними
- Нерівності в «Началах» Евкліда
- Парадокси в теорії множин

«Найважливіше — не те велике, до чого додумалися інші, а те маленьке, до чого дійшов ти сам.»

Харукі Муракамі

§ 1 ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ. ДОВЕДЕННЯ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ВЧОРА	Ви порівнювали натуральні, раціональні, дійсні числа та застосовували ці знання для порівняння геометричних та фізичних величин
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся про новий спосіб порівняння чисел та зробите перші кроки в доведенні нерівностей
ЗАВЖДИ	Ви зможете записувати математичною мовою «більше — менше», «тепліше — холодніше», «дорожче — дешевше», «швидше — повільніше» тощо

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Щороку в межах соціального проекту «Клич друзів — граймо разом!» Фонд Кличко проводить конкурс на встановлення сучасного спортивного майданчика. Кожен учень може позмагатися за свою школу, заповнивши анкету на сайті: my.klitschkofoundation.org

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Благодійний фонд виділив на створення дитячих спортивних майданчиків 200 000 грошових одиниць (тут і далі — г. о.). Яку найбільшу кількість майданчиків за ціною 12 000 г. о. можна побудувати за ці кошти?

Розв'язання

Створимо математичну модель задачі. Якщо позначити кількість майданчиків через n, то їх вартість становитиме $(12\,000 \cdot n)$ г. о. Щоб сума коштів на побудову майданчиків була меншою ніж 200 000 г. о., має виконуватись умова: $12\,000 \cdot n < 200\,000$.

Кількість майданчиків є **натуральним** числом. Найбільшим натуральним значенням n, яке задовольняє умову $12\,000 \cdot n < 200\,000$, є $n = 16$. Отже, на виділені кошти можна побудувати 16 майданчиків.

Запис $12\,000 \cdot n < 200\,000$ відрізняється від відомого вам запису $12\,000 \cdot n = 200\,000$ тим, що замість знака «=» використано знак «<».

ГОЛОВНА ІДЕЯ

- Два вирази, які з'єднані між собою знаками «>», «<», «$\geqslant$», «$\leqslant$», називають **нерівностями**.
- Нерівності, у яких обидві частини є числовими виразами, називають **числовими нерівностями**.

СЛІД ЗНАТИ!

Числові нерівності бувають:

- правильними (істинними), наприклад: $-2 > -4$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $\sqrt{7} < 3$;
- неправильними (хибними), наприклад: $-2 > 1$; $\frac{2}{3} < \frac{1}{2}$; $\sqrt{11} > 4$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числова нерівність
- знаки «>», «<», «$\geqslant$», «$\leqslant$»
- метод різниці
- строгі і нестрогі нерівності
- правильні і неправильні нерівності

РОЗМИНКА 1

Укажіть серед наведених числових нерівностей правильні:

1) $-25 > -1$; 2) $5{,}8 < -8{,}5$; 3) $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$; 4) $-\frac{5}{9} < -\frac{4}{9}$; 5) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Ви вже вмієте порівнювати між собою натуральні числа, цілі числа, десяткові дроби (тобто дійсні числа), використовуючи певні правила. У цьому параграфі ви познайомитеся з методом порівняння чисел і виразів, який має назву **метод різниці**.

Розглянемо приклади, наведені в таблиці. Для кожної правильної нерівності та рівності знайдемо різницю чисел, розташованих у лівій і правій частинах, та порівняємо цю різницю з нулем.

Нерівність або рівність	Різниця лівої і правої частин	Порівняння різниці з нулем
$12>5$	$12-5=7$	$7>0$, різниця чисел більша за нуль
$47<60$	$47-60=-13$	$-13<0$, різниця чисел менша від нуля
$9=9$	$9-9=0$	$0=0$, різниця чисел **дорівнює** нулю

Чи помітили ви залежність між значенням шуканої різниці та знаками «>», «< », «=»? Залежно від знака різниці роблять висновок про результат порівняння чисел.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Знаки відношень першими почали використовувати англійські математики:
знаки «>» і «<» — Томас Гарріот (1560–1621);
знак «=» — Роберт Рекорд (бл. 1510–1587).
- Окрім знаків нерівностей, вам відомий знак «≠» (не дорівнює). Запис $a \neq b$ означає, що $a<b$ або $a>b$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Число a **більше** за число b, якщо різниця $a-b$ є **додатним** числом. Число a **менше** від числа b, якщо різниця $a-b$ є **від'ємним** числом.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо $a>b$, то $a-b>0$, і навпаки, якщо $a-b>0$, то $a>b$.

Якщо $a<b$, то $a-b<0$, і навпаки, якщо $a-b<0$, то $a<b$.

Якщо $a=b$, то $a-b=0$, і навпаки, якщо $a-b=0$, то $a=b$.

СЛІД ЗНАТИ!

Для двох чисел a і b виконується лише одне зі співвідношень: або $a>b$, або $a<b$, або $a=b$.

Для порівняння двох чисел a і b досить утворити різницю $a-b$ і з'ясувати, яким числом вона є: додатним, від'ємним чи нулем.

Такий метод порівняння називають **методом різниці**.

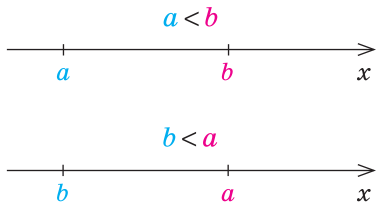
АЛГОРИТМ

Алгоритм порівняння чисел a і b методом різниці

1. Утворити різницю $a-b$.
2. Визначити знак різниці $a-b$.
3. Зробити висновок: якщо $a-b>0$, то $a>b$;
якщо $a-b<0$, то $a<b$;
якщо $a-b=0$, то $a=b$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для порівняння чисел a і b можна визначати знак різниці $a-b$ або різниці $b-a$.



Кожному числу відповідає деяка точка координатної (числової) прямої, причому більшому числу відповідає точка, розташована праворуч від точки, яка відповідає меншому числу (див. рисунок).

РОЗМИНКА 2

1 Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $a-b=2{,}7$; 2) $a-b=-\sqrt{3}$; 3) $a=b+\frac{2}{3}$; 4) $b+3=a+1$.

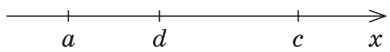
2 Порівняйте значення виразів $5x-1$ і $4x+1$, якщо:

1) $x=0$; 2) $x=2$; 3) $x=\frac{3}{5}$; 4) $x=2{,}5$.

3 Дано числа a, b, c, d, e. Відомо, що $d<c$, $a>c$, $b>e$, $e>a$.
1) Зобразіть на числовій прямій задані числа.
2) Запишіть задані числа в порядку: а) зростання; б) спадання.
3) Знайдіть серед заданих чисел найбільше і найменше.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте записати всі нерівності між числами, зображеними на числовій прямій.



СЛІД ЗНАТИ!

Нерівності бувають **строгими** і **нестрогими**:
- знаки «$>$» і «$<$» є знаками строгих нерівностей;
- знаки «$\geqslant$» і «$\leqslant$» є знаками нестрогих нерівностей.

Нерівності	Знак нерівності	Як читають, що означає
Строгі	$a<b$	a менше від b
	$a>b$	a більше за b
Нестрогі	$a\leqslant b$	a менше або дорівнює (не більше) b, тобто $a<b$ або $a=b$
	$a\geqslant b$	a більше або дорівнює (не менше) b, тобто $a>b$ або $a=b$

У строгих нерівностях передбачається відсутність рівності правої і лівої частин, у нестрогих — припускається їх рівність. Наприклад, нестрогі нерівності $3\leqslant 7$, $5\geqslant 5$ є правильними.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Знаки нестрогих нерівностей уперше ввів французький фізик П'єр Бугер у 1734 р. Вони мали такий вигляд: $\geqq$ і $\leqq$.

РОЗМИНКА 3

1 Укажіть нерівності, які при $x=2{,}5$ є правильними:

1) $4x+1\geqslant 9$; 2) $-8x+20\leqslant 0$; 3) $5-x\leqslant x-5$; 4) $\frac{2}{5}+x\geqslant x+0{,}4$.

2 Підберіть три натуральних числа y, які задовольняють нерівність:

1) $y+3>0$; 2) $3-y\geqslant 0$; 3) $1+2y\leqslant 7$; 4) $\sqrt{y}<16$.

У ході вивчення математики постає питання доведення правильності нерівностей (часто кажуть «доведення нерівностей»). Існують різні методи доведення: геометричної інтерпретації, доведення «від супротивного», використання раніше доведених нерівностей тощо. Одним із найпоширеніших є **метод різниці**.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У друкованій літературі символи знаків нерівностей з'явилися на 50 років раніше за символ знака рівності, оскільки як знак нерівності використовували літеру V латинського алфавіту, повертаючи її в потрібний бік.

ПРИКЛАД 1

Доведіть нерівність $(m-2)^2>-m(4-m)$, де m — будь-яке дійсне число.

Доведення

Скористаємося **методом різниці**.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й спростимо її.	$(m-2)^2-(-m(4-m))=m^2-4m+4+4m-m^2=4$
КРОК 2	Проаналізуємо знак результату.	$4>0$, різниця додатна
КРОК 3	Зробимо висновок: оскільки різниця додатна, то ліва частина нерівності більша за праву. **Нерівність доведено.**	Оскільки $4>0$, то $(m-2)^2>-m(4-m)$ для будь-якого дійсного числа m

ТРЕНУЄМОСЯ

1 З'ясуйте, правильною чи неправильною є нерівність, якщо a — довільне дійсне число:

1) $3-1>0$; 2) $5-9<0$; 3) $8-a>2-a$; 4) $10+2a<7+2a$.

Доведіть нерівність, якщо a — довільне дійсне число:

5) $3(a+8)>2(a+4)+a$;

6) $-5(9-a)<2a-3(1-a)$;

7) $(a+3)^2>a(a+6)$;

8) $(a-4)^2>-a(8-a)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $x^2\geqslant 0$
- $-x^2\leqslant 0$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що сума квадратів двох довільних дійсних чисел не менша від їх подвоєного добутку.

Доведення

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Створимо математичну модель описаного співвідношення, тобто утворимо нерівність, користуючись тим, що «не менша» означає «більша або дорівнює».	Довести: $m^2+n^2\geqslant 2mn$, де m, n — довільні дійсні числа
КРОК 2	Скористаємося методом різниці: запишемо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її.	$m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 3	Проаналізуємо знак отриманої різниці.	$(m-n)^2 \geqslant 0$ при будь-яких довільних дійсних m і n
КРОК 4	Зробимо висновок: різниця додатна, отже, ліва частина нерівності не менша від правої. **Нерівність доведено.**	$m^2+n^2 \geqslant 2mn$ для довільних дійсних чисел m і n

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1. Чи зможете ви за 5 секунд визначити, який дріб більший:

$$\frac{4}{9} \text{ або } \frac{8}{17}?$$

2. У заданому виразі розставте дужки так, щоб отримати число не менше від 50:

$$2:2-3:3-4:4-5:5.$$

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Доведіть нерівність, якщо x — довільне дійсне число:

1) $x^2+9 \geqslant 6x$; 2) $x^2+25 \geqslant 10x$; 3) $4x^2 \geqslant 12x-9$; 4) $16x^2 \geqslant 8x-1$.

Доведіть, що:

5) квадрат суми двох довільних дійсних чисел не менший від їх добутку, помноженого на 4;

6) сума квадратів двох довільних дійсних чисел не менша від їх добутку, помноженого на -2.

Доведіть нерівність, якщо x і y — довільні дійсні числа:

7) $x^6+y^6 \geqslant 2x^3y^3$; 8) $x^8+y^8 \geqslant 2x^4y^4$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{a+b}{2}$ — середнє арифметичне двох чисел a і b.

ПРИКЛАД 3

Доведіть нерівність $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, якщо a і b — невід'ємні дійсні числа.

Доведення

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо різницю лівої та правої частин нерівності.	$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$
КРОК 2	Виконаємо перетворення — зведемо числові вирази до спільного знаменника і застосуємо в чисельнику формулу квадрата різниці.	$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=$ $=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$
КРОК 3	Проаналізуємо знак отриманого числового виразу.	$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, $2>0$, тому $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
КРОК 4	Зробимо висновок: різниця додатна, отже, ліва частина нерівності не менша від правої. **Нерівність доведено.**	$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
	Зверніть увагу: вираз $\sqrt{ab}$ називають **середнім геометричним** двох чисел a і b.	

Нерівність $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ має спеціальну назву — **нерівність Коші для двох чисел** (на честь відомого французького математика Огюстена Луї Коші).

Нерівність Коші. Середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше, ніж їх середнє геометричне.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Доведіть нерівність, якщо число $a \geqslant 0$:

1) $a+1 \geqslant 2\sqrt{a}$; 2) $a+4 \geqslant 4\sqrt{a}$; 3) $\frac{a+3}{2} \geqslant \sqrt{3a}$; 4) $\frac{a+6}{2} \geqslant \sqrt{6a}$.

Доведіть нерівність, якщо a і b — невід'ємні дійсні числа:

5) $\frac{9a+b}{6} \geqslant \sqrt{ab}$;

6) $\frac{a+25b}{10} \geqslant \sqrt{ab}$;

7) $\frac{ab+36}{2} \geqslant 6\sqrt{ab}$;

8) $\frac{49+ab}{2} \geqslant 7\sqrt{ab}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Порівняйте, коли це можливо, числа m і k, якщо:

1) $m-k=-2{,}3$;

2) $k-m=0$;

3) $m-k=2-\sqrt{5}$;

4) $k-m=\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}$;

5) $m^2-k^2=\frac{2}{5}$ і $m+k=-7$;

6) $(m-k)^2=19$.

2 Доведіть нерівність, якщо m — довільне дійсне число:

1) $m(m-4) \geqslant -4$;

2) $m(m+8)+16 \geqslant 0$;

3) $(m-3)(m+5) > m(m+2)-17$;

4) $2m(2m+1)+10 \geqslant -2m$;

5) $(4-m)(m+4) < (2m-1)(m+3)-3m^2-5m+40$;

6) $3m(3m-5)+9m > -13$.

3 Доведіть нерівність методом різниці:

1) $7d > 105$, якщо $d > 15$;

2) $-5m < 25$, якщо $m > -5$;

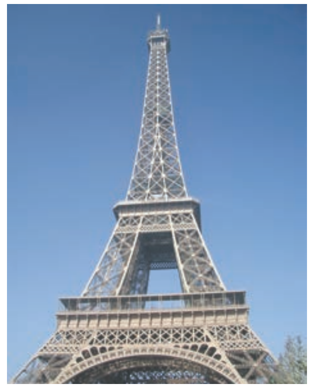
3) $8x+11 > 27$, якщо $x > 2$;

4) $-12y+(-15) \leqslant -39$, якщо $y \geqslant 2$;

5) $\frac{a}{9} < 12$, якщо $a < 108$;

6) $-\frac{a}{3} > -0{,}4$, якщо $a < -0{,}4$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



На першому поверсі Ейфелевої вежі розміщений список 72 найвідоміших французьких учених та інженерів XVIII–XIX ст.

Серед імен на південно-східній стороні вежі викарбовано ім'я Огюстена Луї Коші.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Виділення квадрата двочлена:

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$$

IQ TO BE SMART

Радимо прочитати книжку Шона Кові «7 звичок високоефективних підлітків».

Це відомий бестселер, перекладений більш ніж 20 мовами. Автор визначає 7 звичок як базові принципи, що правлять світом, і говорить: «Житимеш згідно з ними — будеш на висоті».

4 Оленка має подарунковий сертифікат вартістю 200 грн для придбання солодощів.

1) Яку найбільшу кількість мафінів за ціною 12 грн може купити дівчинка?
2) Чи можна за цей сертифікат придбати 21 круасан, якщо ціна одного круасана на 20 % менша, ніж ціна одного мафіна?

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $m+15=14$, то $m<0$.
2) Нерівність $(b-8)^2 \leqslant 0$ правильна лише для числа $b=8$.
3) Нерівність $-c^2-3<0$ правильна для будь-якого дійсного числа c.
4) Якщо V — об'єм дощової води (у м^3), що збирається на даху будівлі, то $V \geqslant 0$ у будь-яку пору року.
5) Нерівність $(x-5)^2+|5-x|>0$ правильна для будь-якого дійсного числа x.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ПОДОРОЖ ЗАКАРПАТТЯМ»

Родина з чотирьох осіб вирішила здійснити туристичну подорож Закарпаттям. У таблиці наведено вартість п'ятиденного туру (на одну особу) та вартість проїзду в обидва кінці (для чотирьох осіб), які запропонували родині три туристичні фірми.

Турфірма	Вартість туру на 1 особу, грн	Вартість проїзду для 4 осіб, грн
A	4250	2400
B	5100	1450
C	4450	1550

1 Скільки коштуватиме подорож для всієї родини, якщо скористатися послугами:

1) турфірми A; 2) турфірми B; 3) турфірми C?

2 Послугами якої турфірми необхідно скористатися, якщо на всю подорож планується витратити не більше ніж 20 000 грн?

3 Скільки коштуватиме найдорожчий тур (з урахуванням вартості проїзду) для всієї родини?

Огюстен Луї Коші (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 1789–1857) — визначний французький математик і механік, повне зібрання творів якого налічує аж 27 томів.

Цікаво, що авторське доведення нерівності Коші займало кілька сторінок.

З іменем Коші у математиці пов'язана низка понять: задача Коші, інтеграл Коші, послідовність Коші, теорема Коші тощо.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Закарпатська область — одна з найменших за площею серед областей України. Проте на її території проживають представники понад 70 національностей.
- Озеро Синевир, якому близько 10 тис. років, називають «Морським Оком» Карпат. Воно розташоване на висоті 989 м над рівнем моря, його площа 4–5 га, максимальна глибина — 24 м.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 З'ясуйте, правильною чи неправильною є нерівність:

1) $9-13>0$; 2) $14-3a<15-3a$ (a — довільне дійсне число).

Доведіть нерівність, якщо x — довільне дійсне число:

3) $4(x-3)<3(x+1)+x$; 4) $(x-3)^2>-x(6-x)$.

Див. приклад 1

2 Доведіть нерівність, якщо x — довільне дійсне число:

1) $x^2+4\geqslant 4x$; 2) $9x^2\geqslant 12x-4$.

3) Доведіть, що квадрат різниці двох довільних дійсних чисел не менший від їх добутку, помноженого на -4.

4) Доведіть нерівність $x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$, якщо x і y — довільні дійсні числа.

Див. приклад 2

3 Доведіть нерівність, якщо a і b — невід'ємні дійсні числа:

1) $a+9\geqslant 6\sqrt{a}$; 3) $\dfrac{a+4b}{4}\geqslant\sqrt{ab}$;

2) $\dfrac{a+5}{2}\geqslant\sqrt{5a}$; 4) $\dfrac{64+ab}{2}\geqslant 8\sqrt{ab}$.

Див. приклад 3

4 Два юнаки купили для дівчат однакову кількість квітів. Перший юнак усі квіти купив за ціною 25 грн. Другий юнак половину квітів купив за ціною 20 грн, а решту квітів — за ціною 28 грн. Який із юнаків витратив більше коштів?

Бонусні завдання

5 Доведіть нерівність:

1) $x^2+y^2-4x+10y+29\geqslant 0$; 2) $a^2+2b^2+c^2-2b(a+c)\geqslant 0$.

6 Яка з рівностей є правильною — перша чи друга?

1) $\left|3-\sqrt{7}\right|=3-\sqrt{7}$; 2) $\left|3-\sqrt{7}\right|=\sqrt{7}-3$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

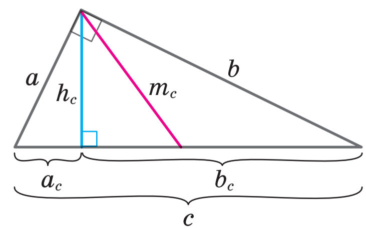
Знайдіть усі цілі числа x, для яких є правильною нерівність:

1) $3\leqslant x\leqslant 7$; 3) $1<\dfrac{x}{2}<3$; 5) $-18<3x<-3$;

2) $-4\leqslant x<1$; 4) $4<2x<10$; 6) $-2<\dfrac{x}{3}<0$.

> *Єдиний спосіб, який з успіхом може бути застосований у природничих науках, полягає в спостереженні фактів і в підпорядкуванні спостережень обчисленням.*
>
> Огюстен Луї Коші

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



За теоремою про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику $h_c=\sqrt{a_cb_c}$.

Отже, висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, є середнім геометричним проекцій катетів на гіпотенузу.

Застосуємо нерівність Коші:

$h_c\leqslant\dfrac{a_c+b_c}{2}$.

Але $\dfrac{a_c+b_c}{2}=\dfrac{c}{2}=m_c$.

Отже, $h_c\leqslant m_c$, тобто висота, проведена до гіпотенузи, не більша за медіану, проведену до гіпотенузи.

§ 2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ВЧОРА	Ви навчилися розв'язувати рівняння, використовуючи їх основні властивості
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся про основні властивості числових нерівностей та особливості їх застосування
ЗАВЖДИ	Ви зможете оцінювати значення різних величин, таких як відстань, час, маса, ціна тощо

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Експериментаніум» — музей популярної науки й техніки в Києві, який скоріше є науково-розважальним центром. Тут на вас чекають цікаві наукові екскурсії, шоу, майстер-класи, квести, ігри. Особливістю цього незвичайного музею є інтерактивні експонати, які можна вмикати, повертати, крутити, загалом експериментувати, як справжні дослідники.

Дізнайтеся більше: experimentanium.com.ua

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Вхідний квиток до музею коштує 50 грн, а квиток на кожну окрему виставку в музеї — 3,5 грн. Суму, витрачену на відвідування музею, можна розрахувати за допомогою виразу $A = 3{,}5 \cdot n + 50$ грн, де n — кількість квитків на окремі виставки. Скільки виставок можна відвідати, якщо витрати не повинні перевищувати 65 грн?

Коментар до розв'язання

За умовою $A \leqslant 65$. Отже, необхідно знайти таке ціле число n, що задовольнятиме нерівність $3{,}5 \cdot n + 50 \leqslant 65$. Для цього слід знати правила, за допомогою яких можна перетворювати числові нерівності. Пригадайте властивості рівнянь і виконайте завдання.

ПОМІРКУЙТЕ

Дано нерівність $-5 < 6$. Користуючись прикладами (*а–г*), з'ясуйте, чи зміниться знак нерівності, якщо:

1) до обох частин нерівності додати (від обох частин нерівності відняти) одне й те саме число;
2) обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число; від'ємне число.

а) $-5+3 \;?\; 6+3$; в) $-5 \cdot 3 \;?\; 6 \cdot 3$;
б) $-5-3 \;?\; 6-3$; г) $-5 \cdot (-3) \;?\; 6 \cdot (-3)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- Якщо $a = b$, то $b = a$.
- Якщо $a = b$, $b = c$, то $a = c$.
- Якщо $a = b$, c — довільне число, то:

$a + c = b + c$; $a \cdot c = b \cdot c$;
$a - c = b - c$; $a : c = b : c, c \neq 0$.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже вмієте розв'язувати рівняння, використовуючи їх основні властивості. У цьому параграфі ви познайомитеся з основними властивостями числових нерівностей, що допоможе вам розв'язувати задачі, математичними моделями яких є нерівності.

Розглянемо основні теореми, які виражають властивості числових нерівностей, і з'ясуємо, чим властивості нерівностей схожі на властивості рівнянь, а чим відрізняються від них.

Теорема 1
Якщо перше число більше за друге, то друге менше від першого.
І навпаки, якщо перше число менше від другого, то друге більше за перше.

Доведення

1) Доведемо перше твердження теореми: якщо $a>b$, то $b<a$. Застосуємо метод різниці.
   Якщо $a>b$, то різниця $a-b$ є додатним числом, тоді різниця $b-a=-(a-b)$ є від'ємним числом, отже, $b<a$.
2) Аналогічно доводять друге твердження теореми: якщо $a<b$, то $b>a$. Спробуйте довести його самостійно.

ПОМІРКУЙТЕ!

Які слова пропущено?

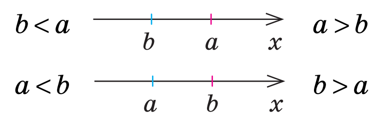
1) Якщо A дешевше від B, то B ____________ A.
2) Якщо A важче за B, то B ____________ A.
3) Якщо A вище за B, то B ____________ A.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

1) Якщо $a>b$, то $b<a$.
2) Якщо $a<b$, то $b>a$.

Графічна інтерпретація теореми 1

На числовій прямій більше число розташоване праворуч від меншого, а менше число — ліворуч від більшого.



Теорема 2
Якщо перше число менше від другого, а друге менше від третього, то перше число менше від третього.

Доведення

Доведемо, що якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.

Застосуємо метод різниці: щоб довести, що $a<c$, досить довести, що $a-c<0$.

Запишемо різницю чисел a і c та перетворимо її:

$$a-c=(a-c)+b-b=(a-b)+(b-c).$$

Оскільки за умовою $a<b$ і $b<c$, то відповідно $a-b<0$ і $b-c<0$, тобто числа $a-b$ і $b-c$ є від'ємними. Отже, число $a-c$ теж від'ємне (як сума від'ємних чисел $a-b$ і $b-c$). Звідси випливає, що $a<c$.

Аналогічно доводять і таку властивість:

якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.

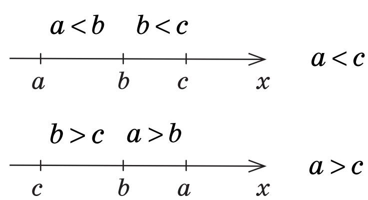
Спробуйте довести цю властивість самостійно.

Теорема 2 виражає **властивість транзитивності** для нерівностей з однаковими знаками.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.

Графічна інтерпретація теореми 2



КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числові нерівності
- властивості числових нерівностей
- подвійні нерівності

Якщо нерівності $a<b$ і $b<c$ правильні, то їх можна записати у вигляді **подвійної нерівності** $a<b<c$. Розглянемо приклади.

Два знаки нерівності

$a<b<c$

Ліва частина | Середня частина | Права частина

Дві нерівності	Подвійна нерівність	Читаємо правильно
$5<x,\ x<9$	$5<x<9$	x більше за 5 і менше від 9
$5\leqslant x,\ x<9$	$5\leqslant x<9$	x не менше від 5 і менше від 9
$5<x,\ x\leqslant 9$	$5<x\leqslant 9$	x більше за 5 і не більше за 9
$5\leqslant x,\ x\leqslant 9$	$5\leqslant x\leqslant 9$	x не менше від 5 і не більше за 9

РОЗМИНКА 1

1 Запишіть у вигляді подвійної нерівності співвідношення:
1) $x<17$ і $x>0$; 2) $x<5$ і $x\geqslant -4$; 3) $x\geqslant -0{,}1$ і $x\leqslant 0{,}1$.

2 Знайдіть цілі значення y, які задовольняють нерівність:
1) $-2<y<2$; 2) $-1<y\leqslant 3$; 3) $3<y<4$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

1) Якщо $a>b$ і c — будь-яке число, то $a+c>b+c$.
2) Якщо $a>b$ і c — будь-яке число, то $a-c>b-c$.

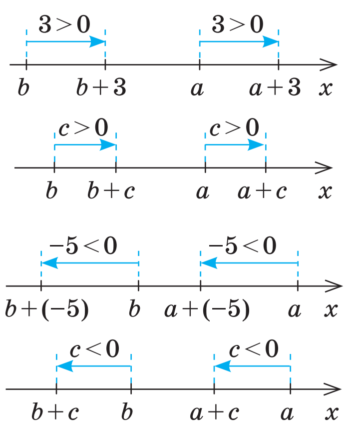
Теорема 3
Якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення

1) Доведемо, що якщо $a>b$ і c — будь-яке число, то $a+c>b+c$.
Застосуємо метод різниці. Утворимо різницю $(a+c)-(b+c)$. Маємо: $(a+c)-(b+c)=a-b$. Оскільки за умовою $a>b$, то різниця $a-b$ є додатним числом. Звідси випливає, що $a+c>b+c$.

2) Дію віднімання можна замінити дією додавання: $a-c=a+(-c)$. Отже, можна зробити висновок: якщо $a>b$ і c — будь-яке число, то $a-c>b-c$.
Аналогічно доводять і таку властивість:
якщо $a<b$ і c — будь-яке число, то $a+c<b+c$, $a-c<b-c$.

Графічна інтерпретація теореми 3



Наслідок із теореми 3
Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, **змінивши знак** доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення

Застосуємо **теорему 3**. Нехай нерівність $a+c>b$ є правильною. Віднімемо від обох її частин число c. Отримаємо: $a+c-c>b-c$. Отже, $a>b-c$.

Ураховуючи наслідок із теореми 3, можемо сформулювати **правило 1**, яке використовують для перетворення нерівностей.

Правило 1

Будь-який доданок можна перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, змінивши знак доданка на протилежний.

Наприклад: 1) $x+7>13$; $x>13-7$; $x>6$;

2) $x-7>13$; $x>13+7$; $x>20$;

3) $8-x<23$; $8-23<x$; $-15<x$; $x>-15$.

РОЗМИНКА 2

1 Додайте до обох частин нерівності:

1) $-17+x<12$ число 17; 2) $x+8\leqslant 13$ число -8.

2 Відніміть від обох частин нерівності:

1) $15+x\geqslant -5$ число 15; 2) $-23+x<-11$ число -23.

3 Перенесіть доданки зі змінною в ліву частину, а числа — у праву частину нерівності:

1) $23+x\geqslant -5x-16$; 2) $-13-4x\geqslant -12x+34$.

Теорема 4

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме **додатне** число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме **від'ємне** число і **змінити знак нерівності на протилежний**, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення

Нехай $a>b$. Помножимо обидві частини нерівності на число c і застосуємо метод різниці.

Запишемо різницю та перетворимо її: $a\cdot c-b\cdot c=c(a-b)$. За умовою $a>b$, отже, різниця $a-b$ є додатним числом.

1) Якщо $c>0$, то добуток $c(a-b)$ є додатним числом, тобто різниця $a\cdot c-b\cdot c$ є додатним числом, отже, $a\cdot c>b\cdot c$.

2) Якщо $c<0$, то добуток $c(a-b)$ є від'ємним числом, тобто різниця $a\cdot c-b\cdot c$ є від'ємним числом, отже, $a\cdot c<b\cdot c$.

Дію ділення можна замінити дією множення: $\frac{a}{c}=a\cdot\frac{1}{c}$. Отже, доведені властивості справедливі й для випадку ділення обох частин нерівності на деяке число, відмінне від нуля.

Аналогічно доводять і такі властивості:

якщо $a<b$ і c — додатне число, то $ac<bc$;

якщо $a<b$ і c — від'ємне число, то $ac>bc$.

СЛІД ЗНАТИ!

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

У слові НЕРІВНОСТІ замініть літери на цифри від 1 до 8 так, щоб усі знаки відношення було розставлено правильно:

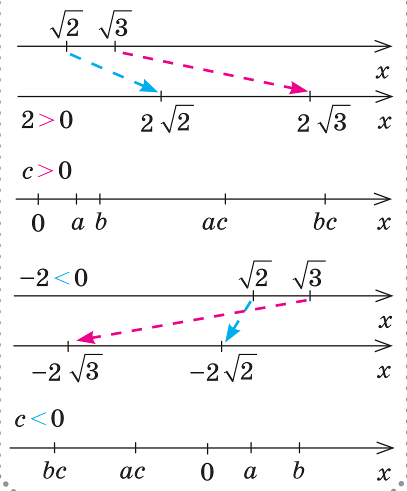
Н > Е < Р > І > В < Н < О < С < Т > І

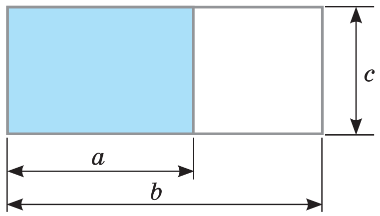
ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

1) Якщо $a>b$ і c — додатне число, то $a\cdot c>b\cdot c$.

2) Якщо $a>b$ і c — від'ємне число, то $a\cdot c<b\cdot c$.

Графічна інтерпретація теореми 4





Теорему 4 можна також проілюструвати за допомогою формули площі прямокутника (див. рисунок): $a<b$, отже, $ac<bc$.

Подамо **теорему 4** у вигляді таблиці.

Вихідна нерівність	Знак множника	Отримана нерівність	Правило зміни знака нерівності
$a>b$	$c>0$	$a\cdot c>b\cdot c$	Знак не змінюється
	$c<0$	$a\cdot c<b\cdot c$	Знак змінюється на протилежний
$a<b$	$c>0$	$a\cdot c<b\cdot c$	Знак не змінюється
	$c<0$	$a\cdot c>b\cdot c$	Знак змінюється на протилежний

Ураховуючи теорему 4, можемо сформулювати **правило 2**, яке використовують для перетворення нерівностей.

Правило 2

Обидві частини нерівності можна помножити (або поділити) на одне й те саме додатне число. При цьому знак нерівності не змінюється.

Обидві частини нерівності можна помножити (або поділити) на одне й те саме від'ємне число. При цьому знак нерівності змінюється на протилежний.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У «Математичних зборах» Паппи Александрійського (III ст.) описано таку властивість нерівностей:

якщо $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ (a, b, c, d — додатні числа), то $ad>bc$.

СЛІД ЗНАТИ!

РОЗМИНКА 3

Виконайте множення або ділення обох частин нерівності відповідно до запису:

1) $\frac{1}{4}x<48\,\Big|\cdot 4$;

2) $-x\leqslant 13\,\Big|\cdot(-1)$;

3) $15x\geqslant -4{,}5\,\Big|:15$;

4) $-\frac{1}{7}x\geqslant -8\,\Big|\cdot(-7)$;

5) $\frac{3+x}{2}-1\geqslant -\frac{5x}{3}-x\,\Big|\cdot 6$;

6) $\frac{9+8x}{10}\geqslant -3x-\frac{5x-11}{4}\,\Big|\cdot 20$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$-7x-9<5$

$-7x>5+9$

$-7x>14$

$x<14:(-7)$

$x<-2$

Наслідок із теореми 4

Якщо обидві частини правильної нерівності, які є **числами одного знака**, замінити оберненими до них числами і **змінити** знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення

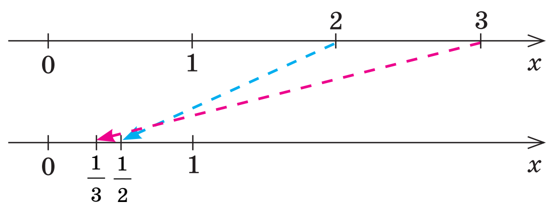
Застосуємо **теорему 4**. Поділимо обидві частини нерівності $a>b$ на додатне число ab. Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$. Звідси випливає, що $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$, тобто $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

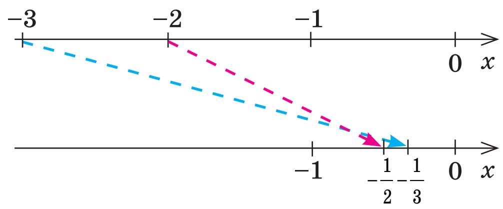
Якщо $ab>0$ і $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Розглянемо такі приклади.

1) Якщо $2<3$, то $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$.



2) Якщо $-3<-2$, то $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$.



У теоремах, які ми довели, ішлося про строгі нерівності. Аналогічні властивості мають і нестрогі нерівності.

Теореми 3 і 4 справедливі також і для **подвійних нерівностей:**

- якщо $a<x<b$, c — будь-яке число, то $a+c<x+c<b+c$, $a-c<x-c<b-c$;
- якщо $a<x<b$ і $c>0$, то $a\cdot c<x\cdot c<b\cdot c$, $a:c<x:c<b:c$, $c\neq 0$;
- якщо $a<x<b$ і $c<0$, то $b\cdot c<x\cdot c<a\cdot c$, $b:c<x:c<a:c$, $c\neq 0$.

Подвійні нерівності мають широке практичне застосування, їх зазвичай використовують для оцінювання значень різних величин, таких як відстань, час, маса, ціна тощо.

СЛІД ЗНАТИ!

Вимога «числа a і b **однакового знака** $(ab>0)$» є суттєвою. Дійсно: нерівність $2>-4$ є правильною, а нерівність $\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}$ — неправильною.

ПОМІРКУЙТЕ

Які властивості нерівностей схожі на властивості рівнянь, а які відрізняються від них?

ПРИКЛАД 1

Відомо, що $2<m<7$. Оцініть значення виразу:

1) $4m$; 2) $-m$; 3) $5-m$; 4) $1{,}2m-0{,}6$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Помножимо всі частини заданої нерівності на 4; $4>0$, отже, знак нерівності не змінюється.	$2<m<7 \,\vert\cdot 4$; $2\cdot 4<m\cdot 4<7\cdot 4$; $8<4m<28$
2) КРОК 1	Помножимо всі частини заданої нерівності на -1; $-1<0$, знак нерівності змінюється на протилежний.	$2<m<7 \,\vert\cdot(-1)$; $-2>-m>-7$; $-7<-m<-2$
3) КРОК 1	Запишемо вираз $5-m$ у вигляді $-m+5$ і до всіх частин отриманої нерівності $-7<-m<-2$ додамо число 5.	$-7<-m<-2 \,\vert+5$; $-7+5<-m+5<-2+5$; $-2<5-m<3$
4) КРОК 1	Оцінимо значення виразу $1{,}2m$, помноживши всі частини заданої нерівності на 1,2; $1{,}2>0$, знак нерівності не змінюється.	$2<m<7 \,\vert\cdot 1{,}2$; $2\cdot 1{,}2<m\cdot 1{,}2<7\cdot 1{,}2$; $2{,}4<1{,}2m<8{,}4$
КРОК 2	Віднімемо від усіх частин нерівності, отриманої на попередньому кроці, число 0,6.	$2{,}4<1{,}2m<8{,}4 \,\vert-0{,}6$; $1{,}8<1{,}2m-0{,}6<7{,}8$

Відповідь: 1) $8<4m<28$; 2) $-7<-m<-2$; 3) $-2<5-m<3$; 4) $1{,}8<1{,}2m-0{,}6<7{,}8$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Під час множення всіх частин подвійної нерівності на від'ємне число можна міняти не знак нерівності, а ліву та праву межі нерівності.

$$2<m<7 \,\big|\cdot(-1)$$

$$-7<-m<-2$$

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Оцініть значення виразів $2m$; $2m+3$; $-m$; $1-m$, якщо:

1) $1<m<3$; 2) $2<m<5$; 3) $-3<m<4$; 4) $-2<m<6$.

Оцініть значення виразів $\frac{m}{3}$; $\frac{m}{3}-4$; $-2m$; $5-2m$, якщо:

5) $-9<m<15$; 7) $-3{,}6<m<-1{,}8$;

6) $-6<m<12$; 8) $-5{,}4<m<-2{,}1$.

ПРИКЛАД 2

Відомо, що сторона a ділянки квадратної форми набуває значень $5<a<7$ (у м). Оцініть периметр (у м) ділянки квадратної форми зі стороною, втричі більшою за a.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Оцінимо довжину сторони нової ділянки (у м). Для цього помножимо обидві частини даної нерівності на 3.	$5<a<7 \,\big|\cdot 3$; $15<3a<21$
КРОК 2	Оцінимо периметр нової ділянки (у м), тобто оцінимо значення виразу $4\cdot 3a$.	$4\cdot 15<4\cdot 3a<4\cdot 21$; $60<12a<84$

Відповідь: $60<12a<84$.

ПРИКЛАД 3

На придбання м'ячів для спортклубу заплановано виділити суму від 2500 до 3000 грн. Визначте, скільки м'ячів можна закупити на цю суму, якщо ціна одного м'яча становить 240 грн.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Позначимо шукану кількість м'ячів через n.	Нехай n — кількість м'ячів, $n\in \mathbf{N}$
КРОК 2	Визначимо вартість усіх м'ячів та оцінимо її значення.	$S=240\cdot n$ — вартість усіх м'ячів. За умовою $2500\leqslant 240\cdot n\leqslant 3000$
КРОК 3	Використаємо межі суми, запланованої для купівлі м'ячів, і **підберемо** можливі значення n, $n\in \mathbf{N}$.	$n=11$ — найменше можливе значення, а $n=12$ — найбільше можливе значення кількості м'ячів

Відповідь: 11 або 12 м'ячів.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть задачу.

1) Вантажна машина перевозить b тонн вантажу, причому $4{,}6 \leqslant b \leqslant 6{,}2$. Оцініть загальну масу (у т) вантажу, який можуть перевезти 10 таких машин.

2) Є дві декоративні коробки, дно кожної має форму трикутника з рівними сторонами. Довжина l сторони першого трикутника набуває значень $19{,}9 < l < 20{,}1$ (у см). Оцініть периметр (у см) другого трикутника зі стороною, удвічі більшою за сторону першого.

3) Маса m однієї шоколадної цукерки набуває значень $19{,}8 \leqslant m \leqslant 20{,}2$ (у г). Оцініть масу всіх шоколадних цукерок у 10 коробках (у г), якщо одна коробка містить 30 таких цукерок.

4) Для закупівлі навчальних посібників планується виділити від 950 до 1100 грн. Вартість одного посібника становить 60 грн.

   а) Скільки посібників можна купити на заплановану суму?

   б) Яку найбільшу кількість посібників можна купити на заплановану суму, якщо вартість одного посібника збільшиться на 10 %?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Основним показником якості шоколаду є відсотковий вміст какао-продуктів — тертого какао й какао-масла. Наприклад:

- у молочному шоколаді має бути не менше 25 % тертого какао;
- у темному — не менше 40 % тертого какао та не менше 20 % какао-масла;
- у гіркому — не менше 55 % тертого какао та не менше 33 % какао-масла.

Розрахуйте (у г) вміст какао-продуктів у 100 г шоколаду кожного виду.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Порівняйте числа c і n, якщо відомо, що правильною є нерівність:

1) $c+5>n+5$;
2) $c+(-3)<n+(-3)$;
3) $5c \geqslant 5n$;
4) $\frac{1}{3}n<\frac{1}{3}c$;
5) $-6c \leqslant -6n$;
6) $-13c+1 \geqslant -13n+1$.

2 Відомо, що $b<k$. Порівняйте вирази:

1) $5+b$ і $5+k$;
2) $4b$ і $4k$;
3) $-b$ і $-k$;
4) $-5b$ і $-5k$;
5) $7b-\frac{1}{3}$ і $7k-\frac{1}{3}$;
6) $-\frac{k}{4}+2$ і $-\frac{b}{4}+2$.

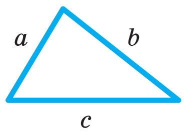
3 Для переможців інтелектуального конкурсу планується виділити призовий фонд від 42 до 55 тис. г. о. для придбання електронних книг за ціною 3200 г. о. Скільки цих гаджетів можна придбати на заплановану суму, якщо в разі закупівлі більше ніж 11 гаджетів діє знижка 15 % на кожну одиницю?

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Хто з трьох друзів наймолодший, якщо лише одне з наведених тверджень є хибним?

- Андрій старший за Володимира.
- Сергій молодший за Володимира.
- Сума віку Володимира і Сергія дорівнює подвоєному віку Андрія.
- Сергій старший за Андрія.

У довільному трикутнику:



$a+b>c$

4 Розв'яжіть задачу.

1) Одна зі сторін трикутника дорівнює 12 см, друга — 15 см. Визначте найменше і найбільше цілі числа, якими може виражатися довжина третьої сторони трикутника (у см).

2) Порожній басейн, об'єм якого дорівнює 3000 л, почали заповнювати водою. Скільки літрів води має надходити до басейну щогодини, щоб через 5 год він був заповнений не більше як на $\frac{4}{5}$ об'єму, але більш ніж на половину? Відомо, що швидкість n заповнення басейну виражається цілим числом сотень літрів за годину, а потужність труби, через яку заповнюється басейн, не менша ніж 300 л/год.

5 Відомо, що $2<m<5$. Оцініть значення виразу:

1) $3m$; 2) $m-4$; 3) $-m$; 4) $8-m$; 5) $-0{,}5m$; 6) $-\frac{m}{2}+1{,}5$.

6 Відомо, що $4<c\leqslant 6$. Оцініть значення виразу:

1) $c-11$; 2) $5c+1$; 3) $-c$; 4) $-0{,}2c$; 5) $7-2c$; 6) $\frac{7}{2}c-3$.

7 Відомо, що $d>5$, $b>d$, $b<k$. Розташуйте в порядку зростання:

1) числа d, b, k, 5; 2) числа $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{5}$.

8 Оцініть:

1) периметр квадрата зі стороною n, якщо $\sqrt{2}\leqslant n\leqslant\sqrt{3}$;

2) довжину сторони квадрата, якщо відомо, що периметр P квадрата задовольняє умову $4\sqrt{5}+16\leqslant P\leqslant 4\sqrt{5}+20$;

3) величину, обернену до довжини сторони рівностороннього трикутника, якщо відомо, що його периметр P задовольняє нерівність $2{,}4\leqslant P\leqslant 3{,}6$.

9 Користуючись тим, що $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$, оцініть значення виразу:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}-0{,}7$; 3) $\sqrt{3}+1$; 4) $3+\sqrt{3}$; 5) $-10\sqrt{3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Найбільший у світі басейн розташований у Чилі. Його довжина близько 1 км, площа — близько 8 га, об'єм — близько 300 000 м³.
- Найглибший на 2016 р. басейн «Y-40 The Deep Joy» (Італія) має глибину 42 м і наповнений термальною водою за температури 32–34 °C. На різних глибинах є платформи і штучні печери для дайверів.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $a<-3$, то $-a>3$.
2) Якщо $x>5$, то $x>1$.
3) Якщо $y<-2$, то $y<-4$.
4) Якщо один автобус може перевозити не більше 20 пасажирів, то 3 таких автобуси можуть перевезти 58 пасажирів.
5) Якщо в книгарні ціна будь-якої однієї книжки не менша ніж 30 грн, то 5 книжок можуть коштувати 140 грн.

Мартін Ґарднер (англ. *Martin Gardner*, 1914–2010) — американський математик, популяризатор науки, письменник. Він спеціалізувався в галузі цікавої математики, поширюючи математичні методи мислення. Відомі його коментарі до творів Льюїса Керролла. Перша із понад 70 книжок Ґарднера вийшла друком у 1952 р., остання — у 2009 р.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

1 Укажіть нерівність, що є правильною, якщо m — будь-яке дійсне число.

А	Б	В	Г
$m+1\geqslant 0$	$2m\geqslant 0$	$m^2\geqslant 0$	$m-1\leqslant 0$

2 Оцініть значення виразу $2x$, якщо $-4<x<6$.

А	Б	В	Г
$-8<2x<12$	$-2<2x<3$	$-2<2x<8$	$-6<2x<4$

3 Відомо, що $-3<y<9$. Оцініть значення виразу $1-y$.

А	$-2<1-y<10$	В	$-4<1-y<8$
Б	$-8<1-y<4$	Г	$-9<1-y<3$

4 Укажіть нерівність, яка є правильною для всіх дійсних чисел c.

А	Б	В	Г
$c-4>c-3$	$c-2>c-1$	$3+c>4+c$	$2+c>1+c$

5 Галина завжди прибирає свою кімнату не менше ніж за 30 хв. Учора дівчина впоралася за t хв. Якому числу може дорівнювати t?

А	Б	В	Г
36	25	10	8

6 Установіть відповідність між твердженням (1–3) та виразом (А–Г), для якого це твердження є правильним.

1	Значення виразу більше за нуль для всіх дійсних чисел a
2	Значення виразу менше від нуля для всіх дійсних чисел a
3	Значення виразу дорівнює нулю для всіх дійсних чисел a

А	$4a+(a-2)^2-a^2-4$
Б	$a(a+4)-a^2+2$
В	$4a+a^2-(a+2)^2$
Г	$a(a-4)+4a+2$

7 Підлога хореографічного залу має форму квадрата. Довжина b сторони цього квадрата задовольняє нерівність $19{,}5<b<20{,}1$ (у м).

1) Оцініть периметр цього квадрата (у м).

2) Оцініть периметр підлоги іншого хореографічного залу квадратної форми (у м), сторона якого утричі більша.

8 Доведіть нерівність $\frac{x+64}{8}\geqslant 2\sqrt{x}$, якщо $x\geqslant 0$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «НАПИС НА ЕТИКЕТЦІ»

Етикетка на 6-літровому бутлі мінеральної негазованої води має напис: «Об'єм $6\text{ дм}^3 \pm 1\ \%$».

1 Нехай у такому закоркованому бутлі міститься V л води. Ураховуючи напис на його етикетці, оцініть значення V.

2 Для учасників олімпіади слід замовити 596 л цієї води. Було закуплено 50 упаковок, у кожній — два 6-літрові бутлі.
1) Оцініть значення об'єму закупленої води (у л).
2) З'ясуйте, чи достатньо води було закуплено.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Леонард Смирнов, професор Одеської державної академії холоду, розробив технологію опріснення морської води й очищення її від домішок шляхом заморожування в особливих умовах. Результати досліджень планується застосувати в країнах Африки та Південної Америки.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Оцініть значення виразів $3m$; $3m+2$; $-m$; $4-m$, якщо:

1) $1<m<5$; 2) $-4<m<3$.

Оцініть значення виразів $\frac{m}{2}$; $\frac{m}{2}-5$; $-3m$; $6-3m$, якщо:

3) $-10<m<16$; 4) $-6{,}8<m<-4{,}2$.

Див. приклади 2, 3

2 Розв'яжіть задачу.

1) Об'єм c однієї повітряної кульки набуває значень $5{,}3<c<6{,}8$ (у дм³). Оцініть загальний об'єм 1000 таких кульок (у дм³).
2) Клумба має форму п'ятикутника, усі сторони якого однакові. Довжина a його сторони набуває значень $4{,}8<a<5{,}1$ (у м). Оцініть периметр (у м) іншої клумби у формі такого самого п'ятикутника, сторона якого удвічі більша.
3) Кавовий автомат наливає в чашку m мл кави лате, причому $95\leqslant m\leqslant 105$. Оцініть загальний об'єм напою (у мл), що замовили 5 співробітників, якщо кожен узяв по 3 чашки.
4) У кінотеатрі планується поставити дивани. Для їх виготовлення потрібно виділити від 30 000 до 40 000 грн. Вартість одного дивана становить 2300 грн.
   а) Скільки диванів можна закупити на виділену суму?
   б) Яку найбільшу кількість диванів можна закупити на цю суму, якщо вартість одного дивана збільшиться на 20 %?

Бонусні завдання

3 Спробуйте довести теореми 3 і 4 для подвійних нерівностей:

- якщо $a<x<b$, c — будь-яке число, то $a+c<x+c<b+c$;
- якщо $a<x<b$ і $c>0$, то $ca<cx<cb$;
- якщо $a<x<b$ і $c<0$, то $cb<cx<ca$.

4 Для трьох чисел m, n, p справедлива нерівність $m<n<p$. Розташуйте в порядку зростання числа $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ і $\frac{1}{p}$, якщо числа m, n і p: 1) додатні; 2) від'ємні; 3) $m<0$, $n>0$, $p>0$.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Бариста — фахівець із приготування кави. Бариста має знати ази виробництва кави, розпізнавати її сорти, визначати ступінь обжарювання зерен за смаком та запахом, уміти готувати до 40 видів кави та кавових напоїв.

За стандартами мережі кав'ярень Starbucks бариста повинен готувати першокласний еспресо за 17 секунд. Бариста має бути творчою людиною — уміти малювати на молочній пінці, розробляти рецепти напоїв.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Відомо, що $x\in\{-3; 1; 2\}$. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $x+8$;	3) $-5x$;	5) $-1-7x$;	7) $\frac{12}{x}$;
2) $x-4$;	4) $5-2x$;	6) $-2-9x$;	8) $6-\frac{24}{x}$.

TO BE SMART

IQ

Радимо прочитати книжки Мартіна Ґарднера:

- «Найкращі математичні ігри та головоломки»;
- «Нові математичні розваги»;
- «Загадки Сфінкса та інші математичні головоломки».

«Подібно до інших природничих наук, математика є грою, у яку ми граємо з навколишнім світом, із Всесвітом.»

Мартін Ґарднер

§ 3 ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ. ОЦІНЮВАННЯ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗУ

ВЧОРА	Ви дізналися про основні властивості числових нерівностей і навчилися застосовувати їх для оцінювання значень різних величин
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся додавати й множити числові нерівності, оцінювати значення виразів
ЗАВЖДИ	Ви зможете пропонувати оптимальні варіанти розташування об'єктів за заданими умовами

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Кіностудія знімає серіал із x серій, $18 \leqslant x \leqslant 24$. Кожна серія триває y хв, $30 \leqslant y \leqslant 40$. Як оцінити загальний час показу всього серіалу (у хв), якщо транслювати його без перерви й реклами?

Коментар до розв'язання

Щоб знайти загальний час показу серіалу, необхідно тривалість однієї серії помножити на кількість серій. Оскільки в умові подано не конкретні значення x і y, а межі, у яких вони містяться, то для розв'язання задачі слід перемножити дві нерівності. Виникає питання: як у цьому випадку знайти значення добутку $x \cdot y$?

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Існують правила, за якими можна виконувати окремі арифметичні дії з нерівностями. Розглянемо відповідні теореми, які для зручності будемо доводити для строгих нерівностей. Зауважимо, що ці теореми справедливі також у випадку нестрогих нерівностей.

Теорема 1 (про почленне додавання нерівностей)
Результатом почленного додавання правильних нерівностей одного знака є правильна нерівність того самого знака.
1) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.
2) Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення

1) Доведемо перше твердження, застосувавши **метод різниці**.

Запишемо різницю $(a+c)-(b+d)$ і перетворимо її:

$$(a+c)-(b+d) = a+c-b-d = (a-b)+(c-d).$$

За умовою $a > b$ і $c > d$, тоді $a - b > 0$ і $c - d > 0$, таким чином, $(a-b)+(c-d) > 0$. Отже, $(a+c)-(b+d) > 0$, звідси $a + c > b + d$.

2) Аналогічно доводять друге твердження теореми для нерівностей $a < b$ і $c < d$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Щодня ми використовуємо числа...» — цими словами починається телесеріал «Числа» (2005–2010), який привернув увагу викладачів та науковців. На основі цього серіалу було розроблено освітню програму для школярів, спрямовану на поглиблене вивчення математики. У 2006 р. пройшов присвячений серіалу симпозіум Асоціації сприяння розвитку науки.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

1) $+\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ $\overline{a+c>b+d}$ 2) $+\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$ $\overline{a+c<b+d}$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числові нерівності
- подвійні нерівності
- почленне додавання нерівностей
- почленне множення нерівностей

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

У випадку, коли додають строгу і нестрогу нерівності, результатом буде строга нерівність.

Розглянемо *приклади:*

1) $\begin{array}{l} +\begin{cases} k>-4 \\ l>5 \end{cases} \\ \hline k+l>1; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} +\begin{cases} m<9 \\ n<-13 \end{cases} \\ \hline m+n<-4; \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} +\begin{cases} d\geqslant 7 \\ k>3 \end{cases} \\ \hline d+k>10; \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} +\begin{cases} a\leqslant -3 \\ c<-5 \end{cases} \\ \hline a+c<-8. \end{array}$

СЛІД ЗНАТИ!

Нерівності $a>b$ і $c>d$ (або $a<b$ і $c<d$) називають **нерівностями одного знака**.

Нерівності $a>b$ і $c<d$ (або $a<b$ і $c>d$) називають **нерівностями протилежних знаків**.

Зауважимо, що **теорема 1** справедлива й у таких випадках.

1) Почленне додавання трьох і більше нерівностей:

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} a_1 > b_1 \\ a_2 > b_2 \\ \vdots \\ a_n > b_n \end{cases} \\ \hline a_1+a_2+\ldots+a_n > b_1+b_2+\ldots+b_n; \end{array} \qquad \textit{наприклад:}\ \begin{array}{l} +\begin{cases} c\geqslant 8 \\ k>3 \\ s>7 \end{cases} \\ \hline c+k+s>18. \end{array}$$

2) Почленне додавання подвійних нерівностей:

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} a<x<b \\ c<y<d \end{cases} \\ \hline a+c<x+y<b+d; \end{array} \qquad \textit{наприклад:}\ \begin{array}{l} +\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 4 \\ -2\leqslant y\leqslant 1 \end{cases} \\ \hline -1\leqslant x+y\leqslant 5. \end{array}$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Знаки нерівностей у музиці

Із початку XVIII ст. в музичних творах почали використовувати знаки «<» і «>» для позначення відтінків у музиці. Крещендо (італ. *crescendo*) — поступове збільшення сили звуку; димінуендо (італ. *diminuendo*) — поступове зменшення сили звуку.

РОЗМИНКА 1

Виконайте додавання нерівностей:

1) $a<3$ і $n<6$;
2) $x\geqslant 2\sqrt{5}$ і $y\geqslant 3\sqrt{5}$;
3) $x<32-\sqrt{3}$ і $y\leqslant 32+\sqrt{3}$;
4) $-10<b<8$ і $-12<x\leqslant 3$;

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

При $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$:

1) $\begin{array}{l} \times\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \\ \hline ac>bd \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \times\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \\ \hline ac<bd \end{array}$

Теорема 2 (про почленне множення нерівностей)

Результатом почленного множення правильних нерівностей одного знака, у яких ліва і права частини — додатні числа, є правильна нерівність того самого знака.

1) Якщо $a>b$, $c>d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac>bd$.
2) Якщо $a<b$, $c<d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac<bd$.

Доведення

1) Доведемо перше твердження, застосувавши **метод різниці.**

Запишемо різницю $ac-bd$ і перетворимо її, додавши й віднявши вираз bc. Маємо:

$ac-bd=ac+bc-bc-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=c(a-b)+b(c-d).$

За умовою $a>b$ і $c>d$, тоді $a-b>0$ і $c-d>0$.

Звідси $c(a-b)>0$ і $b(c-d)>0$. Отже, $c(a-b)+b(c-d)>0$. Таким чином, $ac-bd>0$, звідси $ac>bd$.

2) Аналогічно доводять друге твердження теореми для нерівностей $a<b$, $c<d$.

Наслідок із теореми 2

Якщо $a>b$ і a, b — додатні числа, то $a^n>b^n$, де n — натуральне число.

Наприклад:

- із того, що $5>3$, випливає, що $5^2>3^2$; дійсно, $25>9$;
- із того, що $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$, випливає, що $\left(\frac{2}{5}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$; дійсно, $\frac{4}{25}<\frac{1}{4}$.

Спробуйте довести цей наслідок самостійно, використовуючи **теорему 2.** (Перевірити правильність доведення ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua.)

Зауважимо, що **теорема 2** справедлива й у таких випадках.

1) Почленне множення трьох і більше нерівностей:
якщо a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n — додатні числа, то

$$\times\begin{cases} a_1 > b_1 \\ a_2 > b_2 \\ \vdots \\ a_n > b_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n;$$

наприклад:
$$\times\begin{cases} c \geqslant 8 \\ k > 3 \\ s > 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c\cdot k\cdot s>168.$$

2) Почленне множення подвійних нерівностей:
якщо a, b, c, d — додатні числа, то

$$\times\begin{cases} a<x<b \\ c<y<d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a\cdot c<x\cdot y<b\cdot d;$$

наприклад:
$$\times\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2\leqslant y\leqslant 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2\leqslant x\cdot y\leqslant 28.$$

РОЗМИНКА 2

Виконайте множення нерівностей:

1) $x<31$ і $n<2$;
2) $x\geqslant 2\sqrt{5}$ і $y\geqslant 3\sqrt{5}$;
3) $x<10+\sqrt{19}$ і $y<10-\sqrt{19}$;
4) $10<b<15$ і $3<x\leqslant 9$.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте навести графічну інтерпретацію теореми 2, використовуючи формулу площі прямокутника (с. 28).

СЛІД ЗНАТИ!

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Евклід у трактаті «Начала» довів, що середнє геометричне двох додатних чисел не більше за їх середнє арифметичне та не менше від їх середнього гармонічного, тобто правильною є нерівність: $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

ПОМІРКУЙТЕ

Чи є подані твердження правильними?

Якщо $a>17$ і $c>5$, то:

1) $a+c>22$;
2) $a+c>20$;
3) $a+c>23$;
4) $a-c>12$;
5) $c-a>-12$;
6) $ac>85$.

Якщо $a<17$ і $c<5$, то:

7) $ac<90$;
8) $3a+\frac{1}{5}c<52$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

З окремими прикладами оцінювання значень величин ви знайомились у § 2.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Архімед (III ст. до н. е.), обчислюючи довжину кола, оцінив значення числа π: $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

Часто значення величин, які є результатами вимірювань, досліджень тощо, не є точними. У цих випадках можна встановити лише межі, у яких розташоване точне значення. Тоді говорять, що можна **оцінити** значення шуканого виразу.

Розглянемо, як оцінювати значення виразів, використовуючи теореми про почленне додавання та множення нерівностей.

ПРИКЛАД 1

Відомо, що $2<a<5$, $12<c<16$. Оцініть значення:

1) суми $a+c$;
2) виразу $-c$;
3) різниці $a-c$;
4) добутку $a\cdot c$;
5) виразу $\frac{1}{c}$;
6) частки $\frac{a}{c}$;
7) виразу $3a-\frac{1}{2}c$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Застосуємо теорему про почленне додавання нерівностей.	$+\begin{cases}2<a<5\\12<c<16\end{cases}$ $14<a+c<21$
КРОК 2	Помножимо обидві частини другої заданої нерівності на -1, змінивши знак нерівності на протилежний.	$12<c<16 \mid\cdot(-1)$; $-12>-c>-16$; $-16<-c<-12$
КРОК 3	Запишемо вираз $a-c$ у вигляді суми $a+(-c)$ і додамо почленно дві подвійні нерівності.	$+\begin{cases}2<a<5\\-16<-c<-12\end{cases}$ $-14<a-c<-7$
КРОК 4	Застосуємо теорему про почленне множення нерівностей.	$\times\begin{cases}2<a<5\\12<c<16\end{cases}$ $24<a\cdot c<80$
КРОК 5	Використаємо наслідок із теореми 4 про множення нерівності на число (с. 28): якщо $ab>0$ і $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.	$12<c<16$; $\frac{1}{12}>\frac{1}{c}>\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}<\frac{1}{c}<\frac{1}{12}$
КРОК 6	Запишемо частку $\frac{a}{c}$ у вигляді добутку $a\cdot\frac{1}{c}$ і застосуємо теорему про почленне множення нерівностей.	$\times\begin{cases}2<a<5\\\frac{1}{16}<\frac{1}{c}<\frac{1}{12}\end{cases}$ $\frac{1}{8}<\frac{a}{c}<\frac{5}{12}$
КРОК 7	Запишемо порядок виконання дій для оцінювання заданого виразу: $3a\to\frac{c}{2}\to-\frac{c}{2}\to3a+\left(-\frac{c}{2}\right)$.	$+\begin{cases}6<3a<15\\-8<-\frac{c}{2}<-6\end{cases}$ $-2<3a-\frac{c}{2}<9$

Відповідь: 1) $14<a+c<21$; 2) $-16<-c<-12$; 3) $-14<a-c<-7$; 4) $24<a\cdot c<80$; 5) $\frac{1}{16}<\frac{1}{c}<\frac{1}{12}$; 6) $\frac{1}{8}<\frac{a}{c}<\frac{5}{12}$; 7) $-2<3a-\frac{c}{2}<9$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Оцініть значення виразів $a+5$; $c-6$; $a+c$; $-c$; $a-c$; $2a$; $-\frac{c}{3}$; $2a-\frac{c}{3}$, якщо відомо, що:

1) $1<a<2$, $3<c<6$; 2) $4<a<11$, $9<c<15$.

Оцініть значення виразів $a\cdot c$; $\frac{1}{c}$; $\frac{a}{c}$; $ac+\frac{a}{c}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{c}{a}$; $c\left(a+\frac{1}{a}\right)$; $a\left(\frac{1}{c}-c\right)$, якщо відомо, що:

3) $5<a<20$, $4<c<10$; 4) $1<a<10$, $25<c<50$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Оцініть значення виразу $b-c$, якщо $2<b<7$, $3<c<5$.

Розв'язання

$$-\begin{array}{l}2<b<7\\3<c<5\end{array}$$

$$\overline{2-3<b-c<7-5;}$$

$$-1<b-c<2.$$

Ви навчилися доводити нерівності **методом різниці** (див. § 1). Існує ще кілька стандартних методів доведення нерівностей. Розглянемо один із методів, що базується на використанні почленного множення очевидних або раніше доведених нерівностей.

ПРИКЛАД 2

Доведіть нерівність $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8\sqrt{abc}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Доведення

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Застосуємо **нерівність Коші для двох чисел** окремо для кожного множника лівої частини даної нерівності: $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Звідси $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.	За умовою $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, тому $\begin{cases}1+a\geqslant 2\sqrt{a},\\1+b\geqslant 2\sqrt{b},\\1+c\geqslant 2\sqrt{c}\end{cases}$
КРОК 2	Помножимо одержані нерівності за теоремою про почленне множення нерівностей.	$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}\cdot 2\sqrt{c}$, тобто $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8\sqrt{abc}$. **Нерівність доведено.**

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Доведіть твердження:

1) якщо $a\geqslant 5$, $b\geqslant 8$, то $ab\geqslant 40$;
2) якщо $a\geqslant 2$, $b\geqslant 12$, то $ab\geqslant 24$;
3) якщо $a-b\geqslant\sqrt{3}$, $a+b\geqslant 11\sqrt{3}$, то $a^2-b^2\geqslant 33$;
4) якщо $a-b\geqslant\sqrt{5}$, $a+b\geqslant 13\sqrt{5}$, то $a^2-b^2\geqslant 65$.

Доведіть нерівність за умови, що $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$:

5) $(a^2+4)(b^2+4)\geqslant 16ab$;
6) $(a^2+9)(b^2+9)\geqslant 36ab$;
7) $(1+a)(3+b)(3+c)\geqslant 24\sqrt{abc}$;
8) $(2+a)(2+b)(1+c)\geqslant 16\sqrt{abc}$.

TO BE SMART

Для доведення нерівностей також застосовують методи: послідовних наближень; математичної індукції; використання елементів математичного аналізу, геометричних міркувань, спеціальних нерівностей (Коші — Буняковського, Бернуллі, Юнга та ін.).

Основні властивості нерівностей і теореми про почленне додавання й множення нерівностей часто застосовують для розв'язування геометричних і текстових задач.

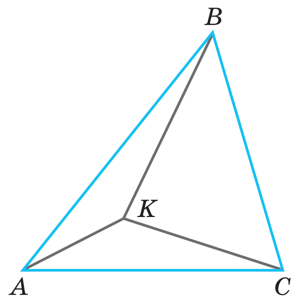


Рис. 1

ПРИКЛАД 3

Доведіть, що сума відстаней від довільної точки, розташованої всередині трикутника, до його вершин більша за півпериметр цього трикутника.

Доведення

Нехай у трикутнику ABC (рис. 1) точка K — довільна точка всередині трикутника. Доведемо, що $KA+KB+KC>\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо нерівність трикутника для кожного з трьох утворених трикутників (для сторін AB, BC і AC).	$\triangle AKB$: $AK+KB>AB$; $\triangle BKC$: $BK+KC>BC$; $\triangle AKC$: $AK+KC>AC$
КРОК 2	Додамо почленно отримані нерівності й спростимо ліву та праву частини одержаної нерівності.	$(AK+KB)+(BK+KC)+(AK+KC)>AB+BC+AC$; $2(AK+BK+CK)>P_{\triangle ABC}$
КРОК 3	Поділимо обидві частини останньої нерівності на 2.	$AK+BK+CK>\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$. **Твердження доведено.**

ПРИКЛАД 4

У майстерні виготовляють вітражні вікна прямокутної форми. Довжина й ширина кожного вікна дорівнюють a м і b м відповідно. Оцініть площу S (у м²) вікна, якщо за технічними умовами дозволено такі його розміри (у м): $0{,}8<a<1{,}2$; $1{,}4<b<2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Пригадаємо формулу для обчислення площі прямокутника.	$S=a\cdot b$
КРОК 2	Оцінимо значення добутку $a\cdot b$, тобто площу прямокутника, помноживши дві задані нерівності.	$\times\begin{cases}0{,}8<a<1{,}2\\1{,}4<b<2\end{cases}$ $1{,}12<a\cdot b<2{,}4$; $1{,}12<S<2{,}4$

Відповідь: $1{,}12<S<2{,}4$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть задачу.

1) Підприємство виготовляє газонну траву у вигляді килимків прямокутної форми. Ширина такого прямокутника становить a см, довжина — b см. Оцініть площу S (у м^2) прямокутника, якщо $55 \leqslant a \leqslant 60$, $480 \leqslant b \leqslant 500$.
2) Для доставки річкового піску виділено m вантажівок. Кожна вантажівка може перевезти n тонн піску за один рейс. Оцініть масу (у т) піску, який перевезуть вантажівки за один рейс, якщо $5 \leqslant m \leqslant 8$, $10 \leqslant n \leqslant 12$.
3) На сезонну роботу запрошують від 6 до 11 аніматорів. Кожен аніматор щодня має працювати з групою дітей, кількість яких не менша від 4 і не більша за 10. Знайдіть: а) найменшу; б) найбільшу загальну кількість дітей, із якими займаються аніматори щодня.
4) Ціна на пшеницю залежить від ціни на дизельне паливо. Ця залежність виражається формулою $y = kx + 160$, де x — ціна 1 л дизельного палива (у г. о.); y — ціна 1 т пшениці (у г. о.). Відомо, що протягом року ціна 1 л дизельного палива була не менша від 4 і не більша за 6 г. о.
   а) Знайдіть значення коефіцієнта k, якщо протягом року мінімальна ціна 1 т пшениці становила 166 г. о.
   б) Визначте найбільшу ціну (у г. о.) 1 т пшениці протягом цього року.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Відомо, що $-2 \leqslant m \leqslant 5$. Оцініть значення виразу:

1) $5m$; 3) $-\frac{1}{3}m$; 5) $\frac{m}{2} + (-4)$;
2) $m - 7$; 4) $2m + 3$; 6) $1 - 10m$.

2 Відомо, що $3 < x < 9$, $3 < y < 7$. Оцініть значення виразу:

1) $x + y$; 3) $-x - y$; 5) $\frac{y}{x}$;
2) xy; 4) $\frac{1}{x}$; 6) $2x - 3y$.

3 Відомо, що $m > 2{,}5$ і $n > 1{,}2$. Порівняйте:

1) $\frac{1}{m}$ і $\frac{1}{n}$; 3) m^2 і $5n$; 5) $(m+n)^2$ і 25;
2) $m - 10n$ і $2m$; 4) n^3 і 1; 6) $(m + 1{,}5) \cdot (10n - 3)$ і 35.

4 Відомо, що $a < b$, $b > m$, $m < a$, $m > c$, $0 > c$, $mc < 0$. Розташуйте в порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{c}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Пшеницею, яку вирощують щороку в Україні, можна нагодувати сотні мільйонів голодуючих у світі.
- Одне зернятко пшениці — це приблизно 20 мг борошна першого сорту, один батон — приблизно 10 тис. зерен.
- Із 500 г білого хліба організм людини отримує 17 % кальцію, 61 % фосфору, 48 % магнію, 70 % заліза від необхідної добової норми.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Перевірте правильність міркувань.

Якщо $a > b$, то $a > 2b$.

a, b — додатні числа, $a > b$.

$$a > b \;\big|\cdot b$$
$$a \cdot b > b \cdot b$$
$$a \cdot b > b \cdot b \;\big| -(a \cdot a)$$
$$a \cdot b - a \cdot a > b \cdot b - a \cdot a$$
$$a(b-a) > (b+a)(b-a) \;\big| :(b-a)$$
$$a > b + a \;\big| +(a > b) \text{ почленно}$$
$$2a > 2b + a \;\big| -a$$
$$a > 2b$$

Тобто з того, що $a > b$, випливає, що $a > 2b$.

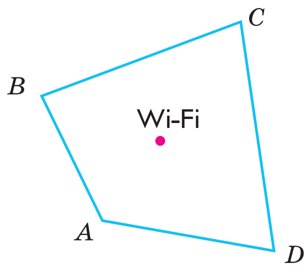


Рис. 2

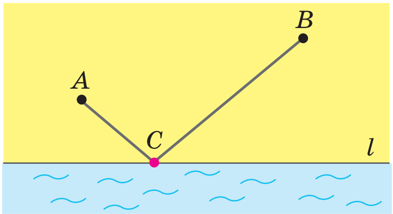


Рис. 3

5 Відомо, що $a<-10$, $b>11$, $c<b$, $ac<0$.

1) Зобразіть числа a, b, c на координатній площині.

2) Розташуйте в порядку спадання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{5}$. Скільки розв'язків має задача?

6 Розв'яжіть задачу.

1) Сторони трикутника менші ніж 124 см, 1,5 м і 1 м 76 см. Доведіть, що півпериметр трикутника менший ніж 2,25 м.

2) До дня народження Марина хотіла купити фрукти й сік. Визначте, чи можна на суму 350 грн придбати 7 кг яблук і 12 упаковок соку, якщо межі ціни z (у грн) 1 кг яблук і ціни p (у грн) упаковки соку становлять $12<z<15$ і $15<p<20$.

3) Доведіть, що периметр опуклого чотирикутника більший, ніж сума довжин його діагоналей.

4) Олена планує купити 12 зошитів у клітинку й 10 зошитів у лінійку. Ціна зошита в клітинку не перевищує 8 грн, у лінійку — 5 грн. Доведіть, що Олені на всю покупку вистачить 125 грн, ураховуючи, що дівчина скористається карткою магазина, яка надає право на знижку 15 %.

7 Чотири об'єкти розташовані у вершинах опуклого чотирикутника $ABCD$ (рис. 2). Точку доступу Wi-Fi потрібно розмістити так, щоб сума відстаней від неї до всіх чотирьох об'єктів була найменшою. Визначте, де саме її потрібно розмістити.

8 На морському узбережжі розташовано два готелі. На рис. 3 їх позначено точками A і B, пряма l — берегова лінія. Для гостей цих готелів заплановано побудувати на березі пляжну зону (точка C) і дорогу, що з'єднає готелі з пляжною зоною. Де має бути розміщена пляжна зона, щоб довжина дороги (тобто сума відстаней від точки C до точок A і B) була найменшою?

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $0 \leqslant x \leqslant 5$ і $0 \leqslant y \leqslant 6$, то значення виразу xy може дорівнювати 29.

2) Якщо $10 \leqslant x \leqslant 20$ і $\frac{1}{5} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$, то значення виразу $\frac{x}{y}$ може дорівнювати 100.

3) Якщо $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $y \geqslant 45$, то значення виразу xy може дорівнювати 0.

4) Якщо $\sqrt{m}-\sqrt{n} \geqslant 10^2$ і $\sqrt{m}+\sqrt{n} \geqslant 10^8$, то $m-n \geqslant 10^{10}$.

5) Якщо зараз у дитячому садку присутні від 5 до 8 вихователів і з кожним вихователем — не менше ніж 3 дитини, то найбільша кількість дітей, які можуть перебувати зараз у садку, дорівнює 24.

Марина В'язовська (нар. 1984, Київ) — українська вчена, математик, доктор природничих наук Боннського університету (2013). Розв'язала задачу пакування куль у 8-вимірному та (у співавторстві) 24-вимірному просторах, яка має велике значення для покращення передавання сигналу (мобільний телефон, Інтернет тощо).

За розв'язання цієї задачі Марині було присуджено у 2016 р. премію Салема, а у 2017 р. премію Математичного інституту Клея. Задачу про найщільніше пакування куль поставив ще в 1611 р. німецький учений Й. Кеплер.

Дізнайтеся більше: theukrainians.org/maryna-vyazovska/

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Відомо, що $6<m<8$ і $2<n<3$. Оцініть значення виразу $m+n$.

А	$8<m+n<11$	В	$12<m+n<24$
Б	$9<m+n<10$	Г	$8<m+n<12$

2 Відомо, що $5<a<9$ і $1<b<4$. Оцініть значення виразу $a-b$.

А	$-5<a-b<-4$	В	$1<a-b<8$
Б	$-8<a-b<-1$	Г	$4<a-b<5$

3 Відомо, що $4<p<7$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{p}$.

А	Б	В	Г
$-7<\frac{1}{p}<-4$	$\frac{1}{7}<\frac{1}{p}<\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}<\frac{1}{p}<\frac{1}{7}$	$-4<\frac{1}{p}<-7$

4 Відомо, що $4<p<10$ і $2<q<6$. Оцініть значення виразу $q+\frac{p}{2}$.

А	$10<q+\frac{p}{2}<26$	В	$5<q+\frac{p}{2}<13$
Б	$6<q+\frac{p}{2}<16$	Г	$4<q+\frac{p}{2}<11$

5 Ціна 1 кг картоплі не менша від 7 грн і не більша за 9 грн. Тарас за 8 кг картоплі заплатив m грн. Укажіть число, яке може бути значенням m.

А	Б	В	Г
55	60	75	80

6 Відомо, що $10<x<100$, $2<y<5$. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Значення виразу xy
2	Значення виразу $\frac{x}{y}$
3	Значення виразу $\frac{y}{x}$

А	більше за 0,02 і менше від 0,5.
Б	більше за 20 і менше від 500.
В	більше за 0,2 і менше від 5.
Г	більше за 2 і менше від 50.

7 Майстер виготовляє дерев'яні декоративні дощечки прямокутної форми. Ширина такого прямокутника становить a см, $10\leqslant a\leqslant 20$, довжина — b см, $15\leqslant b\leqslant 30$.

1) Оцініть площу S (у см²) цього прямокутника.

2) Оцініть периметр P (у см) цього прямокутника.

8 Доведіть нерівність $(1+a)(1+b)\geqslant 4\sqrt{ab}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Майбутні інженери в галузі будівництва отримують необхідні знання для проектування, спорудження, експлуатації, реконструкції автодоріг, будівельних об'єктів, а також знання в галузі новітніх та енергозберігаючих технологій створення ефективних конструкцій і матеріалів для будівельно-монтажних робіт.

Дізнайтеся, чи є у вас хист до роботи будівельника: prof.osvita.org.ua/uk/determine/testing/854/index.html

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «БУДІВНИЦТВО АВТОЗАПРАВОК»

З міста A виходять три автомагістралі (рис. 4). Автозаправки B і C розташовані на автомагістралях *1* і *3* відповідно. На автомагістралі 2 заплановано розмістити автозаправку D і побудувати дорогу, що сполучить усі три автозаправки. Де необхідно розмістити автозаправку D, щоб нова дорога BDC мала найменшу довжину? Відповідь обґрунтуйте.

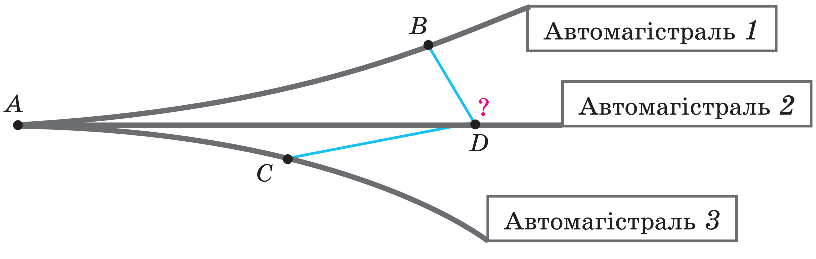


Рис. 4

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Відомо, що $6<a<7$, $12<c<18$. Оцініть значення виразу:

1) $a+6$; 3) $a+c$; 5) $a-c$; 7) $-\frac{c}{2}$;

2) $c-5$; 4) $-c$; 6) $5a$; 8) $5a-\frac{c}{2}$.

2 Відомо, що $2<a<10$, $4<c<25$. Оцініть значення виразу:

1) $a\cdot c$; 3) $\frac{a}{c}$; 5) $\frac{1}{a}$; 7) $c\left(a+\frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{1}{c}$; 4) $ac+\frac{a}{c}$; 6) $\frac{c}{a}$; 8) $a\left(\frac{1}{c}-c\right)$.

Див. приклад 2

3 Доведіть твердження:

1) якщо $a\geqslant 9$, $b\geqslant 15$, то $ab\geqslant 135$;

2) якщо $a-b\geqslant\sqrt{2}$, $a+b\geqslant 14\sqrt{2}$, то $a^2-b^2\geqslant 28$.

Доведіть нерівність, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$:

3) $(a^2+1)(b^2+1)\geqslant 4ab$; 4) $(1+a)(5+b)(5+c)\geqslant 40\sqrt{abc}$.

Див. приклади 3, 4

4 Розв'яжіть задачу.

1) Підприємство виготовляє паркетну дошку, усі дощечки мають прямокутну форму. Ширина такого прямокутника становить a см, довжина — b см. Оцініть площу S (у м²) прямокутника, якщо $20\leqslant a\leqslant 24$, $100\leqslant b\leqslant 150$.

2) За допомогою супутника визначено відстані між пунктами A і B та між B і C — 5 км і 7 км відповідно. Якими можуть бути найменша і найбільша відстані між пунктами A і C?

3) На маршруті працюють від 2 до 8 тролейбусів. Кожен тролейбус перевозить не менше 3 і не більше 60 пасажирів. Знайдіть: а) найменшу; б) найбільшу кількість пасажирів, яких зараз перевозять тролейбуси на цьому маршруті.

4) Кількість телефонних дзвінків до приймальної комісії університету залежить від тривалості трансляції рекламного фільму про цей університет. Залежність виражається формулою $y = kx + 8$, де x — тривалість (у хв) трансляції фільму щодня, y — кількість дзвінків протягом дня. У зимовий період щоденна трансляція фільму тривала не менше 30 хв і не більше 50 хв.

   а) Знайдіть значення коефіцієнта k, якщо в зимовий період найменша кількість дзвінків протягом дня дорівнювала 14.

   б) Визначте найбільшу кількість дзвінків протягом дня в зимовий період.

Бонусні завдання

5 Знайдіть спосіб порівняння чисел a і b, якщо:

1) $a = \sqrt{11} + \sqrt{7}$, $b = \sqrt{13} + \sqrt{5}$;

2) $a = \sqrt{10} - \sqrt{6}$, $b = \sqrt{13} - \sqrt{3}$;

3) $a = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $b = \sqrt{8} + 2$;

4) $a = \sqrt{17} - 2$, $b = \sqrt{5} - 4$.

6 Для приготування смузі з полуниці потрібно: 500 г натурального йогурту; 700–800 г свіжої полуниці; 1,5–2 чайні ложки цукру; 13–15 г лимонного соку; кубики льоду. Усі інгредієнти перемішати у блендері, розлити в прозорі склянки, прикрасити полуницею та листочками м'яти.

Оцініть масу (у г) смузі, який можна приготувати, додавши від 3 до 5 кубиків льоду, якщо маса одного кубика 8 г, а чайна ложка містить 7 г цукру.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

1) $4x + 6 = 0$;

2) $8 - 5x = 0$;

3) $\frac{7x - 16}{6} = 2$;

4) $\frac{38 - 6x}{7} = 8$;

5) $\frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}(x+2)$;

6) $\frac{2}{7}(x+3) - 1 = \frac{1}{14}(x+1)$.

«…Ми не можемо знати, у який бік те чи інше відкриття поверне світ. Із цим потрібно бути обережним.»

Марина В'язовська

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Національний університет «Львівська політехніка» — найстаріший вищий технічний навчальний заклад України та Східної Європи, заснований 1816 р. як Цісарсько-королівська реальна школа. Сьогодні університет належить до десятки найкращих вишів України, у ньому навчається понад 30 тис. студентів.

Дізнайтеся більше: lp.edu.ua

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Смузі (від англ. *smooth* — рівний, однорідний, м'який) — густий напій зі свіжих або свіжозаморожених фруктів, овочів, ягід, подрібнених у блендері до стану пюре.

Смузі є не лише смачним, а й корисним, оскільки містить багато вітамінів (може заповнити триденну норму вітамінів).

§ 4 НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

ВЧОРА	Ви навчилися виконувати дії додавання й множення з числовими нерівностями, а також оцінювати значення виразів
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, як зображувати множини розв'язків нерівностей з однією змінною за допомогою числових проміжків
ЗАВЖДИ	Ви зможете складати меню раціонального харчування з урахуванням калорійності продуктів

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Google Україна

Браузер Google регулярно змінює свій логотип на яскраву ілюстрацію — дудл (Google doodle), щоб нагадати про свята, ювілеї тощо. Чимало дудлів пов'язано з математикою.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- нерівність з однією змінною
- множина розв'язків нерівності
- числовий проміжок
- координатна (числова) пряма

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Збираючись у відрядження, Андрій замовив номер у готелі, у якому передбачено додаткову послугу — підключення до мережі Інтернет. За цю послугу потрібно доплачувати 2 г. о. за 1 год користування. Визначте, скільки годин Андрій зможе користуватися Інтернетом, якщо за проживання в готелі протягом усього терміну він має сплатити 180 г. о., а разом із послугою Інтернет планує витратити не більше ніж 200 г. о.

Коментар до розв'язання

Якщо позначити кількість годин користування Інтернетом через n, то отримаємо, що витрати на проживання становлять $180+2n$. За умовою сума витрат не повинна перевищувати 200 г. о. Маємо нерівність: $180+2n \leqslant 200$.

Отримана нерівність $180+2n \leqslant 200$ містить змінну величину n, тому таку нерівність будемо називати нерівністю зі змінною. Якщо замість n підставити якесь число, одержимо числову нерівність. Наприклад, при $n=6$ отримана числова нерівність $180+2\cdot 6 \leqslant 200$ буде правильною (оскільки $192 \leqslant 200$), а при $n=12$ — неправильною (оскільки $180+2\cdot 12=204$; $204>200$). Кажуть, що число 6 є розв'язком нерівності (задовольняє нерівність), а число 12 не є розв'язком нерівності.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Означення. **Розв'язком нерівності з однією змінною** називають таке значення змінної, яке перетворює нерівність у правильну числову нерівність.

Зауважимо, що означення розв'язку нерівності аналогічне означенню кореня рівняння, але термін «корінь нерівності» НЕ використовують.

РОЗМИНКА 1

Визначте, чи є задане число розв'язком нерівності:

1) $x \leqslant 4$, $x_0 = -2$;
2) $t \geqslant 8$, $t_0 = 8$;
3) $5m - 2 > m$, $m_0 = 0$;
4) $\frac{1}{y} < 7$, $y_0 = -251$;
5) $t(2t+1) < -3$, $t_0 = -6$;
6) $3x^2 + 11 \leqslant 12$, $x_0 = -1$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Усі розв'язки нерівності утворюють **множину розв'язків нерівності.**

Нерівності з однією змінною можуть мати **безліч розв'язків** або не мати розв'язків. Якщо нерівність не має розв'язків, то кажуть, що множиною розв'язків нерівності є **порожня множина** ($\varnothing$).

Розглянемо *приклади*.

Нерівність	Множина розв'язків нерівності
$x \geqslant 2$	Усі числа, які більші за число 2 або дорівнюють числу 2
$x \leqslant x$	**Усі дійсні числа**, оскільки будь-яке число дорівнює собі самому, тобто перетворює дану нерівність у правильну числову нерівність
$0 \cdot x < 2$	**Усі дійсні числа**, оскільки добуток якогось числа на нуль завжди менший від будь-якого додатного числа
$x + 2 - x < 0$ $0 \cdot x > 2$	**Розв'язків немає**, оскільки при будь-якому значенні x нерівність буде неправильною

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Знак порожньої множини $\varnothing$ уперше з'явився в 1939 р. у книжках Ніколя Бурбакі (колективний псевдонім групи французьких математиків). Автором символу був один із членів групи Андре Вейль.

ПОМІРКУЙТЕ

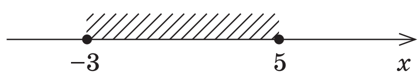
Чому подані нерівності або не мають розв'язків, або мають розв'язком будь-яке число?

1) $x > x - 2$;
2) $x + 3 > x$;
3) $0 \cdot x \leqslant 4$;
4) $0 \cdot x \geqslant 1$;
5) $x^2 < 0$;
6) $x^2 + \sqrt{3} \leqslant 0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Множину розв'язків нерівності найчастіше записують у вигляді **числових проміжків.**

Розглянемо подвійну нерівність $-3 \leqslant x \leqslant 5$. Очевидно, її задовольняють усі числа, розташовані на числовій прямій між числами (-3) і 5, причому числа (-3) і 5 також є розв'язками нерівності. Усі ці числа прийнято зображувати на числовій прямій числовим проміжком, позначеним на рисунку штриховкою.



Записують: $x \in [-3; 5]$. Читають: «Проміжок від (-3) до 5, включаючи кінці проміжку».

СЛІД ЗНАТИ!

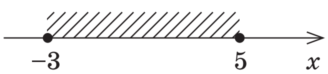
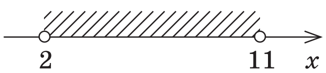
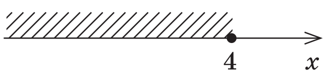
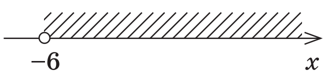
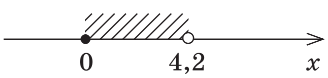
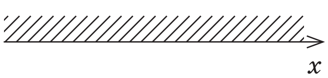
Якщо точки — кінці проміжку включені в проміжок, їх позначають зафарбованими кружечками, якщо не включені — порожніми кружечками (їх називають **«виколотими» точками**).

Якщо точки — кінці проміжку включені в проміжок, то для запису використовують квадратні дужки, якщо не включені — то круглі дужки.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Характеристика нерівності	Знак	Зображення точок	Дужки
Нестрога нерівність	$\leqslant$ $\geqslant$		[;]
Строга нерівність	$<$ $>$		(;)

Розв'яжемо низку нерівностей та наведемо множини їх розв'язків, зображення і запис відповідних проміжків у таблиці.

№ з/п	Нерівність	Зображення на числовій прямій	Запис	Читаємо правильно
1	$-3 \leqslant x \leqslant 5$		$x \in [-3; 5]$	Числовий проміжок від −3 до 5, включаючи −3 і 5
2	$2 < x < 11$		$x \in (2; 11)$	Числовий проміжок від 2 до 11, не включаючи 2 і 11
3	$x \leqslant 4$		$x \in (-\infty; 4]$	Числовий проміжок від мінус нескінченності до 4, включаючи 4
4	$x > -6$		$x \in (-6; +\infty)$	Числовий проміжок від −6 до плюс нескінченності, не включаючи −6
5	$0 \leqslant x < 4{,}2$		$x \in [0; 4{,}2)$	Числовий проміжок від 0 до 4,2, включаючи 0 і не включаючи 4,2
6	$-\infty < x < +\infty$		$x \in (-\infty; +\infty)$	Числовий проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності (уся числова пряма)

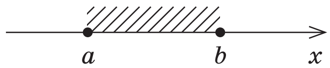
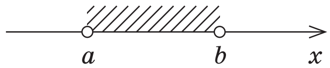
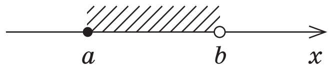
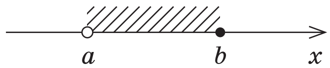
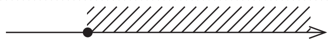
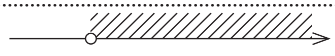
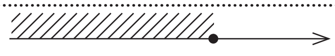
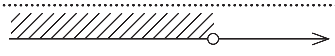
РОЗМИНКА 2

Прочитайте правильно числові проміжки:

1) $(0; 7)$; 3) $(\pi; 100]$; 5) $(-\infty; -3)$;

2) $[-5; 4]$; 4) $[-6; -5)$; 6) $[3; +\infty)$.

Узагальнимо відомості про множини розв'язків нерівностей з однією змінною, їх запис і позначення на числовій прямій.

Нерівність, що задає числовий проміжок	Позначення числового проміжку	Зображення числового проміжку на числовій прямій
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Знак належности $\in$ першим використав італійський математик Джузеппе Пеано в 1895 р.
- Символ $\in$ походить від першої літери грецького слова εστι — бути.

РОЗМИНКА 3

1 Зобразіть на числовій прямій множину точок, яка відповідає проміжку:

1) $y \in (-\infty; 0)$; 3) $x \in [\pi; 11)$; 5) $a \in \left(-\sqrt{3}-1;\ 5\right)$;

2) $m \in [-5{,}7; +\infty)$; 4) $x \in \left(-\sqrt{2}; +\infty\right)$; 6) $b \in (-1{,}1;\ 0{,}3]$.

2 Визначте, чи належить проміжку $[-10{,}2; 7{,}3)$ число:

1) $-10{,}5$; 2) 0; 3) 7; 4) -10; 5) $7{,}3$; 6) $-10{,}2$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Гаррі, Герміона, Рон і Геґрід сидять у великому залі. Рон сидить поряд із Гаррі, але не поряд із Геґрідом. Геґрід не сидить поряд із Герміоною. Хто сидить поряд із Герміоною?

А — Гаррі
Б — Рон
В — Гаррі й Рон
Г — Гаррі й Геґрід
Д — Рон і Геґрід

ПРИКЛАД 1

Чи є число $t_0 = \sqrt{2} - 1$ розв'язком нерівності $t^2 + 2t > \sqrt{3} - 1$?

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Підставимо $t_0 = \sqrt{2} - 1$ у задану нерівність замість t. Спростимо ліву частину отриманої числової нерівності.	$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right) > \sqrt{3}-1$; $3 - \cancel{2\sqrt{2}} + \cancel{2\sqrt{2}} - 2 > \sqrt{3} - 1$; $1 > \sqrt{3} - 1$
КРОК 2	Визначимо, чи є отримана нерівність правильною.	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $1 > 1{,}7 - 1$; $1 > 0{,}7$ — правильна числова нерівність

Відповідь: так.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- 14 березня 2003 р. логотип Google був присвячений дню народження А. Ейнштейна.

- 15 квітня 2013 р. дудл присвятили дню народження Л. Ейлера.

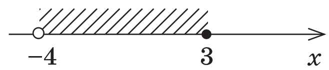
ТРЕНУЄМОСЯ

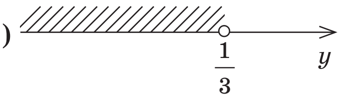
1 Визначте, чи є задане число розв'язком нерівності:

1) $x \leqslant 14$, $x_0 = -5$;
2) $x > -9$, $x_0 = 0$;
3) $3x + 17 < 0$, $x_0 = 1$;
4) $17 - 4x \geqslant 0$, $x_0 = 4$;
5) $8x^2 > x$, $x_0 = 0{,}1$;
6) $x^2 \leqslant \frac{x}{3}$, $x_0 = 0{,}3$;
7) $x^2 + 2x \geqslant 2$, $x_0 = \sqrt{3} - 1$;
8) $x^2 - 4x < 1$, $x_0 = \sqrt{5} + 2$.

ПРИКЛАД 2

Запишіть у вигляді проміжку множину точок, зображену на рисунку.

1) 

2) 

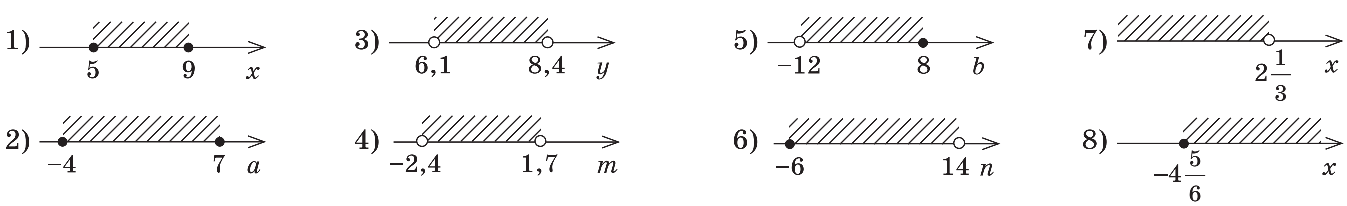
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Визначимо частину числової прямої, множина точок якої буде записана у вигляді проміжку.	Заштриховано частину числової прямої від −4 до 3
КРОК 2	Визначимо вигляд дужок, якими будуть позначені початок і кінець проміжку (межі проміжку).	$x = -4$ — «виколота» точка, число −4 не включаємо в проміжок, дужка — кругла; $x = 3$ — зафарбована точка, число 3 включаємо в проміжок, дужка — квадратна
2) КРОК 1	Визначимо частину числової прямої, множину точок якої потрібно записати у вигляді проміжку.	Заштриховано частину числової прямої від $-\infty$ до $\frac{1}{3}$
КРОК 2	Визначимо вигляд дужок, якими слід позначити початок і кінець проміжку.	Ліворуч штриховка не обмежена жодною точкою, права межа (правий кінець проміжку) — «виколота» точка $y = \frac{1}{3}$, її не включаємо в проміжок; дужки — круглі

Відповідь: 1) $x \in (-4; 3]$; 2) $y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Запишіть у вигляді проміжку множину точок, зображену на рисунку.



ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Зобразіть на числовій прямій множину чисел, які задовольняють нерівність. Позначте точку, що відповідає числу 0.

1) $-19 \leqslant a < 0$; 3) $-2 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{3}$; 5) $a \geqslant -5+\sqrt{2}$;

2) $-0{,}13 < b \leqslant 7$; 4) $-4 < y \leqslant -3\frac{1}{7}$; 6) $b < -7+\sqrt{50}$.

2 Зобразіть на числовій прямій множину розв'язків нерівності. Запишіть усі цілі числа, що є розв'язками нерівності.

1) $-3 \leqslant x < -2$; 3) $-2\frac{1}{3} \leqslant y < 3$; 5) $-2-\sqrt{7} \leqslant b \leqslant \sqrt{5}-1$;

2) $4 < a \leqslant 6$; 4) $-4 < y \leqslant \frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{11}-2 < x < \sqrt{11}+2$.

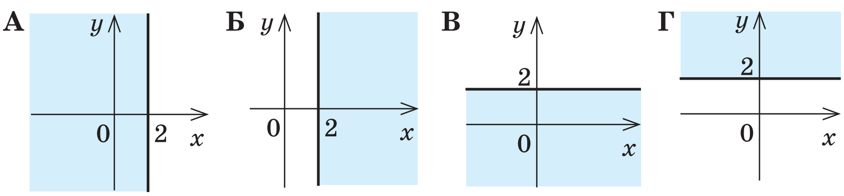
3 Укажіть найбільше та найменше цілі числа, що належать проміжку:

1) $[-4; 8]$; 3) $(-12; 7{,}5]$; 5) $\left(-11{,}2;\ 2\sqrt{7}+1\right]$;

2) $[-3; 0)$; 4) $(-6; 23)$; 6) $\left[-2\sqrt{3}-5;\ 7{,}03\right]$.

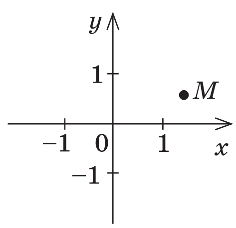
4 Множину розв'язків нерівності можна зобразити у вигляді півплощини, кожна точка (абсциса **або** ордината) якої відповідає певному розв'язку. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і рисунками (А–Г), на яких зображено множини розв'язків цих нерівностей.

1 $y \geqslant 2$ **2** $x \geqslant 2$ **3** $y \leqslant 2$ **4** $x \leqslant 2$



ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

На рисунку зображено точку $M(x_0; y_0)$ у координатній площині. Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.



1) Абсциса точки M менша від її ординати.
2) Число x_0 належить проміжку $(1; +\infty)$.
3) Число y_0 належить проміжку $(0; 1)$.
4) Точка M належить множині розв'язків нерівності $x \geqslant 0$.
5) Точка M належить множині розв'язків нерівності $y+1 \geqslant 0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Лінійне рівняння задає на координатній площині пряму, а нерівність з однією змінною (окрім подвійної нерівності) — півплощину.

Наприклад, нерівність $x > 0$ задає півплощину, що міститься праворуч від осі ординат, а нерівність $x \geqslant 0$ — ту саму півплощину разом із віссю ординат.

Нерівності $y > 0$ і $y < 0$ задають на координатній площині верхню та нижню півплощини відповідно.

Пітер Андреас Тіль (нім. *Peter Andreas Thiel*; нар. у 1967 р.) — відомий американський бізнесмен німецького походження, інвестор, співзасновник компаній PayPal і Palantir, інвестор Facebook, викладач власного курсу з підприємництва в Стенфордському університеті.

Як і Ілон Маск, Тіль став прототипом уявного персонажу — Пітера Грегорі із серіалу «Силіконова долина».

Програма підтримки молодих учених і бізнесменів Thiel Fellowship, яку фінансує Фонд Тіля, існує для допомоги людям, які хочуть стати підприємцями.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Дієтологи («дієта» з грец. — спосіб життя, режим харчування) — лікарі, що спеціалізуються на зміцненні здоров'я шляхом правильного добору продуктів харчування.

Дієтологи мають добре знати математику і вміти використовувати свої знання для складання меню з урахуванням збалансованої комбінації білків, жирів, вуглеводів; розрахунку калорійності страв; розроблення докладної програми харчування.

Дізнайтеся, чи є у вас хист до роботи лікаря:
prof.osvita.org.ua/uk/determine/testing/852/index.html

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «РАЦІОНАЛЬНЕ ХАРЧУВАННЯ»

Катерина дотримується здорового способу життя і стежить, щоб її сніданок містив не більше ніж 600 кілокалорій. Щодня дівчина планує меню сніданку, користуючись таблицею калорійності продуктів.

Продукти	Калорійність, ккал
Вівсяна каша, 230 г	200
Варене яйце, 1 шт.	160
Яблучний сік, 1 стакан	110
Молоко, 1 стакан	140
Сиркова маса, 100 г	380
Круасан, 1 шт.	230

1 Катерина планує з'їсти на сніданок круасан, n варених яєць та випити стакан яблучного соку. Складіть нерівність для визначення n. Чи може n дорівнювати 2?

2 Катерина планує з'їсти на сніданок 100 г сиркової маси, 230 г вівсяної каші та випити x стаканів молока. Складіть нерівність для визначення x. Чи може x дорівнювати 1?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

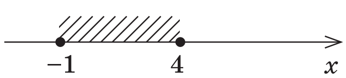
Див. приклад 1

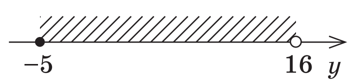
1 Визначте, чи є задане число розв'язком нерівності:

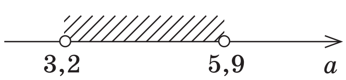
1) $x < 4$, $x_0 = -9$;
2) $11 - 6x \geqslant 0$, $x_0 = 2$;
3) $x^2 \leqslant \frac{x}{4}$, $x_0 = 0{,}4$;
4) $6x - x^2 \geqslant 7$, $x_0 = 3 - \sqrt{2}$.

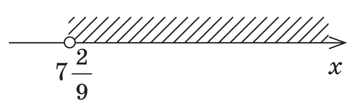
Див. приклад 2

2 Запишіть у вигляді проміжку множину точок, зображену на рисунку.

1) 

3) 

2) 

4) 

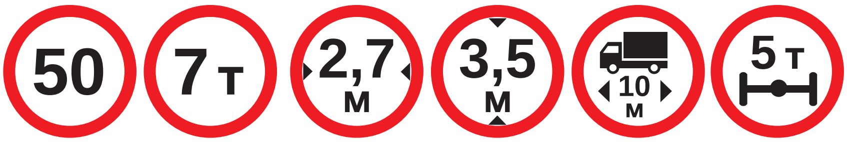
3 Укажіть усі цілі розв'язки заданої нерівності, які належать зазначеному проміжку (якщо такі розв'язки існують):

1) $x \geqslant 2$, $[-2; 2]$;   3) $x \geqslant 0$, $(-5; 0]$;

2) $x < 5$, $(3; 5)$;   4) $x > 6$, $[6; 7)$.

Див. завдання 2, 3 «Інтелектуального фітнесу»

4 Визначте зміст повідомлень, які отримують учасники дорожнього руху з наведених дорожніх знаків. Уведіть необхідні буквені позначення та спробуйте записати ці повідомлення за допомогою нерівностей.



Бонусні завдання

5 Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності:

1) $-3 \leqslant x \leqslant 2$;   3) $\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}+1$;

2) $0 \leqslant x \leqslant 2$;   4) $-1{,}2 \leqslant y \leqslant 0$.

6 Використовуючи координатну пряму, позначте кольором спільну частину двох проміжків (якщо це можливо):

1) $[-3; 0]$ і $[-2; +\infty)$;   4) $(-\infty; 10]$ і $(7{,}2; 2018]$;

2) $[-4{,}5; 10)$ і $(0; 12)$;   5) $(-6; 3]$ і $[3; 5]$;

3) $(-\infty; -3)$ і $[-7; +\infty)$;   6) $(-\infty; 5)$ і $(5; +\infty)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 1655 р. у трактаті англійського математика Джона Валліса «Про конічні перетини» уперше було використано символ ∞ як знак нескінченності.

Можливо, вигляд цього символу пов'язаний із виглядом останньої літери грецького алфавіту ω (омега).

Але ймовірніше, цей символ пішов від записаного римськими цифрами числа 1000, яке іноді трактувалося як «багато». У XVI ст. тисячу зображали як CIↃ, а на письмі скорочували до ∞ або M.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Відомо, що $a > b$. Визначте, чи може бути правильною рівність:

1) $a-b=5$;   4) $a=b+9{,}5$;   7) $b=a-\frac{2}{7}$;

2) $a-b=-2$;   5) $a+\sqrt{2}=b$;   8) $b=a+\frac{1}{3}$.

3) $a=b-4{,}1$;   6) $a-\sqrt{5}=b$;

«Щоб стати великим, треба думати про великі плани. Завжди плануйте майбутнє.»

Пітер Тіль

TO BE SMART

Радимо прочитати книжку Пітера Тіля «Від нуля до одиниці: Нотатки про стартапи, або Як створити майбутнє» («Zero to One»), яку вважають однією з найкращих книжок про бізнес (можна також прослухати аудіокнигу).

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–4

1 Ви познайомилися з числовими нерівностями та їх властивостями, навчилися порівнювати числа методом різниці, додавати й множити числові нерівності.

Нерівності, у яких обидві частини є числовими виразами, називають **числовими нерівностями.**

Нерівності бувають **строгими** (знаки «$>$» і «$<$») **і нестрогими** (знаки «$\geqslant$» і «$\leqslant$»).

Алгоритм порівняння чисел a і b методом різниці

1. Утворити різницю $a-b$.
2. Визначити знак різниці $a-b$.
3. Зробити висновок:
   - якщо $a-b>0$, то $a>b$;
   - якщо $a-b<0$, то $a<b$;
   - якщо $a-b=0$, то $a=b$.

Основні властивості числових нерівностей

- Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $a<b$, то $b>a$.
- Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.
- Якщо $a>b$ і c — будь-яке число, то $a+c>b+c$.
- Якщо $a<x<b$ і c — будь-яке число, то $a+c<x+c<b+c$.
- Якщо $a>b$ і $c>0$, то $ac>bc$.
- Якщо $a<x<b$ і $c>0$, то $ac<cx<bc$.
- Якщо $a>b$ і $c<0$, то $ac<bc$.
- Якщо $a<x<b$ і $c<0$, то $bc<cx<ac$.
- Якщо $ab>0$ і $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Додавання числових нерівностей

- Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$.
- Якщо $a<x<b$ і $c<y<d$, то $a+c<x+y<b+d$.
- Якщо $a\geqslant b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$.

Множення числових нерівностей

Для $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$:

- Якщо $a>b$ і $c>d$, то $ac>bd$.
- Якщо $a<x<b$ і $c<y<d$, то $ac<xy<bd$.

2 Ви дізналися, що таке нерівності з однією змінною, навчилися записувати й позначати на числовій прямій множини розв'язків цих нерівностей.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають таке значення змінної, яке перетворює нерівність у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Множину розв'язків нерівності найчастіше записують у вигляді **числових проміжків.**

Характеристика нерівності	Знак нерівності	Зображення точок на числовій прямій	Дужки для позначення числового проміжку
Нестрога нерівність	$\leqslant$ $\geqslant$		[;]
Строга нерівність	$<$ $>$		(;)

Позначення числових проміжків та зображення їх на числовій прямій — с. 49 (таблиця).

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Варіант 2 контрольної роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Оцініть значення виразу $\frac{x}{2}$, якщо $-2<x<14$.

А	Б	В	Г
$0<\frac{x}{2}<16$	$-4<\frac{x}{2}<28$	$-1<\frac{x}{2}<7$	$-4<\frac{x}{2}<12$

2 Оцініть значення виразу $a+b$, якщо $1<a<15$ і $6<b<8$.

А	Б	В	Г
$9<a+b<21$	$7<a+b<23$	$-5<a+b<7$	$7<a+b<21$

3 Укажіть нерівність, яка є правильною при всіх дійсних b.

А	Б	В	Г
$2b\geqslant b$	$b-2\geqslant b+2$	$2(b-1)\geqslant 0$	$(b-1)^2\geqslant 0$

4 Відомо, що $7<q<16$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{q}$.

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{7}<\frac{1}{q}<-\frac{1}{16}$	$-16<\frac{1}{q}<-7$	$\frac{1}{16}<\frac{1}{q}<\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}<\frac{1}{q}<\frac{1}{16}$

5 Укажіть число, яке є розв'язком нерівності $-2\leqslant x<3$.

А	Б	В	Г
-3	-1	3	5

6 Відомо, що $1\leqslant a\leqslant 2$ і $3\leqslant b\leqslant 5$. Укажіть число, яке *не може* бути значенням виразу ab.

А	Б	В	Г
2	3	5	10

7 Відомо, що $-4<x<9$. Оцініть значення виразу $20-3x$.

8 Для закупівлі енергозберігальних ламп за ціною 50 грн планують виділити від 700 до 1100 грн.

1) Скільки таких ламп можна закупити на заплановану суму?

2) Яку найбільшу кількість таких ламп можна закупити на заплановану суму, якщо ціна однієї лампи збільшиться на 20 %?

9 Доведіть нерівність $(c-5)^2>-c(10-c)$, якщо c — довільне дійсне число.

10 Доведіть нерівність $(2+a)(2+b)\geqslant 8\sqrt{ab}$ для $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

Бонусне завдання

Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності $-3\leqslant y\leqslant 1$.

§ 5 ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РІВНОСИЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

ВЧОРА — Ви розв'язували лінійні рівняння з однією змінною та зображували на координатній прямій числові проміжки, задані нерівностями з однією змінною

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся виконувати рівносильні перетворення нерівностей та розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною

ЗАВЖДИ — Ви зможете розраховувати час виконання завдань контрольної роботи та розв'язувати задачі логістики

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Термін «коефіцієнт інтелекту» (англ. IQ — *intelligence quotient*) уперше введений у 1912 р. німецьким психологом і філософом В. Штерном. IQ являє собою кількісну оцінку рівня інтелекту будь-якої людини порівняно з рівнем інтелекту середньостатистичної людини того самого віку. Для визначення IQ застосовують спеціальні тести.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Руслан виконував тест на визначення коефіцієнта інтелекту (IQ). Він розв'язав m завдань із вибором одного варіанта відповіді, витративши на розв'язання кожного завдання 2 хв, і 4 завдання з короткою відповіддю, витративши на їх розв'язання по 3 хв на кожне. Знайдіть усі можливі значення m, якщо на виконання всіх завдань тесту хлопець витратив не більше ніж 30 хв.

Розв'язання

Завдання із вибором відповіді Руслан розв'язав за $2m$ хв, а завдання з короткою відповіддю — за $3 \cdot 4 = 12$ хв. Отже, на виконання всіх завдань хлопець витратив $(2m+12)$ хв, що має бути менше або дорівнювати 30 хв. Таким чином, можна скласти нерівність: $2m+12 \leqslant 30$, при цьому за умовою задачі m — натуральне число.

У даному випадку ми можемо *підібрати* розв'язки нерівності. Очевидно, що $m=9$ є найбільшим натуральним розв'язком, який задовольняє умову задачі. Тоді розв'язком задачі є всі натуральні числа від 1 до 9.

Проте у випадках, коли потрібно знайти всі розв'язки нерівності, доцільно застосовувати правила розв'язування нерівностей. У цьому параграфі ви дізнаєтеся, як розв'язувати нерівності, що містять змінну.

СЛІД ЗНАТИ!

Розв'язком нерівності з однією змінною називають таке значення змінної, яке перетворює нерівність у правильну числову нерівність.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

З курсу алгебри 8 класу ви вже знаєте, що рівняння, які мають одні й ті самі корені або не мають коренів, називають **рівносильними рівняннями**.

Нерівності, що мають одну й ту саму множину розв'язків або не мають розв'язків, прийнято називати **рівносильними**.

Наприклад:

- пари нерівностей $2x>50$ і $x>25$; $-x+6<2$ і $2x+3>11$ є рівносильними, тому що мають одні й ті самі розв'язки;
- нерівності $x+6<6+x$ і $-4x+2\geqslant 3-4x$ є рівносильними, тому що не мають розв'язків.

Означення. **Рівносильними** називають нерівності, у яких множини розв'язків збігаються.
Нерівності, що не мають розв'язків, також прийнято вважати рівносильними.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Щоб переконатися, що дві нерівності є рівносильними, необхідно знайти **всі** їх розв'язки. Для цього слід знати правила переходу від однієї нерівності до рівносильної їй нерівності. Ці правила випливають із властивостей числових нерівностей і є аналогічними відповідним правилам розв'язування рівнянь.

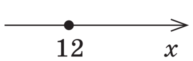
Рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

<table>
<tr><th>Рівняння</th><th>Нерівності</th></tr>
<tr><td>1 Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу доданок, змінивши його знак на протилежний, отримаємо рівняння, рівносильне даному.</td><td>1 Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок, змінивши його знак на протилежний, отримаємо нерівність, рівносильну даній.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.</td><td>2 Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.</td></tr>
<tr><td>3 Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.</td></tr>
</table>

Розглянемо приклади та порівняємо розв'язання рівняння та нерівностей.

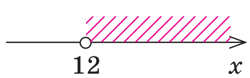
1) $5x+20=80$;
$5x=80-20$;
$5x=60$;
$x=60:5$;
$x=12$.

Корінь рівняння: $x=12$



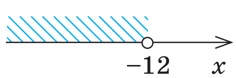
2) $5x+20>80$;
$5x>80-20$;
$5x>60$;
$x>60:5$;
$x>12$.

Множина розв'язків нерівності: $(12;+\infty)$



3) $-5x+20>80$;
$-5x>80-20$;
$-5x>60$;
$x<60:(-5)$;
$x<-12$.

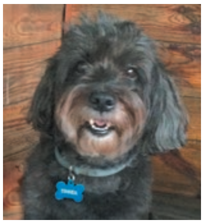
Множина розв'язків нерівності: $(-\infty;-12)$



КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- лінійна нерівність з однією змінною
- розв'язок нерівності
- множина розв'язків нерівності
- рівносильні нерівності
- правила розв'язування лінійних нерівностей

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ



5 собак коштують дорожче, ніж 6 котів. Що дорожче — 6 собак чи 7 котів?

РОЗМИНКА 1

Визначте, чи є рівносильними нерівності:

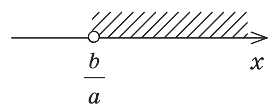
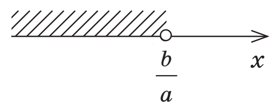
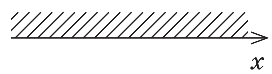
1) $x+3>5$ і $x>2$;
2) $2x-11>3$ і $x<7$;
3) $7a>0$ і $a>0$;
4) $-4a<0$ і $a<0$;
5) $0\cdot x>5$ і $0\cdot x<-6$;
6) $0\cdot x>-5$ і $0\cdot x<8$.

Кожна з нерівностей, які ви розглянули, зводиться до нерівності виду $ax<b$ або $ax>b$ ($ax\leqslant b$ або $ax\geqslant b$), де x — змінна, a і b — деякі числа. Такі нерівності мають власну назву.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Нерівності виду $ax<b$ або $ax>b$ ($ax\leqslant b$ або $ax\geqslant b$), де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійними нерівностями з однією змінною.**

Розглянемо особливості розв'язування лінійної нерівності $ax>b$, склавши таблицю. Зверніть увагу на залежність розв'язків нерівності від значень коефіцієнтів a і b.

Нерівність	Умова	Рівносильна нерівність	Проміжок, який є множиною розв'язків	Зображення проміжку на числовій прямій
$ax>b$	$a>0$	$x>\frac{b}{a}$	$x\in\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$	
	$a<0$	$x<\frac{b}{a}$	$x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$	
	$a=0,\ b\geqslant 0$	$0\cdot x>b$	$\varnothing$	Розв'язків немає
	$a=0,\ b<0$	$0\cdot x>b$	$x\in(-\infty;+\infty)$	

ПОМІРКУЙТЕ

Які з наведених нерівностей не мають розв'язків, а які мають безліч розв'язків? Поясніть свою думку.

1) $0\cdot x<0$;
2) $0\cdot x\leqslant 0$;
3) $0\cdot x>0$;
4) $0\cdot x\geqslant 0$.

РОЗМИНКА 2

Розв'яжіть нерівність:

1) $2+a<4$;
2) $3y+1\leqslant 4$;
3) $\frac{1}{7}x\leqslant 2$;
4) $\frac{2}{5}x>-4$;
5) $-7{,}3a\geqslant 0$;
6) $-\sqrt{2}b<0$;
7) $4-x\leqslant 3x$;
8) $13t+6\leqslant 2t+28$.

У 7 класі ви навчилися розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, що зводяться до лінійних за допомогою рівносильних перетворень. Низку нерівностей з однією змінною також можна звести до лінійних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень.

?

Складіть алгоритм розв'язування нерівностей, що зводяться до лінійних нерівностей з однією змінною, пронумерувавши кроки в правильному порядку. Використайте свій досвід розв'язування рівнянь.

АЛГОРИТМ

Крок ___
У кожній частині нерівності звести подібні доданки.

Крок ___
Перенести доданки, що містять змінну, у ліву частину нерівності, а доданки, які не містять змінної, — у праву частину.

Крок ___
Записати множину розв'язків нерівності за допомогою числового проміжку.

Крок ___
Поділити обидві частини нерівності на коефіцієнт при змінній.

Крок ___
Зобразити множину розв'язків нерівності на числовій прямій.

Крок ___
Розкрити дужки в кожній частині нерівності (якщо вони є).

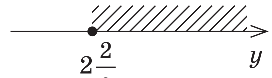
Крок ___
Урахувати правило:
- якщо коефіцієнт при змінній — додатне число, то знак нерівності не змінюється;
- якщо коефіцієнт при змінній — від'ємне число, то знак нерівності змінюється на протилежний.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть нерівність $2{,}5(2-y)-1{,}5(y-4)\leqslant 3-y$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкриємо дужки в лівій частині нерівності. Перенесемо доданки, які містять змінну, в ліву частину нерівності, а доданки, які не містять змінної, — у праву. Зведемо подібні доданки.	$5-2{,}5y-1{,}5y+6\leqslant 3-y$; $-2{,}5y-1{,}5y+y\leqslant 3-5-6$; $-3y\leqslant -8$
КРОК 2	Поділимо обидві частини нерівності на -3, змінивши знак нерівності на протилежний.	$y\geqslant \frac{8}{3}$; $y\geqslant 2\frac{2}{3}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 3	Зобразимо множину розв'язків отриманої нерівності на числовій прямій.	
КРОК 4	Запишемо множину розв'язків нерівності проміжком.	$y\in\left[2\frac{2}{3};+\infty\right)$

Відповідь: $y\in\left[2\frac{2}{3};+\infty\right)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Значення коефіцієнта інтелекту $81\leqslant IQ\leqslant 90$ мають 14,5 % населення Землі;

$91\leqslant IQ\leqslant 110$ — 50 %;

$111\leqslant IQ\leqslant 120$ — 14,5 %;

$121\leqslant IQ\leqslant 131$ — 8,5 %;

$IQ\geqslant 132$ — 1,9 %;

$IQ\geqslant 150$ — 0,1 %.

ТРЕНУЄМОСЯ

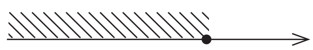
1 Розв'яжіть нерівність:

1) $x-12\geqslant 0$;
2) $x+23\leqslant 0$;
3) $5x+35<0$;
4) $18x-3>0$;
5) $8x-3>14x+9$;
6) $2x-11<5x+4$;
7) $0{,}5(9+10x)+1{,}5(2x+1)\geqslant 11+10x$;
8) $0{,}5(2x+1)+4(x+0{,}1)\geqslant 3x-6{,}1$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть нерівність $t-\frac{1-2t}{10}\leqslant 4+\frac{t-3}{5}$. У відповідь запишіть усі натуральні розв'язки цієї нерівності.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Помножимо обидві частини нерівності на 10, при цьому знак нерівності не змінюється.	$10t-(1-2t)\leqslant 40+2(t-3)$
КРОК 2	Розкриємо дужки, перенесемо в ліву частину нерівності доданки, що містять змінну, у праву — доданки, що не містять змінної. Зведемо подібні доданки. Знак нерівності не змінюється.	$10t-1+2t\leqslant 40+2t-6$; $10t+2t-2t\leqslant 40-6+1$; $10t\leqslant 35$
КРОК 3	Поділимо обидві частини нерівності на 10, при цьому знак нерівності не змінюється.	$t\leqslant 3{,}5$
КРОК 4	Зобразимо на числовій прямій множину розв'язків отриманої нерівності та виберемо з неї натуральні розв'язки.	 $t=1$, $t=2$, $t=3$ — натуральні розв'язки нерівності

Відповідь: $\{1;2;3\}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-2}{6} \leqslant \frac{5}{6}$; 2) $\frac{3+x}{9} \geqslant \frac{11}{9}$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 4$; 4) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > 3$.

Розв'яжіть нерівність. У відповідь запишіть усі натуральні розв'язки цієї нерівності.

5) $\frac{2x-1}{3} \leqslant \frac{x+3}{5} + 1$; 7) $x - \frac{3x+1}{6} \leqslant \frac{6-x}{4} + 3$;

6) $\frac{5+3x}{5} \leqslant \frac{3+2x}{4} + 1$; 8) $x - \frac{4x-15}{10} \leqslant \frac{3+x}{5} + 2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

IQ відомих осіб:

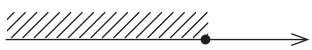
- Теренс Тао — 230
- Мерилін вос Савант — 228
- Кім Унг-Йонг — 210
- Гаррі Каспаров — 190
- Юдіт Полгар — 170
- Стівен Гокінг — 160
- Білл Ґейтс — 160

Фахівці з Центру психометрії в Кембриджі розробили алгоритм, за допомогою якого можна виявити рівень інтелекту людини за її фотографією в соцмережі.

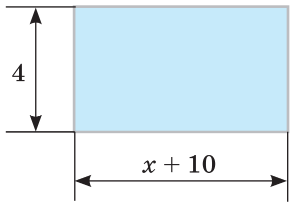
ПРИКЛАД 3

В автомобіль слід завантажити спочатку 5 ящиків з яблуками, а потім — мішки з цукром. Маса одного ящика з яблуками дорівнює 35 кг, одного мішка з цукром — 50 кг. Яку найбільшу кількість мішків із цукром можна завантажити в автомобіль, якщо загальна маса вантажу не має перевищувати 2 т?

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо позначення для змінної величини, яка є шуканою.	Нехай можна завантажити n мішків цукру, $n \in \mathbb{N}$
КРОК 2	Знайдемо загальну масу яблук, які завантажили в автомобіль.	35 кг · 5 ящиків = 35 · 5 (кг)
КРОК 3	Запишемо вираз, за яким можна визначити загальну масу цукру, що має бути завантажений в автомобіль.	50 кг · n мішків $= 50 \cdot n$ (кг)
КРОК 4	Складемо **математичну модель задачі**, тобто утворимо нерівність, ураховуючи, що маса вантажу не перевищує 2 т, і користуючись тим, що «не перевищує» означає «менша або дорівнює».	$35 \cdot 5 + 50 \cdot n \leqslant 2000$
КРОК 5	Розв'яжемо отриману нерівність.	$35 \cdot 5 + 50 \cdot n \leqslant 2000 \mid : 25$; $7 + 2 \cdot n \leqslant 80$; $2n \leqslant 73$; $n \leqslant \frac{73}{2}$; $n \leqslant 36\frac{1}{2}$
КРОК 6	Визначимо найбільший натуральний розв'язок нерівності — саме він визначатиме найбільшу кількість мішків цукру, які можна завантажити.	 $36\frac{1}{2}$ n $n = 36$

Відповідь: 36 мішків.



ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть задачу.

1) На рисунку зображено схему ділянки прямокутної форми, призначеної для будівництва велопарковки. Знайдіть усі можливі натуральні значення x, якщо площа ділянки не повинна перевищувати 68.

2) Студент на період літніх канікул влаштувався на роботу в кафе за умови роботи як у приміщенні, так і на літньому майданчику. За контрактом він отримує 8 г. о. за 1 год роботи і додатково 20 г. о. у день, якщо обслуговує також клієнтів на майданчику. Яку найменшу кількість повних годин у день має працювати студент, щоб отримувати щодня загальну суму, не меншу ніж 70 г. о.?

3) На виставці квітів Марія зробила 14 фотографій, а її подружка Мирослава — більше фотографій, ніж Марія.
   а) Скільки фотографій могла зробити Мирослава?
   б) Яку найменшу кількість фотографій могла зробити Мирослава? Яку найменшу кількість фотографій могли зробити дві подружки разом?

4) На флеш-накопичувач, обсяг пам'яті якого не перевищує 64 Гб, мають записати спочатку 6 мультимедійних презентацій, а потім — фільми. Обсяг однієї презентації становить 2 Гб, а одного фільму — 3,5 Гб.
   а) Запишіть нерівність для визначення кількості x фільмів, які можна записати на флеш-накопичувач.
   б) Яку найбільшу кількість фільмів можна записати на флеш-накопичувач?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Нещодавно всесвітня служба новин BBC склала рейтинг найбільш затребуваних професій у світі.

1. Медичні сестри.
2. Інженери-механіки.
3. Лікарі.
4. Інженери-електрики.
5. Програмісти.
6. IT-аналітики та інженери.
7. Спеціалісти із цивільного будівництва.
8. Фахівці з комп'ютерних мереж і баз даних.
9. Бухгалтери.
10. Стоматологи.

ПРИГАДАЙТЕ!

Арифметичний квадратний корінь має зміст лише тоді, коли підкореневий вираз набуває невід'ємних значень.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть область допустимих значень виразу $\sqrt{-\frac{7}{2}x-14}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо твердження «значення підкореневого виразу невід'ємне» у вигляді нерівності.	$-\frac{7}{2}x-14\geqslant 0$
КРОК 2	Перенесемо доданок, що не містить змінної, у праву частину, змінивши його знак на протилежний.	$-\frac{7}{2}x\geqslant 14$
КРОК 3	Помножимо обидві частини нерівності, отриманої на кроці 2, на $-\frac{2}{7}<0$, змінивши знак на протилежний.	$-\frac{7}{2}x\geqslant 14 \left\vert \cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\right.$; $x\leqslant -4$

Відповідь: $x\in(-\infty;-4]$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\sqrt{5x+155}$;
2) $\sqrt{-6x+1{,}2}$;
3) $\sqrt{-\frac{4}{5}x-28}$;
4) $\sqrt{1-2\frac{1}{2}y}$;
5) $\sqrt{\frac{\frac{9}{7}x-63}{5}}$;
6) $\sqrt{\frac{-11\frac{2}{3}+7x}{9}}$;
7) $\frac{3x}{\sqrt{-4x-4{,}8}}$;
8) $\frac{3x+5}{\sqrt{28+\frac{2}{3}x}}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2}{3}x>8$;
2) $\frac{y}{4}\leqslant 3$;
3) $-\frac{21}{5}t<0$;
4) $\frac{1}{3}t\geqslant 0$;
5) $\frac{x+3}{2}\leqslant 4$;
6) $\frac{5-4x}{3}>1$.

2 Розв'яжіть нерівність:

1) $m-\frac{1}{4}m\leqslant -2$;
2) $y+\frac{2}{5}y>-\frac{1}{4}$;
3) $\frac{a}{3}+\frac{a}{2}<1$;
4) $\frac{2}{3}y+\frac{1}{5}y\geqslant 26$;
5) $\frac{2x-3}{2}-x>1$;
6) $\frac{5a-1}{3}-2a\leqslant 4$.

3 Утворіть за умовою завдання нерівність і розв'яжіть її.

1) За яких значень змінної t двочлен $25+3t$ набуває від'ємних значень?
2) За яких значень змінної y двочлен $5y-1{,}1$ набуває значень, більших за 3,9?
3) За яких значень змінної m значення виразу $0{,}4m-2$ не менше, ніж значення двочлена $-0{,}6m-11$?
4) За яких натуральних парних значень змінної a значення виразу $5(3a-4)+7(2a-11)$ не більше за подвоєне значення суми $10a+3$?

4 Визначте кількість розв'язків нерівності:

1) $2(3x-1)\leqslant 6x$;
2) $10(2t-19)>5(4t+1)$;
3) $-7(2y+5)\geqslant 2(3-7y)$;
4) $5(x-4)-7(x+1)\leqslant -2(x+3)$;
5) $x(x+3)+1\geqslant 3x$;
6) $t(t-6)-2\geqslant -6\left(t+\frac{1}{3}\right)$.

5 Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1-2a}{4}+\frac{1-a}{3}>0$;
2) $\frac{4t-2}{2}-\frac{5t+1}{4}<0$;
3) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-2}{3}<1$;
4) $\frac{a+1}{5}-\frac{a-1}{7}>3$;
5) $\frac{2a-3}{4}+\frac{3a+1}{5}\leqslant a$;
6) $\frac{5y-2}{3}-\frac{3y+7}{6}\geqslant y$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Окрім математичного поняття «нерівність», існують також поняття соціальної, майнової, гендерної нерівності.

Із 2006 р. Світовий економічний форум випускає щорічний звіт, у якому визначається індекс гендерної відмінності, що відображує нерівність у можливостях між чоловіками і жінками в різних країнах світу. Вимірювання відбуваються за чотирма ключовими напрямами:

- економічні й кар'єрні можливості;
- освіта;
- здоров'я й виживання;
- політичні права й можливості.

За даними 2015 р., перше місце за індексом гендерної рівності посіла Ісландія. Україна зайняла 67-ме місце серед 142 країн.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомтеся з інтерактивною картою гендерної рівності, створеною за результатами звіту Світового економічного форуму: reports.weforum.org/global-gender-gap-report-2015/#frame/dd4ad

Готуємося до ЗНО

TO BE SMART

Радимо прочитати книжку «Велика книга IQ-тестів: 1600 завдань» авторів кращих видань з IQ-тестування Кена Рассела та Філіпа Картера.

Ця книжка допоможе вам:

- дізнатися свій IQ;
- підвищити рівень інтелекту;
- розвинути логічне мислення;
- підготуватися до тестування;
- отримати престижну роботу.

Юдіт Полгар (угор. *Judit Polgar*; нар. 1976) — угорська шахістка, яка в 15 років стала наймолодшим гросмейстером у світі, перевершивши рекорд Боббі Фішера на місяць. Батько навчав шахам її та сестер удома, довівши, що діти можуть досягти неймовірних успіхів, якщо починати навчання із самого малечку. Юдіт очолювала жіночий рейтинг шахісток протягом 26 років (1989–2015).

6 Розв'яжіть нерівність і запишіть відповідь згідно із заданою умовою.

1) $1+\frac{x-5}{4}\leqslant x-\frac{2-x}{3}$; найменший натуральний розв'язок;

2) $2c-\frac{4-c}{3}<\frac{c+1}{4}-1$; найбільший цілий розв'язок;

3) $m-\frac{4m-1}{3}\geqslant\frac{8-m}{2}+2$; найменший натуральний парний розв'язок;

4) $\frac{1}{20}(5y-1)\geqslant\frac{3y-1}{15}+1$; найменший розв'язок, який належить проміжку $[22;29]$;

5) $\frac{4n-12}{22}+n<\frac{3n}{11}+4$; сума всіх натуральних розв'язків;

6) $\frac{5-7x}{12}\leqslant-x+1+\frac{2x+1}{18}$; кількість усіх цілих розв'язків, що належать проміжку $(-5;4]$.

7 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\sqrt{11-x}$;
2) $\sqrt{-(13-x)}$;
3) $\sqrt{2x-6{,}28}$;
4) $\sqrt{-\frac{1}{5}x+18}$;
5) $\sqrt{\frac{42-5t}{3}}$;
6) $\sqrt{\frac{\frac{2}{3}y-8}{5}}$.

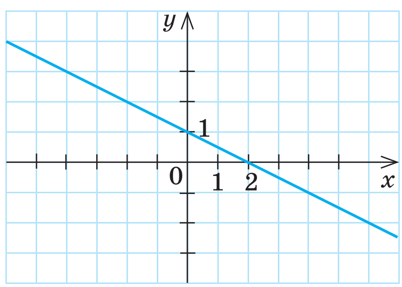
ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}>0$, то $x>-1$.

2) Якщо $\frac{x}{6}>\frac{x}{7}$, то $x>0$.

На рисунку зображено графік лінійної функції $y=f(x)$.



3) Якщо $f(x)>0$, то $x<2$.

4) Якщо $x>2$, то $f(x)<0$.

5) Якщо $f(x)>1$, то $x<0$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

1 Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x > -14$.

А	Б	В	Г
-10	-14	-18	-25

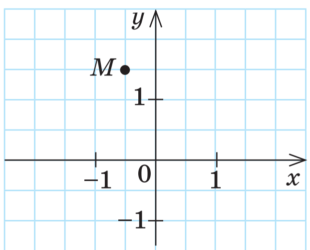
2 Розв'яжіть нерівність $3x \geqslant 15$.

А	Б	В	Г
$(-\infty; 12]$	$(-\infty; 5]$	$[5; +\infty)$	$[12; +\infty)$

3 Розв'яжіть нерівність $6 - x \geqslant 0$.

А	Б	В	Г
$[6; +\infty)$	$[-6; +\infty)$	$(-\infty; -6]$	$(-\infty; 6]$

4 На рисунку зображено точку $M(x_0; y_0)$ на координатній площині. Укажіть проміжок, якому належить число y_0.



А	Б	В	Г
$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$

5 Перед показом фільму тривалістю 120 хв транслюють рекламний блок із x роликів по 2 хв кожний. Показ фільму разом із рекламою має тривати не більше ніж 130 хв. Укажіть нерівність для визначення x.

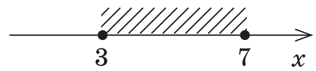
А	$x + 120 \leqslant 130$	В	$2x + 120 \geqslant 130$
Б	$2x + 120 \leqslant 130$	Г	$x + 120 \geqslant 130$

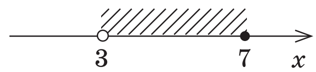
6 Установіть відповідність між проміжками (1–3) та їх зображеннями (А–Г) на числовій прямій.

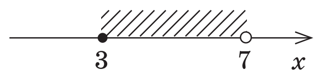
1 $[3; 7)$

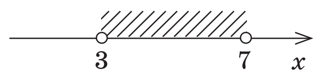
2 $(3; 7)$

3 $(3; 7]$

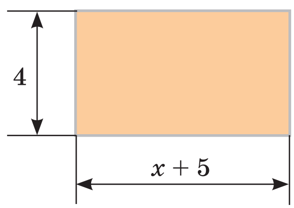
А 

Б 

В 

Г 

7 На рисунку зображено схему ділянки прямокутної форми, призначеної для облаштування автобусної зупинки. Площа ділянки не повинна перевищувати 48.



1) Запишіть нерівність для визначення x.
2) Знайдіть усі можливі натуральні значення x.

8 Розв'яжіть нерівність $x - \frac{3x-7}{2} \geqslant \frac{5-x}{3} + 1$. Запишіть усі натуральні розв'язки цієї нерівності.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Інженери-диспетчери з організації перевезень залізничним транспортом забезпечують виконання графіка руху потягів, безпеку руху, збереження вантажів і рухомого складу, організують раціональне керування вагоно- і пасажиропотоками.

Професії, пов'язані із залізничним транспортом, можна отримати в Українському державному університеті залізничного транспорту.

Дізнайтеся більше: kart.edu.ua

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «РЕНТАБЕЛЬНІСТЬ ПЕРЕВЕЗЕННЯ ВАНТАЖУ»

Транспортні витрати y (у г. о.) на перевезення певного вантажу на відстань x км залізничним транспортом виражаються функцією $y=x+200$, а автомобільним — функцією $y=3x+80$.

1. Визначте транспортні витрати (у г. о.) на перевезення цього вантажу на відстань 28 км:
   а) залізничним транспортом; б) автомобільним транспортом.
2. Знайдіть відстань (у км), починаючи з якої витрати на перевезення цього вантажу залізницею будуть не менші ніж 540 г. о.
3. На яку відстань (у км) цей вантаж вигідніше перевозити залізничним транспортом, ніж автомобільним?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

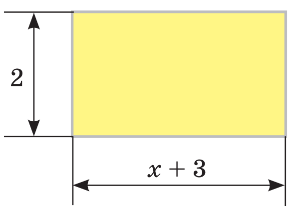
1. Розв'яжіть нерівність:
   1) $x-16\leqslant 0$;
   2) $28x+4>0$;
   3) $31x+63>36x+23$;
   4) $0{,}5(18x+1)-1{,}5(2x-3)\geqslant 8x+2$.

Див. приклад 2

2. Розв'яжіть нерівність:
   1) $\dfrac{x+4}{8}\leqslant\dfrac{13}{8}$;
   2) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{4}>1$.

   Розв'яжіть нерівність. У відповідь запишіть усі натуральні розв'язки цієї нерівності.
   3) $\dfrac{3x-1}{3}\leqslant\dfrac{x+4}{2}+1$;
   4) $x+\dfrac{6x+20}{15}\leqslant\dfrac{2+6x}{5}+2$.

3. Розв'яжіть задачу.
   1) На рисунку зображено схему ділянки прямокутної форми, яку призначено для спорудження альтанки. Знайдіть усі можливі натуральні значення x, якщо площа цієї ділянки не повинна перевищувати 14.



   2) На приготування одного тістечка «картопля» витрачається 10 г цукрової пудри, а сирного торта — 200 г цукрової пудри. Маргарита приготувала n тістечок «картопля» та один сирний торт, витративши на всі солодощі не більше за 0,5 кг цукрової пудри. Знайдіть усі можливі значення n.

Див. приклад 3

   3) У будинку є лише двокімнатні та однокімнатні квартири. Двокімнатних квартир 27, а однокімнатних квартир більше, ніж двокімнатних.
      а) Скільки однокімнатних квартир може бути в будинку?
      б) Яка найменша кількість однокімнатних квартир може бути в будинку?
      в) Яка найменша кількість квартир може бути в будинку?

4) Вхідний квиток у парк розваг для однієї особи коштує 15 г. о., а вартість відвідування одного атракціону на двох — 25 г. о. Дві подруги планують витратити на відпочинок у цьому парку не більше ніж 200 г. о.

а) Запишіть нерівність для визначення кількості x атракціонів, які можуть відвідати дівчата.

б) Яку максимальну кількість атракціонів можуть відвідати дівчата?

ПРИГАДАЙТЕ!
Областю допустимих значень (ОДЗ) виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.

4 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\sqrt{-18+x}$; 3) $\sqrt{-\frac{1}{2}x-300}$;

2) $\sqrt{-\left(3x+\frac{1}{3}\right)}$; 4) $\sqrt{\frac{-2{,}5y+17{,}5}{3}}$.

Див. приклад 4

5 Утворіть за умовою завдання нерівність і розв'яжіть її.

1) За яких значень змінної x значення виразу $17-x$ більше, ніж подвоєне значення двочлена $5-3x$?

2) За яких натуральних значень змінної n значення виразу $-12+7n$ не перевищує значення виразу $6n-1$?

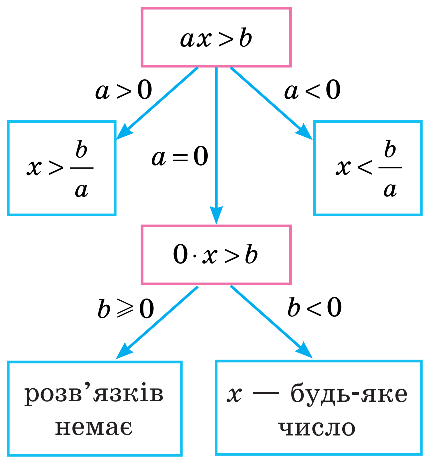
Див. завдання 3 «Інтелектуального фітнесу»

6 Визначте зміст умовних знаків (див. рисунок), які є підказками для догляду за одягом (прання, прасування). Введіть необхідні буквені позначення та спробуйте записати ці знаки за допомогою рівнянь або нерівностей.

Бонусні завдання

7 Знайдіть значення a, при яких квадратне рівняння $x^2-8x-4a=0$: 1) має два корені; 2) не має коренів.

8 Складіть таблиці або схеми розв'язування нерівностей $ax<b$, $ax\leqslant b$ і $ax\geqslant b$ залежно від значень коефіцієнтів a і b за зразком (див. схему).



ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

1) $|x|=2$; 3) $|4x-21|-35=0$; 5) $24+|5x-60|=0$;

2) $3|x|-15=0$; 4) $|2x+45|-31=0$; 6) $|6x-42|+30=0$.

«Що в шахах найнеймовірніше для мене — це гра для всіх і кожного: бідного, багатого, хлопця, дівчини… Це фантастична гра, яка об'єднує людей і зв'язує покоління!»

Юдіт Полгар

§ 6 ОБ'ЄДНАННЯ ТА ПЕРЕРІЗ МНОЖИН

ВЧОРА Ви зображували множини за допомогою кругів Ейлера, а переріз кількох множин — за допомогою діаграм Ейлера — Венна

СЬОГОДНІ Ви навчитеся знаходити об'єднання та переріз числових проміжків

ЗАВЖДИ Ви зможете застосовувати поняття перерізу та об'єднання до будь-яких множин, елементами яких є різні об'єкти (геометричні фігури, літери алфавіту, ноти тощо)

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Шейпінг (*від англ. shaping* — надання форми) — це сучасна наукомістка комплексна оздоровча система, яка передбачає гармонійний розвиток і вдосконалення людини.

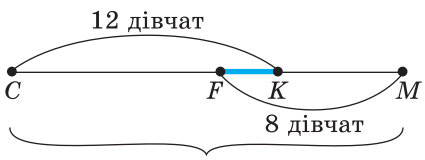


Рис. 1

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Серед 17 дівчат класу 12 займаються шейпінгом, 8 — бодіфлексом. Визначте, скільки дівчат займаються обома видами фітнесу, якщо відомо, що кожна дівчина обов'язково займається хоча б одним із цих видів спорту.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу за допомогою геометричної схеми (рис. 1).

Зображені на схемі відрізки позначають:

CM — кількість усіх дівчат класу;

CK — кількість дівчат, які займаються шейпінгом;

FM — кількість дівчат, які займаються бодіфлексом;

FK — шукану кількість дівчат, які займаються і шейпінгом, і бодіфлексом.

Тоді CF — кількість дівчат, які займаються **лише** шейпінгом: $CF = CM - FM$; $CF = 17 - 8 = 9$ (дівчат);

FK — кількість дівчат, які займаються обома видами фітнесу: $FK = CK - CF$; $FK = 12 - 9 = 3$ (дівчини).

ПРИГАДАЙТЕ!

Перерізом множин A і B називають множину їх спільних елементів.

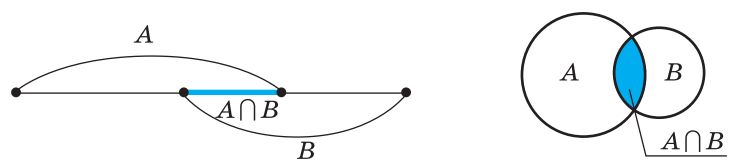
Записують: $A \cap B$

($\cap$ — знак перерізу).

ГОЛОВНА ІДЕЯ

З курсу 8 класу вам відомі поняття множини, підмножини, числових множин, перерізу множин.

В актуальній задачі кількість дівчат, які займаються обома видами фітнесу, відповідає поняттю перерізу множин A і B, якщо прийняти, що A — множина дівчат, які займаються шейпінгом, B — множина дівчат, які займаються бодіфлексом. Графічною інтерпретацією перерізу множин може бути рис. 2 (*а* або *б*). Такі рисунки знайомі вам із 8 класу.



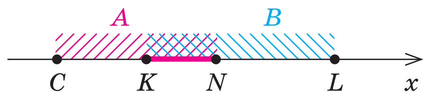
а б

Рис. 2

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- множина
- об'єднання проміжків
- переріз проміжків

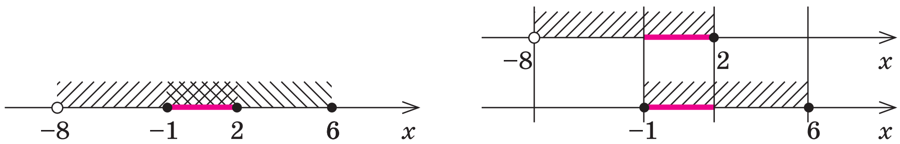
Якщо кожну із множин A і B зобразити проміжком, на якому штриховкою позначено всі елементи множини, то спільна частина цих проміжків (де перетинаються, тобто накладаються, штриховки) і є **перерізом проміжків** (рис. 3).



KN — переріз множин A і B

Рис. 3

Наприклад, перерізом проміжків $(-8;2]$ і $[-1;6]$ є проміжок $[-1;2]$. Записують: $(-8;2]\cap[-1;6]=[-1;2]$, графічна інтерпретація наведена на рис. 4 (*а*, *б*).



а б

Рис. 4

СЛІД ЗНАТИ!

Переріз кількох числових проміжків — множина всіх чисел, що належать кожному з цих проміжків.

РОЗМИНКА 1

Зобразіть на числовій прямій задані проміжки, знайдіть їх переріз та запишіть відповідь.

1) $[-2;10]$ і $(-11;5)$;
2) $[4;+\infty)$ і $[0;6]$;
3) $(-\infty;11)$ і $[-4;7)$;
4) $(-3;5)$ і $[2;+\infty)$;
5) $(-\infty;6]$ і $[6;+\infty)$;
6) $(-\infty;10)$ і $[10;+\infty)$.

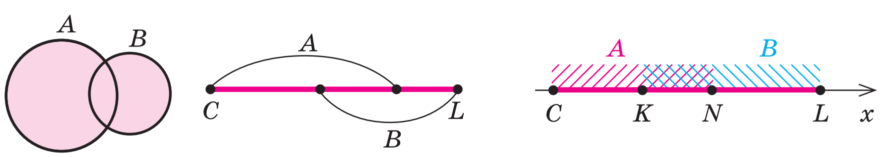
ПРИГАДАЙТЕ!
Одним із перших, хто використовував кола для розв'язування завдань, був видатний німецький математик і філософ Ґотфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716).

Окрім поняття перерізу множин, важливим є також поняття об'єднання множин.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

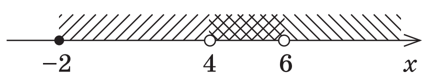
Означення. **Об'єднанням множин** A **і** B називають множину всіх елементів, які належать **хоча б одній** із множин A і B.
Записують: $A\cup B$ ($\cup$ — знак об'єднання).

Графічна інтерпретація об'єднання множин A і B наведена на рис. 5 (на рис. *б* і *в* CL — об'єднання множин).

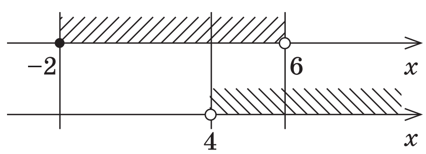


а б в

Рис. 5



а



б

Рис. 6

Наприклад, об'єднанням проміжків $[-2;6)$ і $(4;+\infty)$ є проміжок $[-2;+\infty)$ (рис. 6, *а*, *б*). Записують: $[-2;6)\cup(4;+\infty)=[-2;+\infty)$.

СЛІД ЗНАТИ!

Об'єднання кількох числових проміжків — множина всіх чисел, що належать хоча б одному з цих проміжків.

ПРИГАДАЙТЕ!

- Метод кіл Лейбніца розвинув швейцарський математик Леонард Ейлер (1707–1783). Найбільшої уваги графічним методам було приділено в працях англійського логіка Джона Венна (1843–1923).
- Зображення множин у вигляді кіл називають колами Ейлера, а схематичні зображення перерізів множин — діаграмами Ейлера — Венна.

РОЗМИНКА 2

Зобразіть на числовій прямій задані проміжки, знайдіть їх об'єднання та запишіть відповідь.

1) $(-\infty;2]$ і $(-\infty;5]$;
2) $(5;+\infty)$ і $(7;+\infty)$;
3) $(2;7]$ і $[5;11]$;
4) $(-\infty;11)$ і $(10;+\infty)$;
5) $[-6;11]$ і $[12;16)$;
6) $(-\infty;13)$ і $[13;+\infty)$.

Об'єднання і переріз числових проміжків не завжди є числовим проміжком. *Наприклад:*

- числові проміжки $[-5;2)$ і $[3;7]$ (рис. 7) не мають спільних точок. Перерізом цих проміжків є порожня множина $(\varnothing)$, яка **не є числовим проміжком**. Записують: $[-5;2)\cap[3;7]=\varnothing$. Об'єднанням цих проміжків є множина чисел $[-5;2)\cup[3;7]$, яка також **не є числовим проміжком**;
- числові проміжки $(-\infty;2]$ і $[2;+\infty)$ (рис. 8) мають одну спільну точку — число 2. Перерізом цих проміжків є множина, що складається з одного елемента $\{2\}$ і **не є числовим проміжком**. Записують: $(-\infty;2]\cap[2;+\infty)=\{2\}$. А об'єднанням цих проміжків є множина всіх дійсних чисел — проміжок $(-\infty;+\infty)$. Записують: $(-\infty;2]\cup[2;+\infty)=(-\infty;+\infty)$.

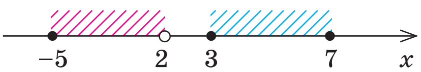


Рис. 7

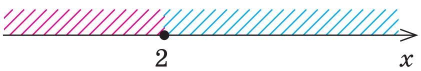
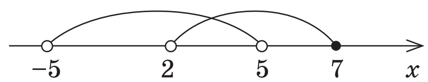
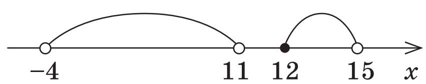
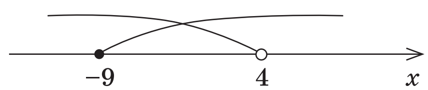
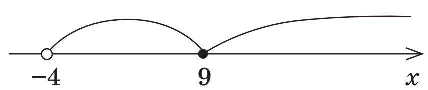
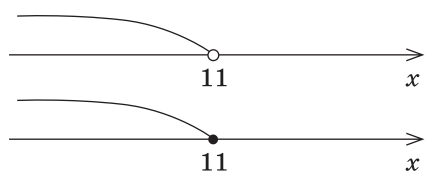
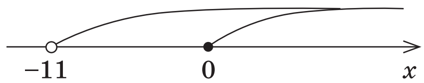
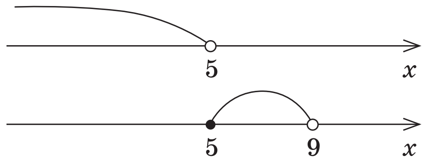


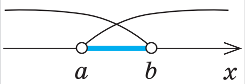
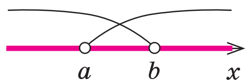
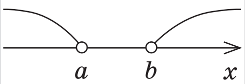
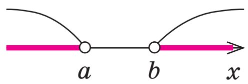
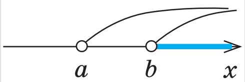
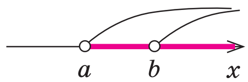
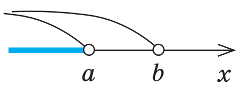
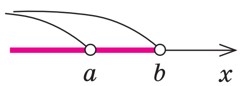
Рис. 8

Приклади знаходження перерізів та об'єднань числових проміжків

	Числові проміжки	Графічна інтерпретація	Переріз	Об'єднання
1	$(-5;5)$ і $(2;7]$		$(2;5)$	$(-5;7]$
2	$(-4;11)$ і $[12;15)$		$\varnothing$	$(-4;11)\cup[12;15)$
3	$(-\infty;4)$ і $[-9;+\infty)$		$[-9;4)$	$(-\infty;+\infty)$
4	$(-4;9]$ і $[9;+\infty)$		$\{9\}$, або $x=9$	$(-4;+\infty)$
5	$(-\infty;11)$ і $(-\infty;11]$		$(-\infty;11)$	$(-\infty;11]$

	Числові проміжки	Графічна інтерпретація	Переріз	Об'єднання
6	$(-11;+\infty)$ і $[0;+\infty)$		$[0;+\infty)$	$(-11;+\infty)$
7	$(-\infty;5)$ і $[5;9)$		$\varnothing$	$(-\infty;9)$

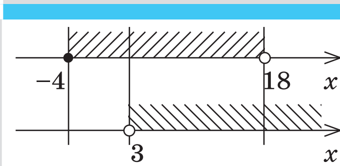
Узагальнимо **можливі** випадки знаходження перерізу та об'єднання проміжків, що є розв'язками нерівностей (для $a<b$).

Нерівності	Переріз проміжків		Об'єднання проміжків	
	графічна інтерпретація	запис	графічна інтерпретація	запис
$x>a,\ x<b$		$a<x<b$, тобто $x\in(a;b)$		$-\infty<x<+\infty$, тобто $x\in(-\infty;+\infty)$ $(x\in \boldsymbol{R})$
$x<a,\ x>b$		$\varnothing$		$x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$
$x>a,\ x>b$		$x>b$, тобто $x\in(b;+\infty)$, «більше більшого»		$x>a$, тобто $x\in(a;+\infty)$, «більше меншого»
$x<a,\ x<b$		$x<a$, тобто $x\in(-\infty;a)$, «менше меншого»		$x<b$, тобто $x\in(-\infty;b)$, «менше більшого»

ПРИКЛАД 1

Знайдіть переріз та об'єднання проміжків $[-4;18)$ і $(3;+\infty)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	На окремих числових прямих зобразимо кожний із даних проміжків. Через точки з координатами –4, 3 та 18 проведемо вертикальні прямі, які ділять числові прямі на 4 проміжки.	
КРОК 2	Знайдемо переріз заданих проміжків, тобто проміжки, позначені обома штриховками (числові значення, що входять у кожний із проміжків).	$x\in(3;18)$
КРОК 3	Знайдемо об'єднання проміжків, тобто проміжки, позначені хоча б однією штриховкою (числові значення, які входять або в один, або в інший проміжок).	$x\in[-4;+\infty)$

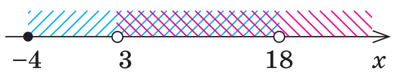


Рис. 9

У цьому завданні можна зобразити обидва задані проміжки на одній числовій прямій (рис. 9), використовуючи для позначення чисел, що належать проміжкам, різний кут нахилу штриховки або різний колір.

Зауважимо, що число 3 не належить проміжку $(3;+\infty)$, але належить проміжку $[-4;18)$; число 18 не належить проміжку $[-4;18)$, але належить проміжку $(3;+\infty)$, тому кожне з цих чисел належить об'єднанню даних проміжків.

Відповідь: $[-4;18)\cap(3;+\infty)=(3;18)$; $[-4;18)\cup(3;+\infty)=[-4;+\infty)$.

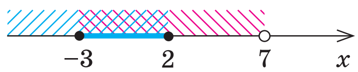
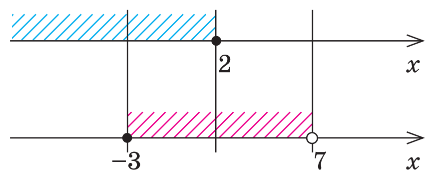
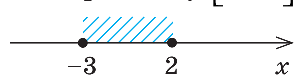


Рис. 10

ПРИКЛАД 2

Зобразіть на числовій прямій множину чисел, які задовольняють кожну з нерівностей $x\leqslant 2$ і $-3\leqslant x<7$.

Розв'язання

<table>
<tr><th>Крок</th><th>Зміст дії</th><th>Результат дії</th></tr>
<tr><td>КРОК 1</td><td>Зобразимо на окремих числових прямих числові проміжки, які відповідають заданим в умові нерівностям.
Через точки $x=-3$, $x=2$, $x=7$ проведемо вертикальні прямі, які ділять числові прямі на 4 проміжки.</td><td></td></tr>
<tr><td>КРОК 2</td><td>Проаналізуємо наявність розв'язків кожної нерівності на кожному проміжку. Для зручності введемо позначення: «+», якщо розв'язки є; «–», якщо розв'язків немає.</td><td><table>
<tr><th rowspan="2">Проміжок</th><th colspan="2">Наявність розв'язків</th></tr>
<tr><th>$x\leqslant 2$</th><th>$-3\leqslant x<7$</th></tr>
<tr><td>$(-\infty;-3)$</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$[-3;2]$</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$(2;7)$</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$[7;+\infty)$</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>КРОК 3</td><td>Зробимо висновок щодо існування спільних розв'язків обох нерівностей. Зобразимо шукану множину.</td><td>Спільні розв'язки обох нерівностей є тільки на проміжку $[-3;2]$
</td></tr>
</table>

У цьому завданні ми фактично знаходимо переріз проміжків $(-\infty;2]$ і $[-3;7)$. Можна шукати спільні розв'язки, використовуючи графічне зображення, подане на рис. 10.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Знайдіть переріз та об'єднання проміжків:

1) $[1;8]$ і $[5;10]$;
2) $(2;6)$ і $(4;9)$;
3) $[-12;7)$ і $(-\infty;5)$;
4) $(-3;10]$ і $(6;+\infty)$.

Зобразіть на числовій прямій множину чисел, які задовольняють кожну з нерівностей:

5) $x>2$ і $-7<x\leqslant 4$;
6) $x\leqslant 1$ і $-11\leqslant x<6$;
7) $x\geqslant 4$ і $5\leqslant x<12$;
8) $x<6$ і $-9<x\leqslant 3$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Автор знаків $\cap$ і $\cup$ — італійський математик Джузеппе Пеано. Уперше ці знаки були використані в 1888 р.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть подвійну нерівність $-2\leqslant 3+2x\leqslant 89$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Віднімемо від усіх частин нерівності число 3.	$-2-3\leqslant 3+2x-3\leqslant 89-3$; $-5\leqslant 2x\leqslant 86$
КРОК 2	Поділимо всі частини нерівності на 2 $(2>0)$. Знак нерівності не змінюється.	$-2,5\leqslant x\leqslant 43$

Відповідь: $x\in[-2,5;43]$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть подвійну нерівність $-1<5-\frac{1}{3}x\leqslant 13$. У відповідь запишіть найбільший натуральний розв'язок.

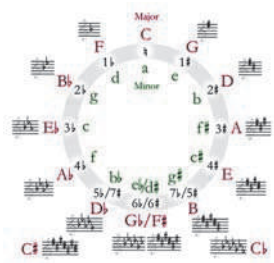
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Віднімемо від усіх частин нерівності число 5.	$-6<-\frac{1}{3}x\leqslant 8$
КРОК 2	Помножимо всі частини нерівності на число -3 $(-3<0)$. Знак нерівності змінюється на протилежний. Запишемо отриману нерівність.	$18>x\geqslant -24$; $-24\leqslant x<18$
КРОК 3	Виберемо найбільший натуральний розв'язок.	Оскільки нерівність строга, то $x\neq 18$, тому значення $x=17$ задовольняє умову завдання і є шуканим натуральним розв'язком

Відповідь: 17.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Множини в музиці



Відоме в теорії музики квартово-квінтове коло — це **множина** тональностей, розташованих у певній послідовності. Зокрема, коло допомагає зрозуміти устрій музики різних стилів (року, джазу тощо).

Уперше квартово-квінтове коло було описане в книжці українського композитора Миколи Дилецького «Мусікійська граматика» (1679 р.).

Готуємося до ДПА

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

У Лілії на Facebook є 189 підписників. Із них 8 осіб підписалися менше ніж 3 роки тому, 11 — молодші від 14 років, 70 — захоплюються математикою, 140 — юнаки. Знайдіть найменшу можливу кількість підписників, для яких справджуються відразу чотири умови: це юнаки, старші за 14 років, які захоплюються математикою і підписалися не менше ніж 3 роки тому.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $10 \leqslant 5x \leqslant 30$;
2) $6 \leqslant 3x \leqslant 12$;
3) $-3 < x-7 < 21$;
4) $-5 \leqslant x+4 \leqslant 11$;
5) $-21 < 4x-5 \leqslant 31$;
6) $-19 \leqslant 1+2x < 5$;
7) $-8 \leqslant 7-\frac{3}{2}x < 10$;
8) $-19 < 9-\frac{4}{5}x \leqslant 13$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Зобразіть на числовій прямій задані числові проміжки та знайдіть їх об'єднання та переріз:

1) $(-\infty; 6)$ і $[-7; 7)$;
2) $(2; 10]$ і $[8; 11]$;
3) $(-\infty; -3)$ і $[-7; -5)$;
4) $(2; 11)$ і $[5; +\infty)$;
5) $(-\infty; -9)$ і $[-9; +\infty)$;
6) $(-14; 5)$ і $[6; +\infty)$.

2 Знайдіть переріз та об'єднання проміжків:

1) $(-11; 6]$ і $(-6; 7)$; укажіть найменше ціле число з перерізу проміжків, якщо воно існує;
2) $[2; 15)$ і $(-2; 8)$; укажіть найбільше натуральне число з об'єднання проміжків, якщо воно існує;
3) $[-4; +\infty)$ і $(-\infty; 9]$; укажіть найменше натуральне число з об'єднання проміжків, якщо воно існує;
4) $(-3; +\infty)$ і $(-\infty; 9]$; укажіть найменше ціле число з перерізу проміжків, якщо воно існує;
5) $(-\infty; 4)$ і $(-\infty; 19)$; укажіть найбільше натуральне число з об'єднання проміжків, якщо воно існує;
6) $[-11; +\infty)$ і $(3; +\infty)$; укажіть найбільше ціле число з перерізу проміжків, якщо воно існує.

3 Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $-4 \leqslant -x < 5$;
2) $\frac{1}{2} < 2t \leqslant 10$;
3) $-3 < \frac{2}{7}x - 1 \leqslant 1$;
4) $-0{,}8 \leqslant 5y + 0{,}2 < 6{,}85$;
5) $-4\sqrt{3} \leqslant \frac{2a}{3} < 6\sqrt{3}$;
6) $4-\sqrt{3} < \frac{5m+3}{4+\sqrt{3}} \leqslant 5\sqrt{3}$.

4 Розв'яжіть рівняння і запишіть переріз та об'єднання множин їх розв'язків:

1) $x^2-2x-3=0$; $2x^2-18=0$; 3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}=\frac{4x-4}{x^2+4}$; $x^2+4x=0$;

2) $\frac{x^2-4}{3}=0$; $2x^2-5x+2=0$; 4) $\frac{4x^3-8x}{x^2+1}=\frac{x}{1+x^2}$; $\frac{4x^2-9}{x+1,5}=0$.

5 Знайдіть області допустимих значень заданих виразів. Визначте об'єднання та переріз одержаних множин.

1) $\sqrt{-x+3}$; $\sqrt{5+5x}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{7}x-15}$; $\sqrt{242-2x}$;

2) $\sqrt{-\frac{1}{3}x+9}$; $\sqrt{x+11}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{2}x-3}$; $\sqrt{-7-14x}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{4x-1,2}}$; $\sqrt{10-2x}$; 6) $\frac{2x+1}{\sqrt{-4x-8}}$; $\frac{x^2-1}{\sqrt{2x+1}}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- **ОДЗ** виразу з однією змінною — усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.
- **Корінь рівняння** — таке значення змінної, яке перетворює рівняння у правильну числову рівність.
- **Розв'язок нерівності** з однією змінною — таке значення змінної, яке перетворює нерівність у правильну числову нерівність. Усі розв'язки нерівності утворюють множину розв'язків нерівності.

6 Знайдіть переріз та об'єднання множини коренів рівняння і множини розв'язків нерівності:

1) $-x^2+121=0$; $2x+22\leqslant 0$;

2) $-6x+1,8\leqslant 0$; $x^3-9x=0$;

3) $\frac{1}{3}(x-4)+2x>11$; $x^2-17x+72=0$;

4) $-2x^2+5x-2=0$; $\frac{x-3}{4}+2x\leqslant\frac{5-x}{3}$;

5) $2(x+1)-\frac{x-3}{5}\leqslant 1$; $x^2+21x-20=0$;

6) $\frac{1}{2}(3-x)-3(4-2x)>x-3$; $2x^2+7x-12=0$.

7 Розгляньте класифікацію рівнин і гір за висотами (рис. 11). Знайдіть відповідну інформацію, введіть позначення та запишіть за допомогою подвійних нерівностей висоти Причорноморської низовини, Подільської та Волинської височин, Карпат.

Нерівності в географії

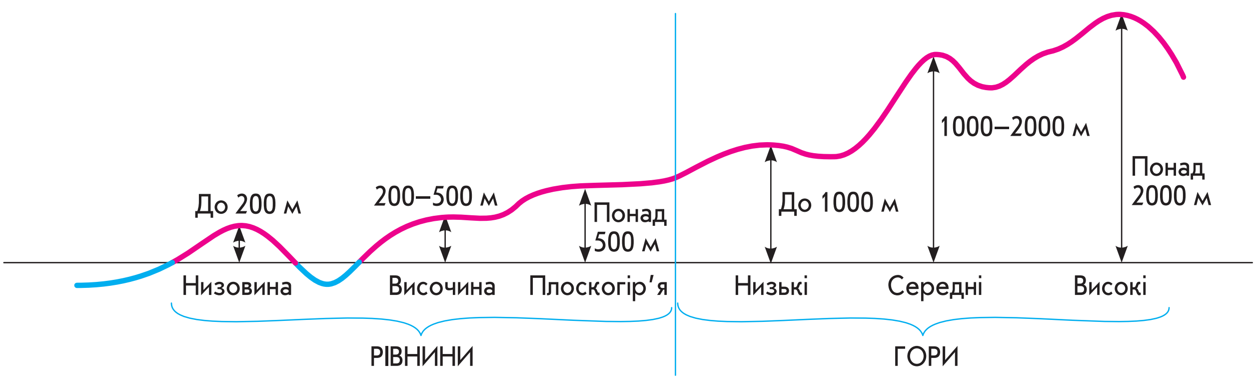


Рис. 11

Георг Кантор (нім. *Georg Cantor*; 1845–1918) — німецький математик, засновник теорії множин, яка спричинила загальний перегляд логічних основ математики і вплинула на всю її сучасну структуру.

Кантор увів поняття взаємно однозначної відповідності між елементами множин, дав означення нескінченної та цілком упорядкованої множин, довів, що дійсних чисел більше, ніж натуральних.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Перерізом проміжків $(-15;5)$ і $(10;15)$ є порожня множина.
2) Об'єднанням проміжків $(-1;1)$ і $(-2;5)$ є проміжок $(-2;5)$.
3) Якщо $3<-x<5$, то $-5<x<-3$.
4) Найбільше ціле число, яке належить проміжку $[-2;8)$, дорівнює 8.
5) На рис. 12 зображено графік лінійної функції $y=f(x)$. Якщо $0<f(x)<1$, то $-3<x<0$.

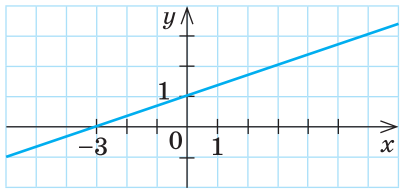


Рис. 12

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «РЯТУВАЛЬНА СТАНЦІЯ НА ВОДІ»

Між двома мостами A і B, розташованими на відстані 5 км один від одного, планують розмістити на воді рятувальну станцію C (рис. 13). На ділянці річки між мостами через 1 км розташовано буї (їх позначено точками).

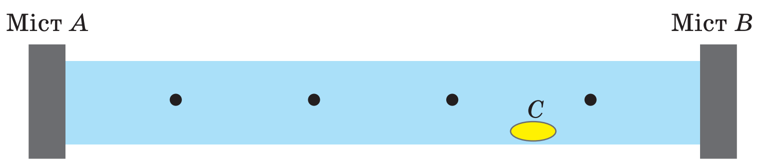


Рис. 13

1 Перенесіть рисунок у зошит.

2 Зафарбуйте ділянку можливого розташування рятувальної станції, якщо вона має перебувати на відстані:

1) не меншій ніж 2 км від моста A;
2) не меншій ніж 3 км від моста B;
3) не більшій ніж 4 км від моста A;
4) не меншій ніж 1 км від моста A і не більшій ніж 3 км від моста B;
5) не більшій ніж 3 км від моста A і не більшій ніж 3 км від моста B.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

У надзвичайних ситуаціях першими на місці лиха опиняються рятувальники. Вони здійснюють рятувальні роботи, допомагають постраждалим людям, надають першу медичну допомогу — виконують важку та відповідальну роботу.
Отримати професію рятувальника можна в Національному університеті цивільного захисту України: nuczu.edu.ua/ukr/

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Знайдіть переріз та об'єднання числових проміжків:

1) $[3;6]$ і $[4;7]$;   2) $(-3;9]$ і $(-\infty;5)$.

Зобразіть на числовій прямій множину чисел, які задовольняють кожну з нерівностей:

3) $x<3$ і $-1\leqslant x<5$;   4) $x\geqslant 2$ і $6<x\leqslant 15$.

Див. приклади 1 і 2

2 Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $18\leqslant 6x\leqslant 54$;   3) $-33<7+2x\leqslant 25$;

2) $-7<x-5<13$;   4) $-12\leqslant 6-\dfrac{3}{7}x<36$.

Див. приклади 3 і 4

3 Знайдіть області допустимих значень змінної заданих виразів. Визначте об'єднання та переріз одержаних множин.

1) $\sqrt{x-6}$; $\sqrt{-5-x}$;   4) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}x+25}$; $\sqrt{111-3x}$;

2) $\sqrt{-\dfrac{1}{6}x+1}$; $\sqrt{x-13}$;   5) $\sqrt{\dfrac{1}{5}x-7}$; $\sqrt{-11-44x}$;

3) $\dfrac{7}{\sqrt{-5x-1,5}}$; $\sqrt{16-0,8x}$;   6) $\dfrac{9x-5}{\sqrt{-x+14}}$; $\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{6x+18}}$.

Див. завдання 5 «Інтелектуального фітнесу»

Бонусне завдання

4 Запишіть усі натуральні значення:

1) змінної m, при яких перерізи проміжків $(-2;3,2]$ і $[m;9]$ є проміжком;

2) змінної k, при яких перерізи проміжків $[2;6,5)$ і $[k;k+7]$ є проміжком.

IQ

TO BE SMART

Радимо прочитати
книжку Н. Я. Віленкіна «Розповіді про множини».
Ви дізнаєтеся про теорію множин Георга Кантора, яка змінила математику. Ви навчитеся порівнювати нескінченні множини, зрозумієте, що нескінченності бувають різними, ознайомитеся з кривою ненульової площі, з фігурами, які не мають площ, тощо.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть спільні корені двох рівнянь, записаних за допомогою фігурної дужки.

1) $\begin{cases} x-4=6, \\ 3x=30; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+1=61, \\ x-8=2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2-25=0, \\ |x|-5=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x=20, \\ x+3=8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} (x+6)(x-2)=0, \\ |x|-6=0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+49=0, \\ |x|-7=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-4=23, \\ x-1=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x+2)(x-3)=0, \\ |x|-3=0; \end{cases}$

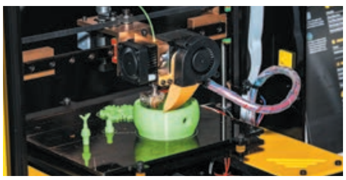
«У математиці мистецтво ставити запитання є ціннішим, ніж розв'язання задач.»

Георг Кантор

§ 7 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

ВЧОРА	Ви навчилися розв'язувати нерівності з однією змінною, шукати їх розв'язки та зображувати множини розв'язків на координатній прямій
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся знаходити спільні розв'язки кількох нерівностей, тобто розв'язувати системи лінійних нерівностей з однією змінною
ЗАВЖДИ	Ви зможете створювати математичні моделі прикладних задач у вигляді нерівностей та їх систем, розв'язувати задачі лінійного програмування

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



3D-друк стає дедалі популярнішим. За допомогою технологій 3D-друку вже друкують будинки, одяг, велосипеди, протези тощо. 3D-друк використовували під час роботи над фільмами «Хоббіт», «Залізна людина», «Парк Юрського періоду», «Аватар», «Термінатор: Порятунок», «Месники», «Скайфол» та інших.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Першу деталь 3D-принтер друкує за x хв, а на друк другої деталі витрачає на 5 хв менше. Цей принтер запрограмовано так, що друк перших 5 деталей триває не менше ніж 1,5 год, а друк наступних 7 деталей — не більше ніж 140 хв. Складіть систему нерівностей для визначення x.

Коментар до розв'язання

З умови випливає, що на друк другої деталі 3D-принтер витрачає $(x-5)$ хв. Тоді на друк перших п'яти деталей він витратить $5x$ хв, а на друк наступних семи — $7(x-5)$ хв. Одночасно мають виконуватися дві умови: $5x \geqslant 90$ та $7(x-5) \leqslant 140$. Отже, задача зводиться до знаходження значень змінної, які задовольняють кожну нерівність. У таких випадках говорять, що слід розв'язати систему лінійних нерівностей. Для запису використовують фігурну дужку, що поєднує дві нерівності: $\begin{cases} 5x \geqslant 90, \\ 7(x-5) \leqslant 140. \end{cases}$

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. **Розв'язком системи нерівностей з однією змінною** називають таке значення змінної, при якому кожна з нерівностей системи перетворюється у правильну числову нерівність.

СЛІД ЗНАТИ!

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Наприклад, число -2 є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} -2x+3>x, \\ 4x<11, \end{cases}$ оскільки перетворює її на систему правильних числових нерівностей $\begin{cases} 4+3>-2, \\ -8<11. \end{cases}$ А число 2,5 не є розв'язком системи, оскільки задовольняє другу нерівність, але не є розв'язком першої.

РОЗМИНКА 1

Визначте, чи є число x_0 розв'язком системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 3x-2\geqslant 0, \\ x<11, \end{cases}$ $x_0=-10$;

2) $\begin{cases} x-3\leqslant 2x+1, \\ -x>3, \end{cases}$ $x_0=0$;

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+6>-3, \\ x+11>-x+2, \end{cases}$ $x_0=3$;

4) $\begin{cases} -4x-11\leqslant \frac{1}{3}, \\ 0{,}7x-11\geqslant -4, \end{cases}$ $x_0=10$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- система лінійних нерівностей з однією змінною
- розв'язок системи лінійних нерівностей з однією змінною
- нерівності, що містять змінну під знаком модуля

Для того щоб знайти множину розв'язків системи нерівностей, необхідно знайти переріз множин розв'язків кожної з нерівностей, що входять у систему.

СЛІД ЗНАТИ!

1 Розглянемо систему нерівностей **одного знака** з однією змінною — систему вигляду $\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$ або $\begin{cases} x<a, \\ x<b. \end{cases}$

1) Множиною розв'язків системи будь-яких двох нерівностей одного знака «більше» буде та нерівність, права частина якої є більшим числом. Тобто якщо $\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$ і $a>b$, то $x>a$ — множина розв'язків системи (рис. 1). *Наприклад:* множиною розв'язків системи $\begin{cases} x>-1, \\ x\geqslant 3 \end{cases}$ є нерівність $x\geqslant 3$, тобто $x\in[3;+\infty)$.

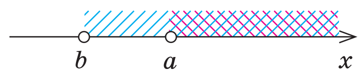


Рис. 1

2) Аналогічно множиною розв'язків системи будь-яких двох нерівностей одного знака «менше» буде та нерівність, права частина якої є меншим числом. Тобто якщо $\begin{cases} x<a, \\ x<b \end{cases}$ і $a<b$, то $x<a$ — множина розв'язків системи (рис. 2). *Наприклад:* множиною розв'язків системи $\begin{cases} x<-2, \\ x\leqslant 5 \end{cases}$ є нерівність $x<-2$, тобто $x\in(-\infty;-2)$.

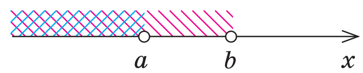


Рис. 2

2 Розглянемо кілька випадків розв'язування системи нерівностей **різних знаків** з однією змінною — систему вигляду $\begin{cases} x>a, \\ x<b. \end{cases}$

1) Якщо $a<b$, то множиною розв'язків системи є множина розв'язків подвійної нерівності $a<x<b$, тобто $x\in(a;b)$. *Наприклад:* множиною розв'язків системи $\begin{cases} x>-1, \\ x<3 \end{cases}$ є множина розв'язків подвійної нерівності $-1<x<3$, тобто $x\in(-1;3)$ (рис. 3).

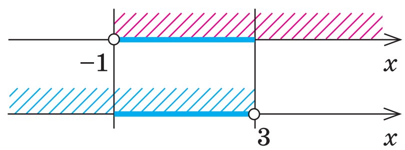


Рис. 3

2) Якщо $a>b$, то система не матиме розв'язків, оскільки перерізом множин розв'язків нерівностей $x>a$ і $x<b$ є порожня множина, тобто $\varnothing$. *Наприклад:* множиною розв'язків системи $\begin{cases} x>1, \\ x<-2 \end{cases}$ є переріз множин розв'язків нерівностей $x>1$ і $x<-2$, тобто порожня множина $\varnothing$ (рис. 4).

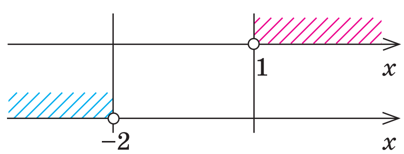


Рис. 4

3) Якщо $a = b$, то множина розв'язків системи нерівностей залежить від того, строгими чи нестрогими є нерівності.

Наприклад: система нерівностей $\begin{cases} x > 2, \\ x < 2 \end{cases}$ не має розв'язків, оскільки перерізом множин розв'язків нерівностей $x > 2$ і $x < 2$ є порожня множина, тобто $\varnothing$ (рис. 5).

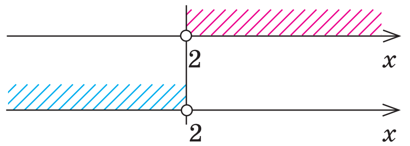


Рис. 5

А система нерівностей $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3 \end{cases}$ має єдиний розв'язок $x = -3$, який задовольняє обидві нерівності системи (рис. 6).

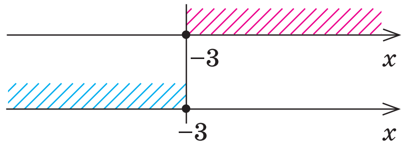


Рис. 6

Правила, які ми розглянули, справедливі для будь-якої кількості нерівностей системи.

Наприклад, для розв'язання системи $\begin{cases} x > 1, & (1) \\ x < 10, & (2) \\ x < 32, & (3) \\ x \geqslant 0, & (4) \\ x \geqslant 6 & (5) \end{cases}$ порівняємо між собою всі нерівності зі знаком «>» або «⩾», а потім окремо — усі нерівності зі знаком «<» або «⩽». Маємо:

- розв'язком системи нерівностей (1), (4) і (5) буде нерівність $x \geqslant 6$ (із більших вибираємо більше);
- розв'язком системи, яку утворюють нерівності (2) і (3), є нерівність $x < 10$ (із менших вибираємо менше).

Таким чином, задану систему п'яти нерівностей зводимо до системи двох нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < 10 \end{cases}$ (система п'яти нерівностей рівносильна системі двох нерівностей). Розв'яжемо отриману систему (рис. 7). Маємо: $x \in [6; 10)$.

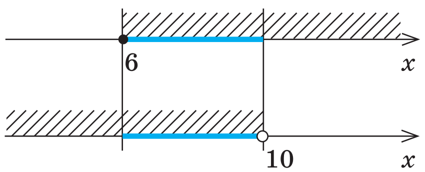


Рис. 7

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Фігурні дужки запропонував використовувати Франсуа Вієт у 1593 р.
- Фігурні дужки також застосовують для позначення множин.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Систему будь-якої скінченної кількості нерівностей із різними знаками завжди можна звести до системи двох нерівностей із різними знаками.

ПОМІРКУЙТЕ

При яких значеннях a система нерівностей не має розв'язків?

1) $\begin{cases} x < 5, \\ x > a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x > a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

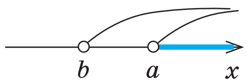
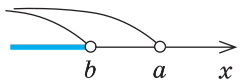
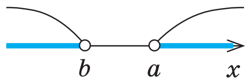
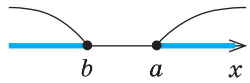
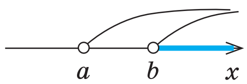
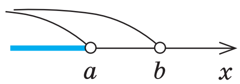
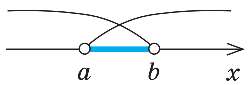
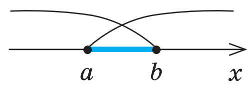
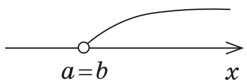
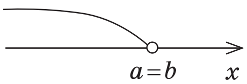
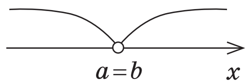
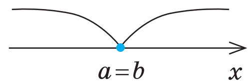
РОЗМИНКА 2

Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x > 3, \\ x \geqslant 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 11, \\ x > 2, \\ x \geqslant -4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant 4, \\ x < 24; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < -5, \\ x \leqslant 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < -3, \\ x \leqslant -2, \\ x > 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < -11, \\ x \leqslant -13, \\ x > -14. \end{cases}$

Розв'язання систем нерівностей узагальнимо в таблиці.

	$\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$	$\begin{cases} x<a, \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x>a, \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x\geqslant a, \\ x\leqslant b \end{cases}$
$a>b$	 $x>a$, тобто $x\in(a;+\infty)$, «більше більшого»	 $x<b$, тобто $x\in(-\infty;b)$, «менше меншого»	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$
$a<b$	 $x>b$, тобто $x\in(b;+\infty)$, «більше більшого»	 $x<a$, тобто $x\in(-\infty;a)$, «менше меншого»	 $a<x<b$, тобто $x\in(a;b)$	 $a\leqslant x\leqslant b$, тобто $x\in[a;b]$
$a=b$	 $x>a$	 $x<a$	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$	 єдиний розв'язок $\{a\}$

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 5x-15<2(4-x)-2, \\ \dfrac{3-5x}{2}\leqslant 2-\dfrac{8x-11}{6}. \end{cases}$

Розв'язання

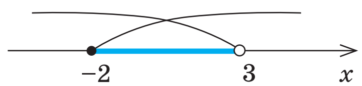
Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	У першій нерівності заданої системи розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Обидві частини другої нерівності помножимо на 6.	$\begin{cases} 5x-15<8-2x-2, \\ 3(3-5x)\leqslant 12-8x+11; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x<21, \\ -15x+8x\leqslant 23-9 \end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо кожну з нерівностей отриманої системи.	$\begin{cases} x<3, \\ -7x\leqslant 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x\geqslant -2 \end{cases}$
КРОК 3	Зобразимо на числовій прямій множини розв'язків кожної нерівності та знайдемо переріз отриманих проміжків.	 $x\in[-2;3)$

Відповідь: $x\in[-2;3)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Переріз множин можна знайти, якщо зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній числовій прямій різними **штриховками** (рис. *а*) або різними **дужками** (рис. *б*).

а



б

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x \leqslant 9, \\ x > 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x \geqslant -18, \\ 3 - x < 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x < 30, \\ 5 - x \geqslant 9; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < \frac{11}{6}, \\ 7(x-1) \geqslant 14; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \leqslant \frac{7}{12}, \\ 6(x+13) > 18; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7x - 10 \leqslant 3(x-1) + 21, \\ \frac{3x-5}{5} > \frac{x-1}{2} - 1; \end{cases}$

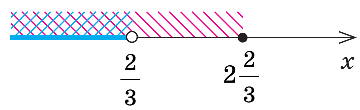
8) $\begin{cases} 9x + 8 > 4(x-2) - 14, \\ \frac{x+9}{4} \leqslant 3 - \frac{3-x}{6}. \end{cases}$

Подвійні нерівності є іншою формою запису систем нерівностей, тому їх також можна розв'язувати за допомогою систем нерівностей.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть нерівність $2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 3 < 4 - x$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо подвійну нерівність $2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 3 < 4 - x$ на рівносильну систему двох нерівностей.	$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 < 4 - x, \\ \frac{1}{2}x + 3 \geqslant 2x - 1 \end{cases}$
КРОК 2	Помножимо обидві частини кожної нерівності системи на 2 і розв'яжемо кожну з нерівностей отриманої системи.	$\begin{cases} x + 6 < 8 - 2x, \\ x + 6 \geqslant 4x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x < 2, \\ -3x \geqslant -8; \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ x \leqslant 2\frac{2}{3} \end{cases}$
КРОК 3	Зобразимо на числовій прямій множини розв'язків отриманих нерівностей і знайдемо переріз проміжків.	 $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язуючи кілька нерівностей одного знака, можна не виконувати рисунок, а використовувати правило «вибору меншого» або «вибору більшого» (с. 71, 81).

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть нерівність:

1) $-4<x\leqslant 6-x$;

2) $2-x\leqslant x<9$;

3) $-15<x-4\leqslant 11-2x$;

4) $17-3x\leqslant x+5<21$;

5) $-6<\dfrac{x-3}{3}<7-x$;

6) $-4<\dfrac{x+2}{5}<10-x$;

7) $2x-5\leqslant\dfrac{x}{3}+1\leqslant 3-x$;

8) $x-2\leqslant\dfrac{x}{4}-1\leqslant 5+2x$.

Серед усіх нерівностей окреме місце займають нерівності, що містять змінну під **знаком модуля**.

Нехай a — додатне число. Тоді нерівності виду $|x|<a$ і $|x|>a$ можна розглядати, виходячи з геометричного змісту модуля.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Знайоме нам позначення абсолютної величини було введено в 1841 р. німецьким математиком Карлом Вейєрштрассом.
- Нідерландський учений Гендрік Лоренц використовував символ модуля для позначення довжини вектора ще в 1903 р.

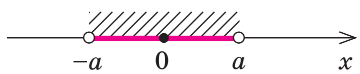
Схема 1

$|x|<a,\ a>0$

↓

Відстань від початку відліку до точки з координатою x менша від a

↓



$-a<x<a$

↓

Нерівність задовольняють усі значення $x\in(-a;a)$

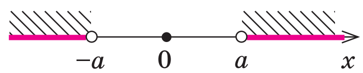
Схема 2

$|x|>a,\ a>0$

↓

Відстань від початку відліку до точки з координатою x більша за a

↓



$x<-a$ або $x>a$

↓

Нерівність задовольняють усі значення $x\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty)$

Наприклад:

1) $|x|<5,\ -5<x<5$;

2) $|x|\leqslant -5,\ \varnothing$;

3) $|x|>-3,\ x\in(-\infty;+\infty)$;

4) $|x|\geqslant 3,\ x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть нерівність, що містить змінну під знаком модуля:

1) $|x|<4$; 2) $|y|\geqslant 6$; 3) $\left|2x+\dfrac{1}{2}\right|<5$; 4) $|5-2x|\geqslant 3$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Скористаємося схемою *1* розв'язування нерівності $|x|<a,\ a>0$: $-a<x<a$.	$|x|<4$; $-4<x<4$; $x\in(-4;4)$

Крок	Зміст дії	Результат дії
2) КРОК 1	Скористаємося схемою *2* розв'язування нерівності $\|x\|>a$, $a>0$: $x<-a$ або $x>a$.	$\|y\|\geqslant 6$; $y\leqslant -6$ або $y\geqslant 6$; $y\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$
3) КРОК 1	Скориставшись схемою *1*, розкриємо модуль і розв'яжемо отриману подвійну нерівність.	$\left\|2x+\frac{1}{2}\right\|<5$; $-5<2x+\frac{1}{2}<5$; $-5{,}5<2x<4{,}5$; $-2{,}75<x<2{,}25$; $x\in(-2{,}75;2{,}25)$
4) КРОК 1	Перетворимо ліву частину даної нерівності, застосувавши формулу $\|a-b\|=\|b-a\|$, та скористаємося схемою *2*.	$\|5-2x\|\geqslant 3$; $\|2x-5\|\geqslant 3$; $2x-5\leqslant -3$ або $2x-5\geqslant 3$; $2x\leqslant 2$ $2x\geqslant 8$; $x\leqslant 1$ $x\geqslant 4$; $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

Відповідь: 1) $x\in(-4;4)$; 2) $y\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$; 3) $x\in(-2{,}75;2{,}25)$; 4) $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Вважають, що термін «модуль» запропонував англійський математик і філософ, учень Ньютона Роджер Котс.
- Ґотфрід Лейбніц теж використовував цю функцію, яку називав «модулем» і позначав $\mathrm{mol}\,x$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть нерівність, що містить змінну під знаком модуля:

1) $|x|\leqslant 1$;
2) $|y|\geqslant 9$;
3) $2|x|<24$;
4) $4|y|>20$;
5) $|x-1|-8\leqslant 0$;
6) $|y-4|-13\geqslant 0$;
7) $|2x-3|-17<0$;
8) $\left|\frac{y}{2}+1\right|-9\geqslant 0$.

Узагальнимо в таблиці розв'язання нерівностей виду

$$|x|<a,\ |x|\leqslant a,\ |x|>a \text{ і } |x|\geqslant a.$$

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\|x\|<a$	$-a<x<a$; $x\in(-a;a)$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\|x\|\leqslant a$	$-a\leqslant x\leqslant a$; $x\in[-a;a]$	$x=0$	$\varnothing$
$\|x\|>a$	$x<-a$ або $x>a$; $x\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty)$	$x<0$ або $x>0$; $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ (усі значення, крім нуля)	$x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in\boldsymbol{R}$
$\|x\|\geqslant a$	$x\leqslant -a$ або $x\geqslant a$; $x\in(-\infty;-a]\cup[a;+\infty)$	$x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in\boldsymbol{R}$	$x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in\boldsymbol{R}$

У 7 і 8 класах ви розв'язували текстові задачі, математичною моделлю яких була система рівнянь. Але є й такі задачі, які зводяться до систем нерівностей.

ПРИКЛАД 4

Коли на фермі 360 л молока розлили в бідони по 20 л, то один із бідонів залишився неповним. Якщо те саме молоко перелити в бідони місткістю 30 л, взявши на 8 бідонів менше, то їх не вистачить, щоб розлити все молоко. Складіть математичну модель задачі у вигляді системи двох лінійних нерівностей та знайдіть наявну кількість 20-літрових бідонів.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо позначення для кількості 20-літрових бідонів.	Нехай x — кількість 20-літрових бідонів, x — натуральне число
КРОК 2	Проаналізуємо умову «один із бідонів залишився неповним».	Якщо один із бідонів неповний, то в усі бідони могло поміститися більше молока, ніж розлито, тобто $20x > 360$
КРОК 3	Визначимо кількість 30-літрових бідонів.	Оскільки 30-літрових бідонів знадобиться на 8 менше, то їх кількість становить $x-8$
КРОК 4	Проаналізуємо умову «360 л молока в $(x-8)$ бідонів не поміститься».	Значення виразу $30(x-8)$ менше від 360 л, $30(x-8) < 360$
КРОК 5	Складемо систему лінійних нерівностей і розв'яжемо її відносно змінної x.	$\begin{cases} 30(x-8) < 360, \\ 20x > 360; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 20, \\ x > 18 \end{cases}$
КРОК 6	Розв'яжемо задачу, враховуючи, що шуканий розв'язок x має бути натуральним числом.	$x = 19$ — єдине натуральне значення x, яке задовольняє систему нерівностей, тобто є її розв'язком

Відповідь: 19 двадцятилітрових бідонів.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У молоці міститься близько 80 мінеральних елементів, необхідних для нормального росту й розвитку організму.
- Всесвітня асоціація охорони здоров'я рекомендує вживати 330 кг молочних продуктів (у перерахунку на молоко) на рік.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

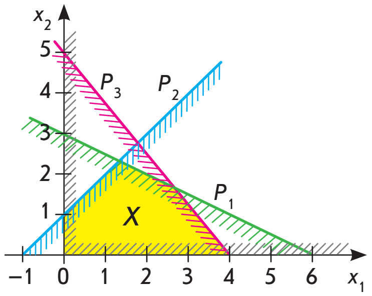
1) На виконання першої операції робот витрачає x хв, а на виконання другої — на 20 хв більше. Робот запрограмований так, що виконання першої операції триває не більше ніж 45 хв, а другої — не менше ніж 32 хв.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення x.
   б) Знайдіть x.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Слово «ро́бот» уперше зустрічається в науково-фантастичній п'єсі «Россумські універсальні роботи» чеського письменника Карела Чапека (1920 р.).

Відомо, що це слово першим вигадав його старший брат, художник і письменник Йозеф Чапек.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Лінійне програмування застосовують в економіці, медицині, транспорті, енергетиці, геології, сільському господарстві, військовій справі, соціальних науках, теорії управління тощо.

Задачі лінійного програмування розв'язують за допомогою **систем лінійних нерівностей** і рівнянь із багатьма невідомими. Методи розв'язування: графічний, симплекс-метод, метод Гаусса — Жордана, метод Штіфеля та ін.

2) Позашляховик за 6 год долає по гірській дорозі більше ніж 180 км, а по шосе за 4 год — не більше ніж 440 км.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення швидкості v (у км/год) позашляховика протягом поїздки.
   б) У яких межах змінюється ця швидкість?
3) У супермаркеті перший покупець за один пакет молока вартістю 15 грн і 5 однакових пакетів соку заплатив не більше ніж 90 грн. Другий покупець за один пакет кефіру вартістю 20 грн і 3 таких самих пакети соку заплатив не менше ніж 44 грн.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення вартості одного пакету соку, позначивши її через x (у грн).
   б) Знайдіть x.
4) Довжина основи рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а його периметр менший від 90 см. Якою може бути довжина (у см) бічної сторони цього трикутника? Відповідь запишіть у вигляді проміжку.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -2x+1\leqslant\dfrac{x-2}{4}, \\ \dfrac{x+5}{3}\geqslant x-2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{4-3x}{5}-2\leqslant\dfrac{x}{10}+x, \\ 4x-1\geqslant 76-3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4(x+4)\leqslant x, \\ \dfrac{3x+7}{2}-x\leqslant 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{5-3x}{3}+\dfrac{1}{6}\leqslant\dfrac{4-7x}{2}, \\ 9x+11\leqslant -x+111; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -12x+6<x+19, \\ \dfrac{x-2}{3}-2x\leqslant\dfrac{x+1}{2}+1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -x+9\leqslant -4x-81, \\ \dfrac{2-4x}{5}+6<\dfrac{9-2x}{3}. \end{cases}$

Готуємося до ЗНО

2 Розв'яжіть систему нерівностей і запишіть відповідь згідно із заданою умовою.

1) $\begin{cases} 3(a-4)\geqslant 2(a+1)-4, \\ -2a+6\leqslant 4(a-1); \end{cases}$ найменший натуральний розв'язок;

2) $\begin{cases} -3(b+11)-2b<\dfrac{b}{2}, \\ \dfrac{b+2}{3}\geqslant 4; \end{cases}$ найменший цілий розв'язок;

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}\leqslant\dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x}{3}>\dfrac{4+x}{7}; \end{cases}$ добуток найменшого і найбільшого цілих розв'язків;

4) $\begin{cases} \dfrac{m-2}{3} > -\dfrac{3-m}{2}, \\ -2(m+3)-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{m}{5}+6; \end{cases}$ найбільший натуральний розв'язок;

5) $\begin{cases} -2 \leqslant 3x-1 < 20, \\ \dfrac{2x-3}{6}+1 < x-\dfrac{5-x}{3}; \end{cases}$ сума цілих розв'язків;

6) $\begin{cases} 1-5x+\dfrac{x-1}{3} \leqslant \dfrac{x}{9}-4, \\ -3 < 4-5x \leqslant 21; \end{cases}$ кількість натуральних розв'язків.

3 Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3} < 1, \\ (x+6)(1-x) \leqslant 4-x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5}{3}x-2 > -2\dfrac{1}{3}x, \\ 2(x-3)(x+3) \leqslant (2x+5)(x-1); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{5x+11}{2} < -3, \\ (4-x)^2+2x+1 \geqslant (x-2)(x+4); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2-\dfrac{3y}{7} < 4\left(\dfrac{y}{7}+1\right), \\ (2y-5)(2y+5) \geqslant 4(y-1)(y+3); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0{,}2x-4 < 0{,}8x+0{,}2, \\ (x-3)(x+2)+2x \leqslant (x-3)^2+6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2{,}6t-2(t-1) \leqslant -0{,}4t+10, \\ (4-t)(4+t)-t^2 > -2(t-3)(t+1). \end{cases}$

4 Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 5x-12 < 6(2-x)-10, \\ \dfrac{5x-2}{3}+x \geqslant 10x+1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{4-x}{3}+x \geqslant 2+\dfrac{x}{6}, \\ x-4(x-5) > 2(x-1)+8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5t+1{,}1 \leqslant 0{,}2(t-3)+2, \\ -4t(t-2) > 4(1-t)(t+1); \end{cases}$

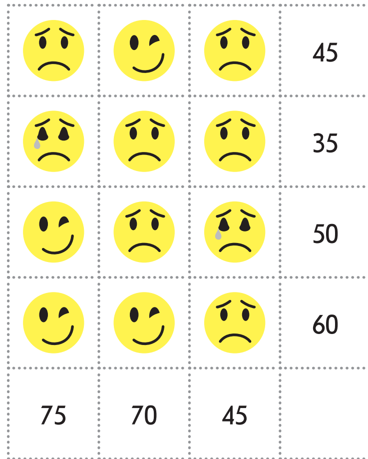
4) $\begin{cases} -2x+x(x-5) > (x-7)(x+7), \\ \dfrac{11-4x}{5} \leqslant \dfrac{x+2}{2}-x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{1+8y}{3} > \dfrac{9+4y}{2}-\dfrac{y-1}{3}, \\ (y^2+3)(y-9) < y(y-4)(4+y)-9y^2+163; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{m}{5}-1{,}5 \leqslant \dfrac{3(m-1)}{2}-2{,}3m, \\ 2m+7(m-1) > \dfrac{m+4}{3}-10. \end{cases}$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Що дорожче — посмішка, сльози або журба? На скільки?



Готуємося до ДПА

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У різних математичних текстах фігурними дужками позначають:

- операцію взяття дробової частини числа;
- пріоритет операцій — як третій рівень вкладеності після круглих і квадратних дужок.

5 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}$; 3) $\sqrt{2a+6}-\sqrt{\frac{3-5a}{4}}$; 5) $\sqrt{\frac{2-3y}{5}+y}+\sqrt{y-2}$;

2) $\sqrt{t-5}-2\sqrt{10-t}$; 4) $\sqrt{-y+4}+\sqrt{-2+y}$; 6) $\sqrt{5-y}+\sqrt{y-6}$.

6 Розв'яжіть нерівність, що містить змінну під знаком модуля:

1) $|x-4|-18<0$; 3) $|5x+3|-11>0$; 5) $\left|\frac{x}{6}+5\right|-1\leqslant 0$;

2) $15-|6-m|\geqslant 0$; 4) $|7-4n|-15\geqslant 0$; 6) $7\cdot\left|\frac{k}{3}-4\right|-14>0$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

1 Розв'яжіть подвійну нерівність $-6\leqslant 2x\leqslant 10$.

А	Б	В	Г
$[-4;12]$	$[-8;8]$	$[-3;5]$	$[-12;20]$

2 Розв'яжіть подвійну нерівність $-12\leqslant x-4\leqslant 20$.

А	Б	В	Г
$[-16;16]$	$[-8;24]$	$[-3;5]$	$[-5;3]$

3 Знайдіть об'єднання проміжків $(1;4)$ і $(3;9)$.

А	Б	В	Г
$(1;9)$	$(3;4)$	$(4;9)$	$(1;3)$

4 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}-x>3,\\ x>4.\end{cases}$

А	Б	В	Г
$(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$	$(-3;4)$	$(4;+\infty)$	$\varnothing$

5 До участі в конкурсі на кращий соціальний плакат «Моє бачення Європи» запрошують молодь. За умовами конкурсу вік учасників x становить від 15 до 35 років. Укажіть систему нерівностей для визначення x.

А	Б	В	Г
$\begin{cases}x\geqslant 15,\\ x\leqslant 35\end{cases}$	$\begin{cases}x\leqslant 15,\\ x\geqslant 35\end{cases}$	$\begin{cases}x\leqslant 15,\\ x\leqslant 35\end{cases}$	$\begin{cases}x\geqslant 15,\\ x\geqslant 35\end{cases}$

6 Установіть відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Г).

1	$\|x\|<3$	А	$\varnothing$
2	$\|x\|>3$	Б	$(-3;3)$
3	$\|x\|>-3$	В	$(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$
		Г	$(-\infty;+\infty)$

7 Розв'яжіть нерівність $19-4x\leqslant x+4<11$.

8 Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases}\frac{x}{6}-\frac{x}{5}<\frac{7}{30},\\ 7(x+3)\geqslant 28.\end{cases}$$

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x<5, \\ x\geqslant 6 \end{cases}$ є проміжок $(5;6]$.

2) Якщо M — множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x\leqslant 7, \\ x\geqslant 7, \end{cases}$ то $M=\{7\}$.

3) Множиною розв'язків нерівності $|x|+1\leqslant 0$ є порожня множина.

4) Якщо $|x|>2$, то $x>2$.

5) Якщо $|x|<3$, то $x>-3$.

Леонід Віталійович Канторович (1912–1986) — видатний математик і економіст, один із засновників лінійного програмування, лауреат Нобелівської премії з економіки 1975 р. за внесок у теорію оптимального розподілу ресурсів.
Л. Канторович у 14 років вступив до університету, у 22 роки став професором університету, у 23 — доктором фізико-математичних наук, у 26 — керівником наукової школи.
Найулюбленіші задачі Л. Канторовича — транспортна задача та задача про оптимальний розкрій.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ФЕЄРВЕРК»

Різні кольори зірок феєрверку зумовлені тим, що начинкою ракет є різні піротехнічні суміші, які під час згоряння випромінюють світло з різною довжиною хвилі λ. Докладно з електромагнітними хвилями, у тому числі й світловими, ви познайомитеся на уроках фізики. Довжини хвиль видимого світла (у нанометрах) наведено в таблиці.

Колір	Довжина хвилі λ, нм	Колір	Довжина хвилі λ, нм
Фіолетовий	$380<\lambda<440$	Жовтий	$565<\lambda<590$
Синій	$440<\lambda<485$	Оранжевий	$590<\lambda<625$
Блакитний	$485<\lambda<500$		
Зелений	$500<\lambda<565$	Червоний	$625<\lambda<740$

Визначте, яким буде колір феєрверку, за такими даними.

1 Піротехнічна суміш містить сполуку натрію. Під час її згоряння випромінюється світло, довжина хвилі якого задовольняє нерівність $|\lambda-578|<11$.

2 Піротехнічна суміш містить сполуку стронцію. Під час її згоряння випромінюється світло, довжина хвилі якого задовольняє нерівність $|\lambda-673|<25$.

3 Піротехнічна суміш містить сполуку міді. Під час її згоряння випромінюється світло, довжина хвилі якого задовольняє нерівність $|\lambda-525|<39$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Найбільший у світі феєрверк був запущений у 1988 р. під час одного з японських фестивалів. Важив феєрверк понад 500 кг, а його «вогняна квітка» мала діаметр понад кілометр.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x > -1, \\ x < 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x \geqslant -16, \\ 8 - x < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{5} \geqslant -\dfrac{9}{20}, \\ 3(x-8) \leqslant 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 13x + 5 \leqslant 10(x+4) - 2, \\ \dfrac{5x+1}{3} > 2 + \dfrac{9x-8}{6}. \end{cases}$

Див. приклад 2

2 Розв'яжіть нерівність:

1) $-7 \leqslant x < 4 - x;$

2) $-14 < x + 3 \leqslant 23 - 4x;$

3) $7 - x < \dfrac{x-4}{2} < 9;$

4) $x - 6 \leqslant \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 3 + 2x.$

Див. приклад 3

3 Розв'яжіть нерівність, що містить змінну під знаком модуля:

1) $|x| \leqslant 5;$

2) $|y| > 3;$

3) $4|x| < 32;$

4) $3|y| \geqslant 18;$

5) $|x-4| - 9 \leqslant 0;$

6) $|y+1| - 12 > 0;$

7) $\left|\dfrac{x}{2} + 3\right| - 5 < 0;$

8) $|4y - 1| - 23 \geqslant 0.$

Див. приклад 4

4 Розв'яжіть задачу.

1) Перший маршрут безпілотний автомобіль долає за x хв, а на другий маршрут витрачає на 15 хв більше. Цей автомобіль запрограмовано так, що час на подолання першого маршруту становить не більше ніж 50 хв, а другого маршруту — не менше ніж 24 хв.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення x.
   б) Знайдіть x.

2) Мотоцикл ґрунтовою дорогою за 2 год долає більше ніж 120 км, а автострадою за 3 год — не більше ніж 390 км.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення швидкості v (у км/год) мотоцикла протягом поїздки.
   б) У яких межах змінюється швидкість мотоцикла?

3) У магазині спортивних товарів перший покупець за один баскетбольний м'яч вартістю 80 грн і 6 однакових тенісних м'ячів заплатив не більше ніж 200 грн. Другий покупець за один волейбольний м'яч вартістю 100 грн і 10 таких самих тенісних м'ячів заплатив не менше ніж 200 грн.
   а) Складіть систему нерівностей для визначення вартості одного тенісного м'яча, позначивши її через x (у грн).
   б) Знайдіть x.

4) Довжина бічної сторони рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а його периметр більший за 40 см. Яку довжину (у см) може мати основа цього трикутника? Відповідь запишіть у вигляді проміжку.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

У Харківському національному автодорожньому університеті було створено прототип автомобіля, який може проїхати 575 км на 1 л пального. Його маса близько 40 кг, швидкість — до 60 км/год. Це найбільш енергоефективний автомобіль країни, його внесено до Книги рекордів України як автомобіль з мінімальними витратами пального (менше ніж 2 г на 1 км).

Дізнайтеся більше: www.khadi.kharkov.ua/ru/home.html

Бонусні завдання

5 При яких значеннях a система нерівностей має хоча б один розв'язок?

1) $\begin{cases} x < 7, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x > a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

6 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} \geqslant \dfrac{x}{5}, \\ -2 \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |12+3x| \leqslant 24, \\ |7+2x| \leqslant 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{4x}{7} \geqslant \dfrac{3x}{8}, \\ -5 \leqslant x \leqslant -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |20-5x| \leqslant 60, \\ |20-5x| > 80. \end{cases}$

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 На рис. 8 зображено графік функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[-3; 8]$.
Знайдіть:

1) $f(-2)$; 5) нулі функції (значення x, при яких $f(x) = 0$);

2) $f(1)$; 6) значення x, при яких $f(x) = 2$;

3) $f(4)$; 7) множину розв'язків нерівності $f(x) \leqslant 0$;

4) $f(8)$; 8) множину розв'язків нерівності $f(x) \geqslant 0$.

2 Знайдіть значення аргумента, при яких задана функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

1) $y = 0{,}5x + \dfrac{1}{3}$; 4) $y = \dfrac{1}{7}x - 7$;

2) $y = -2x - 11$; 5) $y = 12{,}5 - 0{,}5x$;

3) $y = 2x + 11$; 6) $y = 2\dfrac{1}{3} + 4x$.

> *«Для моєї діяльності характерним є постійне взаємопроникнення теорії та практики, щодо практики, вона нерідко далеко виходить за межі математики.»*
>
> Леонід Канторович

ПРИГАДАЙТЕ!

- Розв'язування систем нерівностей різних знаків — с. 79–80.
- Розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля — с. 83.

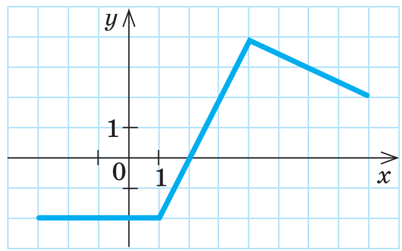


Рис. 8

TO BE SMART

Нобелівської премії з математики не існує. Ідея запровадити математичну премію належить канадському математику Джону Філдсу (англ. *John Fields*, 1863–1932).

Медаль Філдса (*Fields Medal*) — найвища нагорода в галузі математики, яку кожні 4 роки присуджують математикам віком до 40 років за значний внесок у науку. У 2018 р. відбудеться наступне нагородження лауреатів цієї премії.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

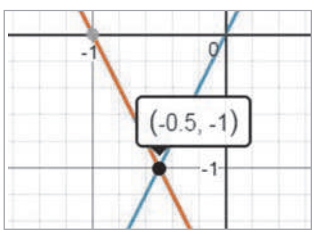
Онлайн-калькулятор Desmos: www.desmos.com/calculator

Інтерактивні інструменти онлайн-калькулятора

- Повзунок — дозволяє змінювати значення в ручному або автоматичному режимі

- Масштабування — дозволяє зменшувати або збільшувати зображення

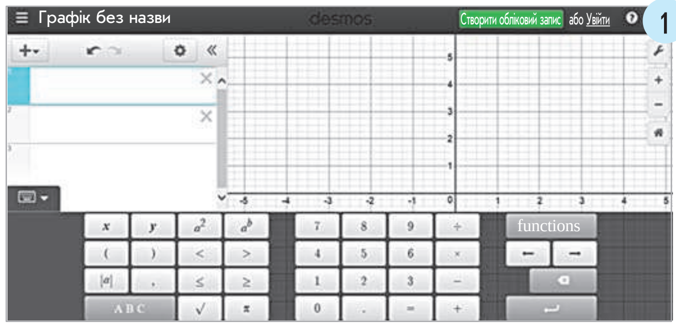
- Вибір точки — дозволяє дізнатися координати будь-якої точки графіка



В ОДИН КЛІК

Пропонуємо скористатись онлайн-калькулятором Desmos. Цей сервіс дозволяє складати таблиці значень, будувати графіки функцій, зображувати множини розв'язків нерівностей та систем нерівностей; створювати анімовані картинки, динамічну наочність та багато іншого.

Після запуску онлайн-калькулятора Desmos на екрані з'явиться панель (рис. 1), у лівій частині якої розташоване поле для введення даних (множин точок, рівнянь, нерівностей тощо). Права частина — область побудов.



1

Вводити символи (значення) можна з клавіатури комп'ютера або із вбудованої клавіатури, яку можна вивести на екран, клацнувши відповідну позначку. Зміна режиму введення «числа» — «літери» відбувається натисканням клавіш «ABC» і «123» на екранній клавіатурі.

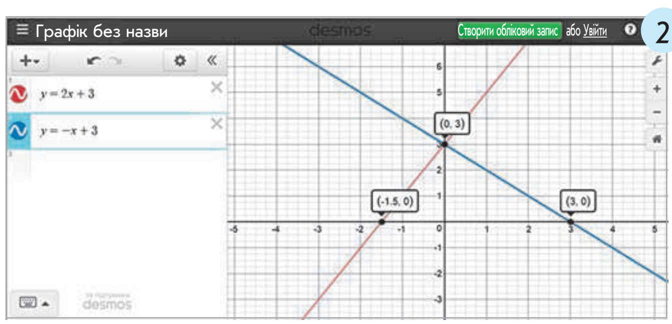
ПРИКЛАД 1

Побудуйте графіки функцій $y = 2x + 3$ і $y = -x + 3$.

Алгоритм побудови

1. Запустіть сервіс Desmos.
2. Введіть у поле для введення даних рівняння лінійної функції $y = 2x + 3$. Перегляньте результат (в області побудов має з'явитися графік — пряма лінія).
3. Натисніть кнопку **Додати** та введіть нове рівняння $y = -x + 3$. Перегляньте результат.

Отримали дві прямі, що перетинаються (рис. 2).



2

Щоб додати колір об'єктам або частинам площини, використовують нерівності. Якщо нерівність строга (знаки «<» і «>»), межа кольорової області буде пунктирною лінією. Якщо нерівність нестрога (знаки «⩽» і «⩾») — суцільною лінією. Залежно від знака нерівності заданим кольором зафарбовується відповідна частина площини (над або під межею).

ПРИКЛАД 2

Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} y \leqslant 2x+5, \\ y \leqslant -x+3. \end{cases}$

Алгоритм побудови

1. Скористайтесь алгоритмом побудови графіків, наведеним у прикладі 1.
2. У записах рівнянь замініть знаки рівності на задані знаки нерівності. Отримаєте нерівності $y \leqslant 2x+3$ і $y \leqslant -x+3$.
3. Перегляньте результат (рис. 3).

Ви вже знаєте, що множину розв'язків нерівності можна зобразити у вигляді півплощини, кожна точка (абсциса або ордината) якої відповідає певному розв'язку. Ви отримали дві півплощини, які є зображеннями множин розв'язків заданих нерівностей. Переріз цих півплощин є множиною розв'язків відповідної системи нерівностей.

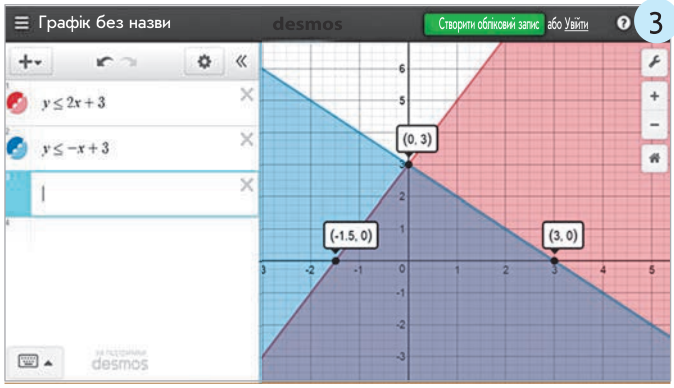
Якщо ви знаєте властивості лінійної функції, умієте будувати графіки, опанували тему «Нерівності», то зможете проявити свої творчі здібності, створюючи різноманітні зображення та анімації.

ТРЕНУЄМОСЯ

1. «Намалюйте» клаптеву ковдру, користуючись підказками (рис. 4).
2. «Побудуйте» будинок і розфарбуйте його різними кольорами за допомогою нерівностей (рис. 5).
3. Створіть рисунок на свій розсуд і надішліть його друзям.

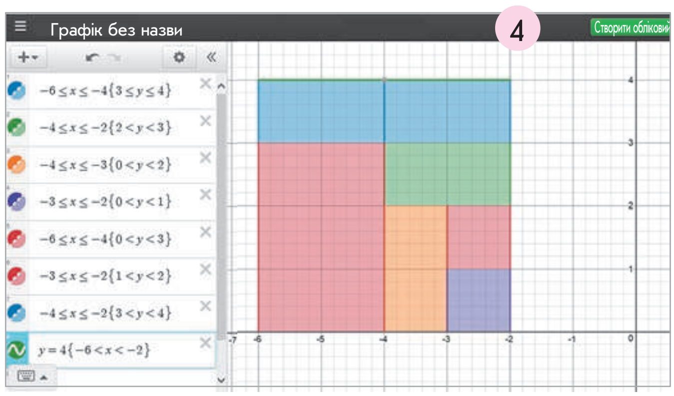
ПРИГАДАЙТЕ!

Системи нерівностей різних знаків можна записувати за допомогою подвійних нерівностей.

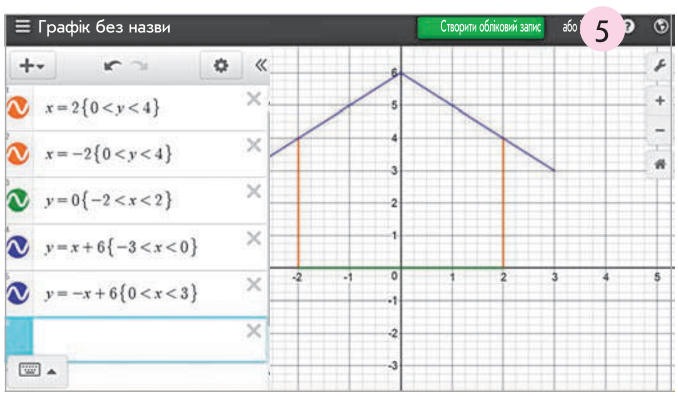


3

До завдань рубрики «Тренуємося»



4



5

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 5–7

1 Ви навчилися розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною за допомогою рівносильних перетворень.

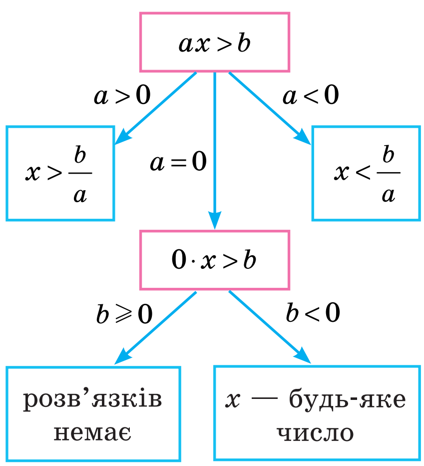
Нерівності виду $ax<b$ або $ax>b$ $(ax\leqslant b$ або $ax\geqslant b)$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійними нерівностями з однією змінною.**

Рівносильними називають нерівності, у яких множини розв'язків збігаються. Нерівності, що не мають розв'язків, також прийнято вважати рівносильними.

Рівносильні перетворення нерівностей

1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок, змінивши його знак на протилежний, отримаємо нерівність, рівносильну даній.
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **додатне** число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме **від'ємне** число, **змінивши** при цьому **знак** нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Схема розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною



Алгоритм розв'язування нерівностей, що зводяться до лінійних нерівностей з однією змінною

1. Розкрити дужки (якщо вони є), перенести доданки, що містять змінну, у ліву частину нерівності, а доданки, які не містять змінної, — у праву, звести подібні доданки.
2. Поділити обидві частини нерівності на коефіцієнт при змінній:
   - якщо коефіцієнт — **додатне** число, то знак нерівності **не змінюється;**
   - якщо коефіцієнт — **від'ємне** число, то **змінити знак** нерівності на протилежний.
3. Зобразити множину розв'язків нерівності на числовій прямій та записати множину розв'язків нерівності за допомогою числового проміжку.

2 Ви дізналися, що таке об'єднання та переріз множин, числових проміжків.

Перерізом множин *A* і *B* називають множину їх спільних елементів.

Записують: $A\cap B$.

Переріз кількох числових проміжків — множина всіх чисел, що належать кожному з цих проміжків.

Об'єднанням множин *A* і *B* називають множину всіх елементів, які належать **хоча б одній** із множин A і B. Записують: $A\cup B$.

Об'єднання кількох числових проміжків — множина всіх чисел, що належать хоча б одному з цих проміжків.

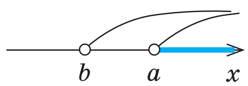
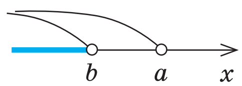
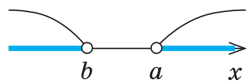
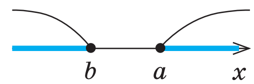
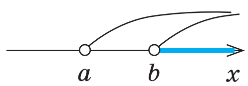
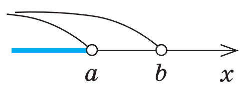
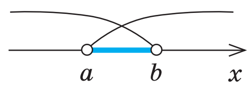
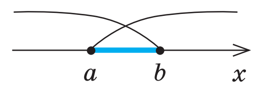
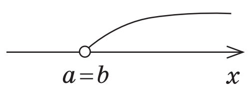
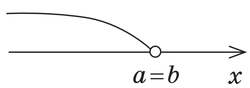
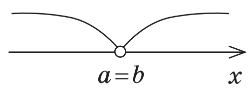
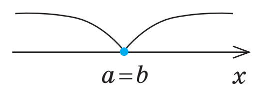
Можливі випадки знаходження перерізів та об'єднань числових проміжків — с. 70–71.

3 Ви навчилися розв'язувати системи лінійних нерівностей з однією змінною, нерівності з модулем.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають таке значення змінної, при якому кожна з нерівностей системи перетворюється у правильну числову нерівність.

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Розв'язування систем нерівностей

	$\begin{cases} x>a, \\ x>b \end{cases}$	$\begin{cases} x<a, \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x>a, \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x\geqslant a, \\ x\leqslant b \end{cases}$
$a>b$	 $x>a$, тобто $x\in(a;+\infty)$, «більше більшого»	 $x<b$, тобто $x\in(-\infty;b)$, «менше меншого»	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$
$a<b$	 $x>b$, тобто $x\in(b;+\infty)$, «більше більшого»	 $x<a$, тобто $x\in(-\infty;a)$, «менше меншого»	 $a<x<b$, тобто $x\in(a;b)$	 $a\leqslant x\leqslant b$, тобто $x\in[a;b]$
$a=b$	 $x>a$	 $x<a$	 розв'язків немає, тобто $\varnothing$	 єдиний розв'язок $\{a\}$

Розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля

$|x|<a$

- якщо $a>0$, то $x\in(-a;a)$
- якщо $a=0$, то розв'язків немає $(\varnothing)$
- якщо $a<0$, то розв'язків немає $(\varnothing)$

$|x|\leqslant a$

- якщо $a>0$, то $x\in[-a;a]$
- якщо $a=0$, то $x=0$
- якщо $a<0$, то розв'язків немає $(\varnothing)$

$|x|>a$

- якщо $a>0$, то $x\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty)$
- якщо $a=0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
- якщо $a<0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in \boldsymbol{R}$

$|x|\geqslant a$

- якщо $a>0$, то $x\in(-\infty;-a]\cup[a;+\infty)$
- якщо $a=0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in \boldsymbol{R}$
- якщо $a<0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$, або $x\in \boldsymbol{R}$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Варіант 2 контрольної роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Розв'яжіть нерівність $4+x\leqslant 0$.

А	Б	В	Г
$[4;+\infty)$	$[-4;+\infty)$	$(-\infty;4]$	$(-\infty;-4]$

2 Розв'яжіть нерівність $-5x>10$.

А	Б	В	Г
$(-\infty;15)$	$(-\infty;-2)$	$(-2;+\infty)$	$(15;+\infty)$

3 Розв'яжіть нерівність $6x<7x-2$.

А	Б	В	Г
$(-\infty;-2)$	$(-\infty;2)$	$(2;+\infty)$	$(-2;+\infty)$

4 Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2\leqslant 3x$.

А	Б	В	Г
-2	5	-5	2

5 Розв'яжіть нерівність $|x|-9\leqslant 0$.

А	Б	В	Г
$[-9;9]$	$(-\infty;9]$	$(-\infty;-9]\cup[9;+\infty)$	$[9;+\infty)$

6 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}-x<11,\\ x>12.\end{cases}$

А	В
$(-\infty;-11)\cup(12;+\infty)$	$(-11;+\infty)$
Б	**Г**
$(12;+\infty)$	$(-11;12)$

7 Розв'яжіть подвійну нерівність

$$-14<4-\frac{3}{5}x\leqslant 7.$$

8 Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases}12x+15>8(x+1)-5,\\ \dfrac{2x-7}{3}\leqslant 1+\dfrac{3x-11}{5}.\end{cases}$$

9 Якщо до деякого натурального числа додати його четверту частину, то сума буде більшою за 20. Якщо від даного числа відняти його половину, то різниця буде меншою від 15.

1) Складіть систему нерівностей для визначення даного числа, позначивши його через n.
2) Розв'яжіть систему нерівностей.
3) Скільки існує чисел, які задовольняють умову задачі?

10 Розв'яжіть нерівність $25-5x\leqslant 2x-3<x+14$.

Бонусне завдання

Розв'яжіть нерівність

$$6\sqrt{x}+5x-51<\left(\sqrt{x}+3\right)^2.$$

2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Поняття функції — одне з фундаментальних загальнонаукових понять, що відображає динамічні процеси реального світу, математичні моделі яких будують у вигляді рівнянь, нерівностей та їх систем. Опанувавши цей розділ ви зможете:

- розраховувати траєкторії руху літальних апаратів, спортивних снарядів, птахів;
- розробляти схеми шляхів сполучення, маршрутів, визначати місцезнаходження об'єктів, прогнозувати розвиток природних явищ та зміни погоди;
- аналізувати тенденції споживання комунальних послуг і пропонувати найкращі варіанти енергозбереження;
- досліджувати процеси за допомогою електронних ресурсів і соціальних мереж;
- розв'язувати виробничі завдання, пов'язані з розподілом ресурсів, плануванням прибутків, логістикою і маркетингом.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Історія розвитку поняття функції
- Алгебраїчні криві та їх графіки
- Функції у навколишньому світі
- Функціональні залежності в природознавстві, економіці, медицині, інженерії
- Побудова графіків за допомогою прикладних комп'ютерних програм
- Графічне розв'язування систем рівнянь із двома змінними
- Метод Крамера
- Оптичні властивості параболи

«Вам не потрібна жодна магія для того, щоб змінити цей світ.»

Джоан Кетлін Роулінґ

§8 ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

ВЧОРА — Ви познайомилися з лінійною функцією, оберненою пропорційністю та окремим випадком квадратичної функції, їх властивостями та графіками

СЬОГОДНІ — Ви узагальните свої знання про функцію (область визначення та область значень функції, способи її задання)

ЗАВЖДИ — Ви зможете будувати графіки залежності двох величин та використовувати побудовані графіки для розв'язування задач практичного змісту

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

15 січня 1892 р. вважають днем народження баскетболу. Цього дня Джеймс Нейсміт, викладач одного з американських коледжів, опублікував 13 правил нової гри, яку винайшов для своїх студентів. Сучасний баскетбол налічує понад 200 правил.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- функція
- аргумент (незалежна змінна)
- функція (залежна змінна)
- область визначення функції
- область (множина) значень функції
- графік функції
- способи задання функції

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Баскетбольний м'яч підкинули вгору. На рис. 1 зображено залежність висоти h (у метрах), на яку піднявся м'яч над поверхнею землі, від часу t (у секундах), тобто графік функції $h(t)$.

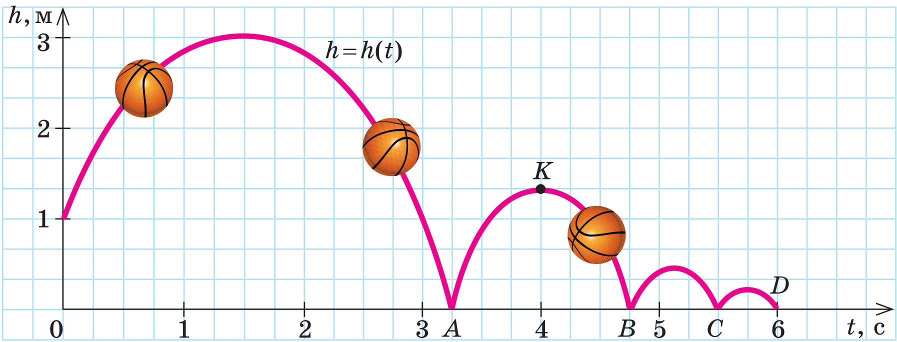


Рис. 1

Користуючись графіком, дайте відповіді на такі запитання.

1) На яку найбільшу висоту піднявся над землею м'яч?
2) Через скільки секунд після кидка м'яч уперше торкнувся землі?
3) Скільки разів м'яч торкнувся землі протягом перших п'яти секунд після кидка?
4) Знайдіть значення $h(3)$ і $h(4)$.

Коментар до розв'язання

Найбільша висота, на яку піднявся м'яч, становить 3 м. Зауважимо, що висота h набуває значень із діапазону від 0 до 3 м включно, час t — від 0 до 6 с включно. Діапазони значень, яких можуть набувати незалежна й залежна змінні, характеризують функцію і називаються **областю визначення** та **областю значень** функції.

Моменти, коли м'яч торкався землі, відповідають точкам перетину графіка з віссю t (точки A, B, C, D). Отже, протягом перших п'яти секунд м'яч торкнувся землі двічі, уперше — через 3,25 с після кидка (абсциса точки A).

Щоб знайти, наприклад, значення $h(4)$, потрібно визначити ординату точки з абсцисою $t=4$ (тобто ординату точки K).

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Поняття функції — одне з найважливіших у курсі математики. Пригадаємо основні відомості про функцію, які ви вже знаєте.

ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК, ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Функцією називають залежність змінної y від змінної x, якщо кожному значенню x за деяким правилом ставиться у відповідність єдине значення y.

x — аргумент (незалежна змінна);

y — функція (залежна змінна);

$y=f(x)$ — функціональна залежність y від x (правило).

Наприклад: $S(a)=a^2$ — залежність площі S квадрата від довжини a його сторони; $s(t)=v_0 t$ — залежність відстані s, яку проходить тіло, рухаючись із постійною швидкістю v_0, від часу t.

Оскільки у функціональній залежності $y=f(x)$ кожному значенню незалежної змінної x відповідає певне значення залежної змінної y, то слід говорити і про множину значень змінної x, і про множину значень змінної y.

Означення 1. Множину всіх значень незалежної змінної (аргумента) називають **областю визначення функції**.

Означення 2. Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, називають **областю значень функції** (або **множиною значень функції**).

Область визначення позначають великою літерою D, область значень — великою літерою E. *Наприклад:* $D(y)$ — область визначення функції y; $E(y)$ — область значень функції y.

Областю визначення функції, яку задано формулою, є область допустимих значень (ОДЗ) змінної відповідного виразу.

Наприклад, областю визначення функції $y=\frac{3}{x-11}+2$ є ОДЗ змінної, що входить у вираз $\frac{3}{x-11}+2$. Цей вираз має зміст при всіх значеннях x, окрім 11. Таким чином, $D(y)$: $x\in(-\infty;11)\cup(11;+\infty)$.

РОЗМИНКА 1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y(x)=\frac{1}{3}x-3$; 2) $h(x)=3\sqrt{x}+5{,}2$; 3) $s(t)=\frac{4-t}{t+6}$.

Функція

Називають:
x — аргуме́нт;
y — функція;
$y=f(x)$ — функціональна залежність y від x.

Записують: $y=f(x)$.

Читають: «y дорівнює f від x».

Найчастіше аргумент позначають через x, а функцію — через y або $f(x)$. Проте можна використовувати й інші літери, якщо цього потребує умова завдання.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

- $D(y)$ — область визначення функції y;
- $E(y)$ — область значень функції y.

СЛІД ЗНАТИ!

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Функції у програмуванні. Функція — частина програми, яка реалізує певний алгоритм.

Функції у фізіології. Функція — діяльність окремих живих органів та їх системи, а також усього живого організму.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

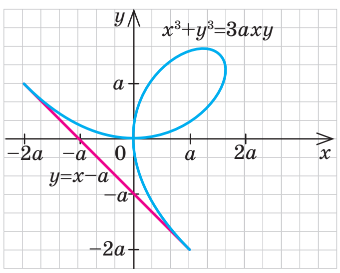
ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Область визначення та область значень функцій $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ та їх графіки наведено на с. 145.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

В алгебраїчній геометрії розглядають алгебраїчні криві, описувані рівняннями вищих степенів. Деякі з них отримали назви на честь своїх дослідників.

Декартів лист



ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте задати відомі вам функції всіма можливими способами. Який спосіб, на вашу думку, є найзручнішим?

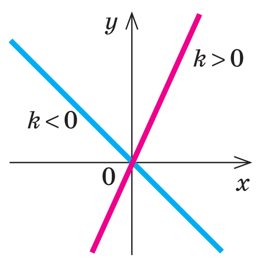
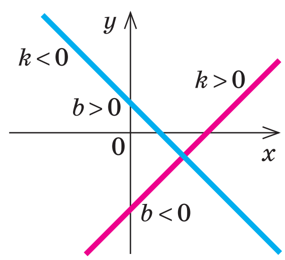
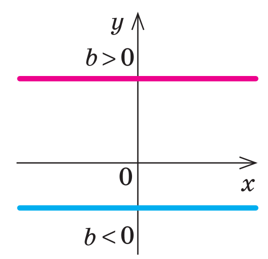
Дізнатися про переваги й недоліки різних способів задання функцій ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

СЛІД ЗНАТИ!

Означення. **Графіком функції** $f(x)$ називають фігуру, що складається з усіх точок $(x; y)$ координатної площини, абсциси яких відповідають усім значенням аргумента x, а ординати — відповідним значенням функції $f(x)$.

Ви вже можете побудувати графіки відомих вам функцій та знайти область їх визначення й область значень. Розглянемо як приклад окремі випадки лінійної функції.

Лінійна функція $y=kx+b$, графік — пряма

$k\neq 0,\ b=0\ (y=kx)$	$k\neq 0,\ b\neq 0$	$k=0\ (y=b)$
		
$D(y)$: $x\in(-\infty;+\infty)$	$D(y)$: $x\in(-\infty;+\infty)$	$D(y)$: $x\in(-\infty;+\infty)$
$E(y)$: $y\in(-\infty;+\infty)$	$E(y)$: $y\in(-\infty;+\infty)$	$E(y)$: $y=\{b\}$

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Функцію вважають заданою, якщо вказано правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної. Іноді додатково вказують область визначення функції.

Функцію можна задати одним із таких способів:
- аналітично — за допомогою формули;
- графічно — за допомогою графіка;
- таблично — за допомогою таблиці;
- словесно — за допомогою опису.

Найчастіше функції задають аналітично або графічно.

Якщо **функцію задано аналітично**, то за поданими значеннями аргумента можна знайти значення функції (і навпаки), підставивши відповідні значення у формулу, якою задано функцію.

Якщо функцію задано на кількох проміжках за допомогою кількох формул, то значення функції знаходять за тією формулою, якою функцію задано на відповідному проміжку.

Наприклад, функцію $y=\begin{cases}1, \text{ якщо } x<-1,\\ x^2, \text{ якщо } x\geqslant -1,\end{cases}$ задано на двох проміжках (див. графік на рис. 2). Знайдемо значення цієї функції:

1) якщо $x=-5$, тобто $x\in(-\infty;-1)$, то $y(x)=1$, $y(-5)=1$;

2) якщо $x=3$, тобто $x\in[-1;+\infty)$, то $y(x)=x^2$, $y(3)=3^2=9$.

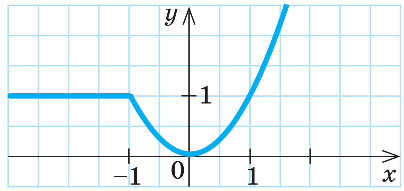


Рис. 2

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть значення функції при заданих значеннях аргумента:

1) $y(x)=2x-3$, $x=4$;
3) $y(a)=2a^2+a$, $a=-2$;
2) $s(t)=t^2-4$, $t=-5$;
4) $y(x)=\sqrt{x+4}$, $x=-3$.

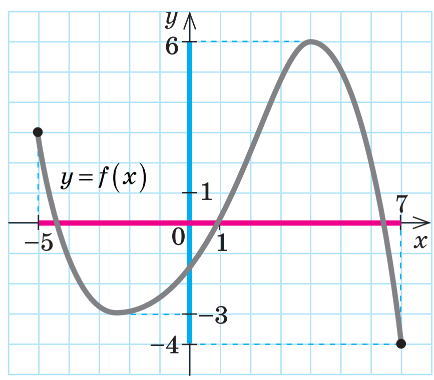
2 Не виконуючи побудови графіка, визначте, чи проходить через задану точку графік функції:

1) $y=4x+7$, $R(-1;3)$;
3) $y=\sqrt{x-7}+5x$, $B(-9;-49)$;
2) $y=x^2-9$, $K(-2;-13)$;
4) $y=\dfrac{2x-2}{x^3+5}$, $H(-2;2)$.

Для того щоб визначити, чи проходить графік функції через задану точку, потрібно:
1) підставити значення абсциси та ординати точки у формулу, якою задано функцію;
2) перевірити, чи є правильною отримана рівність.

У випадку, коли **функцію задано графічно**, вам стане в пригоді вміння читати її графік. За графіком можна знайти значення функції при заданих значеннях аргумента (і навпаки), а також область визначення, область значень функції. Слід лише пам'ятати, що значення, які знайдено за графіком, не завжди є точними.

Наприклад, функцію $y=f(x)$ задано графічно (рис. 3). За графіком маємо: 1) $D(y)$: $x\in[-5;7]$; 2) $E(y)$: $y\in[-4;6]$.



$D(y)$ — проекція графіка на вісь абсцис, $E(y)$ — на вісь ординат

Рис. 3

ПРИКЛАД 1

Функцію задано формулою $y(x)=-3x^2+x-1$. Знайдіть значення функції при $x=0$, $x=-2$, $x=a+1$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо значення функції при $x=0$, тобто $y(0)$. Для цього підставимо у формулу значення $x=0$.	$y(0)=-3\cdot 0^2+0-1$; $y(0)=-1$
КРОК 2	Знайдемо $y(-2)$, підставивши в задану формулу значення $x=-2$.	$y(-2)=-3\cdot(-2)^2+(-2)-1=$ $=-3\cdot 4-2-1$; $y(-2)=-15$
КРОК 3	Підставимо в задану формулу замість x вираз $a+1$ та спростимо вираз у правій частині рівності.	$y(a+1)=-3\cdot(a+1)^2+(a+1)-1=$ $=-3a^2-6a-3+a+1-1$; $y(a+1)=-3a^2-5a-3$

Відповідь: $y(0)=-1$; $y(-2)=-15$; $y(a+1)=-3a^2-5a-3$.

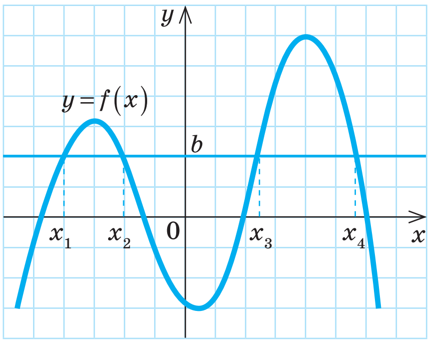


Рис. 4

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Кожному значенню аргумента відповідає **єдине** значення функції, проте одному значенню функції можуть відповідати **кілька** (і навіть безліч) значень аргумента.

Наприклад, за графіком функції $y=f(x)$ (рис. 4) бачимо, що значенню функції $y=b$ відповідають значення аргумента x_1, x_2, x_3, x_4, тобто $y(x_1)=y(x_2)=y(x_3)=y(x_4)=b$.

ПРИКЛАД 2

Функцію задано формулою $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-3$. Знайдіть значення аргумента, при якому значення функції дорівнює $-1{,}5$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Підставимо в задану формулу значення функції $f(x)=-1{,}5$.	$-1{,}5=\frac{1}{2}x^2-x-3$
КРОК 2	Розв'яжемо отримане квадратне рівняння.	$\frac{1}{2}x^2-x-1{,}5=0 \,\Big\vert\, \cdot 2$; $x_1=-1$ або $x_2=3$

Відповідь: -1 або 3.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Знайдіть значення функції при заданих значеннях аргумента:

1) $y=5-x$; $x=0$, $x=3$, $x=t$;

2) $y=\frac{18}{x-3}$; $x=0$, $x=-6$, $x=a+3$;

3) $y=5-\sqrt{x+16}$; $x=0$, $x=9$, $x=a-16$;

4) $y=-4x^2+3x+5$; $x=0$, $x=-1$, $x=n+1$.

Знайдіть значення аргумента при заданому значенні функції:

5) $f(x)=17+x$, $f(x)=12$;

6) $y=\frac{30}{8-x}$, $y=3$;

7) $y=5+\sqrt{6-x}$, $y=9$;

8) $y=x^2-3x+7$, $y=11$.

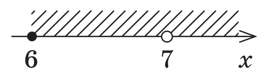
ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгадайте ребус.

ПРИКЛАД 3

Функцію задано формулою $g(x)=\sqrt{x-6}+\frac{2x^2-1}{3x-21}$. Знайдіть область визначення цієї функції.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Функцію задано аналітично, тому область її визначення шукаємо як область допустимих значень змінної x, що входить у вираз $\sqrt{x-6}+\dfrac{2x^2-1}{3x-21}$ (тобто такі значення x, при яких цей вираз має зміст).	$D(g)$: $\begin{cases} x-6\geqslant 0, \\ 3x-21\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 6, \\ x\neq 7 \end{cases}$
КРОК 2	Зобразимо отриманий результат графічно та запишемо його у вигляді об'єднання проміжків.	 $x\in[6;7)\cup(7;+\infty)$

Відповідь: $D(g)$: $x\in[6;7)\cup(7;+\infty)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x)=\dfrac{6-x}{x+3}$;

2) $g(x)=\dfrac{2+x}{x-4}$;

3) $g(x)=\sqrt{x-1}$;

4) $g(x)=\sqrt{2-x}$;

5) $g(x)=\sqrt{x+7}+\dfrac{x^2-4}{5x-30}$;

6) $g(x)=\sqrt{9-x}+\dfrac{x-16}{4x+12}$;

7) $g(x)=\sqrt{x+12}+\dfrac{3x}{\sqrt{6-2x}}$;

8) $g(x)=\sqrt{5x+20}-\dfrac{x}{\sqrt{13-x}}$.

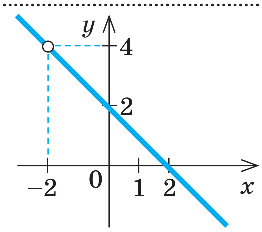
$\dfrac{a}{b}$, $b\neq 0$;

$\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$

ПРИКЛАД 4

Побудуйте графік функції $y=\dfrac{4-x^2}{x+2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область визначення функції $y(x)$.	$D(y)$: $x+2\neq 0$; $x\neq -2$; $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$
КРОК 2	Спростимо вираз $\dfrac{4-x^2}{x+2}$, враховуючи $D(y)$: $x\neq -2$.	$y=\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=2-x$ при $x\neq -2$
КРОК 3	Побудуємо графік лінійної функції $y=2-x$, тобто пряму, що проходить через точки $(2;0)$ і $(0;2)$. Вилучимо на графіку точку з абсцисою $x=-2$.	

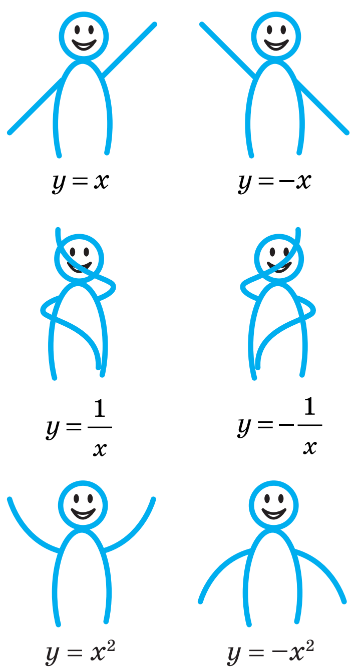
СЛІД ЗНАТИ!

- Розв'язування більшості завдань, пов'язаних із функціями, потрібно починати зі знаходження області визначення функції.
- Будуючи графіки функцій, необхідно пам'ятати про «виколоті» точки.

ФІЗКУЛЬТХВИЛИНКА

«Танцювальна математика»

Зробіть вправи:



- $m^2 \geqslant 0$ завжди, причому $m^2 = 0$ лише при $m = 0$;
- $\sqrt{a} \geqslant 0$ завжди, причому $\sqrt{a} = 0$ лише при $a = 0$

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{3x+3}{x+1}$; 3) $y = \frac{9-x^2}{x-3}$; 5) $y = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1}$; 7) $y = \frac{2\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x+2}}$;

2) $y = \frac{4x-8}{x-2}$; 4) $y = \frac{x^2-16}{4-x}$; 6) $y = \frac{(9-x)\sqrt{x}}{x-9}$; 8) $y = -\frac{6\sqrt{3-x}}{x\sqrt{3-x}}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Функцію задано формулою $y = \frac{3x}{x^2-1} + \sqrt{2-x}$. Знайдіть:

1) $y(0)$; 2) $y(-1)$; 3) $y(2)$; 4) $y(-2)$; 5) $y(-x)$; 6) $y(m+2)$.

2 Функцію задано формулою $y = \begin{cases} -2, \text{ якщо } x < -2, \\ 2 - x^2, \text{ якщо } -2 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

Знайдіть:

1) $y(0)$; 2) $y(1)$; 3) $y(-2)$; 4) $y(4)$; 5) $y\left(-\sqrt{13}\right)$; 6) $y\left(\sqrt{5}-2\right)$.

3 Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2+2x}{x+2}$; 3) $y = \frac{x^2-25}{x^2-25}$; 5) $y = \begin{cases} -2x-3, \text{ якщо } x < -3, \\ 3, \text{ якщо } -3 \leqslant x < 0, \\ -\frac{1}{2}x + 3, \text{ якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $y = \frac{9-x^2}{x+3}$; 4) $y = -2x + \frac{x^2-1}{x^2-1}$; 6) $y = \begin{cases} -2x+5, \text{ якщо } x < 2, \\ \frac{2}{x}, \text{ якщо } 2 \leqslant x < 4, \\ x - 3{,}5, \text{ якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

4 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{4}{\frac{1}{2}x - 5}$; 5) $y = \frac{2+x}{x^2-3x} - \sqrt{3x}$;

2) $y = \frac{12x}{49-16x^2}$; 6) $y = \sqrt{-2x+6} + \frac{2}{\sqrt{1-x}}$;

3) $y = \frac{2x}{x+3} + \sqrt{x+5}$; 7) $y = \frac{9}{(x-3)(x+7)}$;

4) $y = \sqrt{x-2} + \frac{3}{x-2}$; 8) $y = \frac{2}{2x-16} - \sqrt{x}$.

5 Знайдіть область значень функції:

1) $y = x^2 + 3$; 3) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{x+3} - 2$;

2) $y = (x+5)^2 - 1$; 4) $y = -\sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{x^2+9}$.

6 Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y=2x-4$ і $y=5x+2$; 4) $y=-x^2+4x$ і $y=2x$;

2) $y=\dfrac{2}{x}$ і $y=-4$; 5) $y=x^2+4x+4$ і $y=x+4$;

3) $y=x^2+2$ і $y=x+2$; 6) $y=9-x^2$ і $y=x^2-6x+9$.

7 Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить через задану точку графік функції:

1) $y=\begin{cases}x-4, \text{ якщо } x<6,\\ x^2, \text{ якщо } x\geqslant 6,\end{cases}$ точка $F(0;-4)$;

2) $y=\begin{cases}\dfrac{3}{x-5}, \text{ якщо } x<-5,\\ 3x^2-x^3, \text{ якщо } x\geqslant -5,\end{cases}$ точка $L(-1;2)$.

8 Задано функцію $f(x)=\begin{cases}-4, \text{ якщо } x<-2,\\ -x^2, \text{ якщо } -2\leqslant x<3,\\ -x-6, \text{ якщо } x\geqslant 3.\end{cases}$

1) Побудуйте графік цієї функції.

2) Розв'яжіть рівняння $f(x)=-4$ графічним способом.

Для визначення координат точок перетину графіків функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ потрібно розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases}y=f(x),\\ y=g(x).\end{cases}$$

Алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом

1. Побудувати в одній системі координат графіки функцій, що відповідають обом частинам рівняння.
2. Знайти абсциси точок перетину графіків.

В ОДИН КЛІК

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ У GOOGLE

У 8 класі ви навчилися будувати графіки функцій за допомогою програми Advanced Grapher. Розглянемо сервіс Google, який дозволяє будувати графіки функцій, заданих аналітично, визначати координати точок перетину графіків, знаходити значення функції в заданих точках тощо.

1. У рядок пошуку введіть формулу, якою задано функцію, з використанням операторів для виконання дій (див. таблицю праворуч).
2. Для побудови графіків кількох функцій (рис. 5) введіть у рядок пошуку *(1)* відповідні формули через кому без пробілів.
3. Щоб змінити масштаб за однією або за обома осями, скористайтеся інструментом *(2)*.
4. Клацнувши інструмент *(3)* на відповідному кольорі, можна зробити активним графік цього кольору. Вказівник миші матиме вигляд точки *(4)* на активному графіку.
5. Для визначення координат певної точки активного графіка рухайте вказівник — угорі відображаються координати *(5)* поточної точки.

Функція	Запис формули
$y=x$	x
$y=\dfrac{1}{x}$	$1/x$
$y=x^2$	$x\,\hat{}\,2$
$y=\sqrt{x}$	$\mathrm{sqrt}(x)$

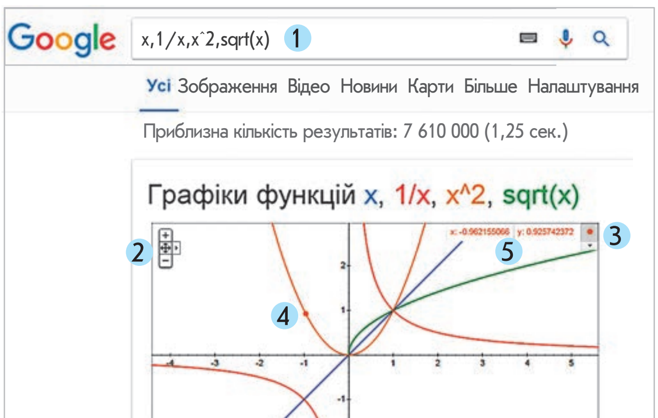
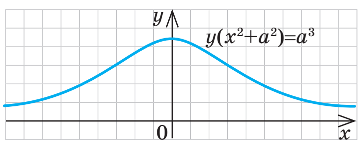
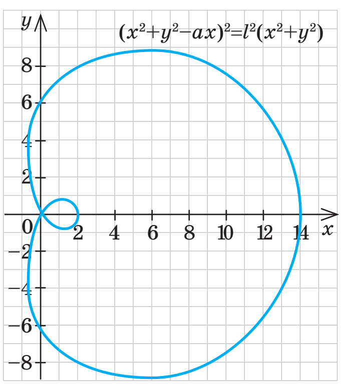


Рис. 5

Марія Ґаетана Аньєзі (італ. *Maria Gaetana Agnesie*, 1718–1799) — видатна італійка, яка займалася математикою, філософією. У 9 років Марія виступила з доповіддю, у якій захищалося право жінок на якісну освіту. У 30 років надрукувала працю «Основи аналізу для італійського юнацтва» обсягом понад 1000 сторінок, яка містила всі розділи математики того часу. Одна з кривих, яку досліджувала Марія, отримала назву «Локон Аньєзі».



Равлик Паскаля



Див. приклад 1

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $f(-6)=5$, то $5\in D(f)$, а $-6\in E(f)$.

2) Якщо $D(f)=(1;3]$, то значення $f(1)$ не існує.

3) Якщо $E(f)=(2;9)$, то існує таке значення аргумента x_0, що $f(x_0)=7$.

4) Областю визначення функції $y=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{5-x}}$ є порожня множина.

5) Областю значень функції $y=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$ є множина $\{1\}$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВАНТАЖОПЕРЕВЕЗЕННЯ»

Транспортна компанія здійснює вантажоперевезення на відстань, не меншу від 20 км і не більшу за 50 км. Вартість перевезення вантажу на відстань від 20 до 30 км (не включаючи 30 км) становить 1000 грн, від 30 до 40 км (не включаючи 40 км) — 1200 грн, від 40 до 50 км — 1400 грн.

1 Знайдіть область визначення функції $y=f(x)$, де y — вартість (у грн) перевезення вантажу на відстань x (у км).

2 Побудуйте графік функції $y=f(x)$, знайдіть область її значень.

3 Визначте вартість перевезення вантажу на відстань 43 км.

4 З'ясуйте:
1) чи може вартість перевезення вантажу дорівнювати 1350 грн;
2) чи можна перевезти вантаж на відстань 55 км.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Функцію задано формулою:

1) $y=7-x$; знайдіть $y(0)$, $y(4)$, $y(s)$;

2) $y=\frac{20}{x-2}$; знайдіть $y(0)$, $y(-3)$, $y(a+2)$;

3) $y=10-\sqrt{x+64}$; знайдіть $y(0)$, $y(36)$, $y(a-64)$;

4) $y=-3x^2-x+8$; знайдіть $y(0)$, $y(-2)$, $y(n-1)$.

2 Знайдіть значення аргумента при заданому значенні функції:

1) $f(x)=19+x$, $f(x)=9$;
3) $y=1-\sqrt{6+x}$, $y=-7$;
2) $y=\dfrac{36}{10-x}$, $y=12$;
4) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-5$, $y=2{,}5$.

Див. приклад 2

3 Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x)=\dfrac{x-5}{x+1}$;
3) $g(x)=\dfrac{1-x^2}{3x-24}+\sqrt{x-5}$;
2) $g(x)=\sqrt{12-x}$;
4) $g(x)=\sqrt{16-x}-\dfrac{6x}{\sqrt{4x-28}}$.

Див. приклад 3

4 Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{6-2x}{3-x}$; 2) $y=\dfrac{1-x^2}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{(x-4)\sqrt{x}}{x-4}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}$.

Див. приклад 4

Бонусні завдання

5 Зобразіть, як може виглядати графік функції, область визначення якої:

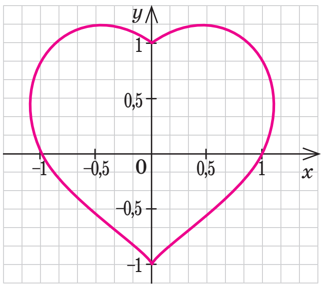
1) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$;
2) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

6 Знайдіть область значень функції:

1) $y=|x|+2$;
2) $y=|x+2|-3$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Крива на рисунку описується рівнянням $(x^2+y^2-1)^2-x^2y^3=0$. Спробуйте її побудувати.



ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння $f(x)=0$, якщо функцію $f(x)$ задано формулою:

1) $f(x)=3-6x$;
5) $f(x)=x^2-10x+16$;
2) $f(x)=5x+10$;
6) $f(x)=x^2-8x-9$;
3) $f(x)=x^2-6$;
7) $f(x)=9-\sqrt{x+5}$;
4) $f(x)=5-x^2$;
8) $f(x)=1+\sqrt{x-25}$.

TO BE SMART

Радимо прочитати книжку Хоакіна Наварро «Жінки-математики. Від Гіпатії до Еммі Нетер». Ви дізнаєтеся про найвидатніших жінок різних часів, які присвятили себе науці, про їх наукові досягнення, які стали можливими попри всі тогочасні стереотипи.

«Алгебра і геометрія — єдині країни, де панують тиша й мир.»

Марія Ґаетана Аньєзі

§ 9 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ. НУЛІ ФУНКЦІЇ. ПРОМІЖКИ ЗНАКОСТАЛОСТІ

ВЧОРА Ви повторили такі властивості функції, як область визначення та область значень, навчилися їх знаходити

СЬОГОДНІ Ви познайомитеся з такими властивостями функції, як проміжки знакосталості, нулі функції

ЗАВЖДИ Ви зможете за допомогою графіків аналізувати траєкторії руху тварин, птахів, літальних апаратів тощо

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Дельфіни під час полювання дезорієнтують здобич, оточуючи її повітряними бульбашками. Посилаючи ультразвукові сигнали та аналізуючи відлуння, дельфіни визначають її місцезнаходження. Як же вони відокремлюють сигнал від здобичі в хаосі сигналів, відбитих від бульбашок? Учені з'ясували, що мозок дельфіна виконує цю операцію за допомогою нелінійних математичних методів, що неможливо без складного математичного апарату.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- нулі функції
- додатні значення функції
- від'ємні значення функції
- проміжки знакосталості функції

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У басейні дельфінарію дельфін то вистрибує з води, то пірнає під воду. На рис. 1 зображено залежність відстані h (у м) між дельфіном та поверхнею води від часу t (у с), $t \in [0;12]$. Додатні значення h відповідають висоті, на яку дельфін вистрибує, від'ємні — глибині, на яку пірнає.

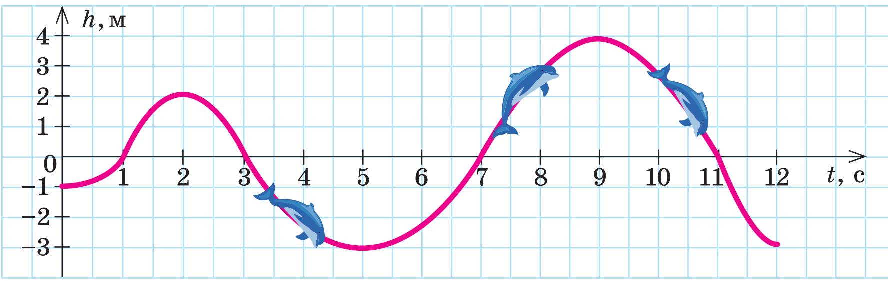


Рис. 1

Користуючись графіком, дайте відповіді на такі запитання.

1) Скільки разів дельфін перетнув поверхню води?

2) У які проміжки часу дельфін був: а) над водою; б) під водою?

Коментар до розв'язання

Додатні значення h відповідають перебуванню дельфіна над водою, а від'ємні — під водою. Отже, моментам, коли дельфін перетинав поверхню води, відповідають точки, у яких графік перетинає вісь t. Із графіка видно, що дельфін перетнув поверхню води 4 рази. При цьому він перебував:

- над водою (частини графіка вище від осі t) у проміжки часу $t \in (1;3)$ і $t \in (7;11)$;
- під водою (частини графіка нижче за вісь t) у проміжки часу $t \in (0;1)$, $t \in (3;7)$ і $t \in (11;12)$.

Розглянемо далі, які саме властивості функції ми дослідили на прикладі актуальної задачі.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

НУЛІ ФУНКЦІЇ

Серед усіх значень, яких може набувати функція, особливу увагу приділяють тим, що дорівнюють нулю. Точки графіка функції $y=f(x)$, ординати яких дорівнюють нулю ($y=0$, тобто $f(x)=0$), розташовані на осі абсцис. Абсциси цих точок називають **нулями функції**.

ПРИГАДАЙТЕ!

Усі точки осі **абсцис** мають координати $(x;0)$.

Усі точки осі **ординат** мають координати $(0;y)$.

Означення. **Нулем функції** називають значення аргумента, при якому значення функції дорівнює нулю.

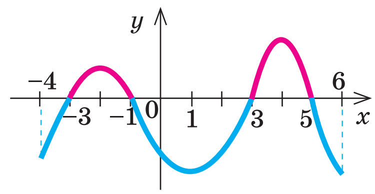
ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Нулі функції — абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис.
- Нулями функції $y=f(x)$ є корені рівняння $f(x)=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

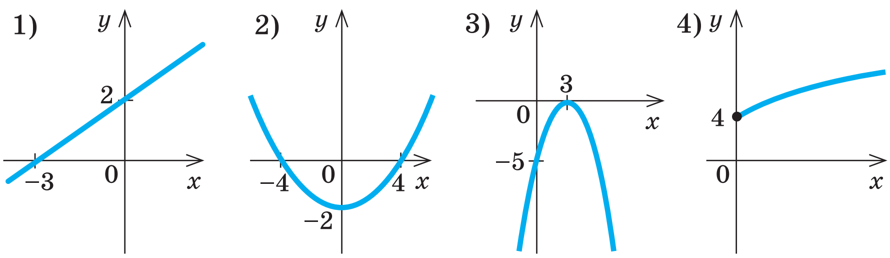
1) Для функції, графік якої наведено на рисунку, числа −3, −1, 3, 5 є нулями функції.



2) Нулями функції $y=x^2-4$, заданої аналітично, є числа — корені рівняння $x^2-4=0$, тобто $x=-2$ та $x=2$.

РОЗМИНКА 1

Знайдіть нулі функції за її графіком:



Алгоритм знаходження нулів функції $y=f(x)$, заданої аналітично

1. Знайти $D(y)$ — область визначення заданої функції.
2. Розв'язати рівняння $f(x)=0$ на $D(y)$.
3. Записати у відповідь знайдені корені рівняння $f(x)=0$, які і є нулями функції.

АЛГОРИТМ

РОЗМИНКА 2

Користуючись алгоритмом, знайдіть нулі функції:

1) $y=2x+16$;
2) $y=2\frac{1}{3}-7x$;
3) $y=x^2-2x-8$;
4) $y=25x+4x^3$;
5) $y=\sqrt{x}-3$;
6) $y=\sqrt{x-1}+16$.

Ще одна важлива властивість функції — її парність (непарність). Досліджувати функції на парність ви будете в наступних класах.
Дізнатися про парність і непарність функцій можна на сайті interactive.ranok.com.ua

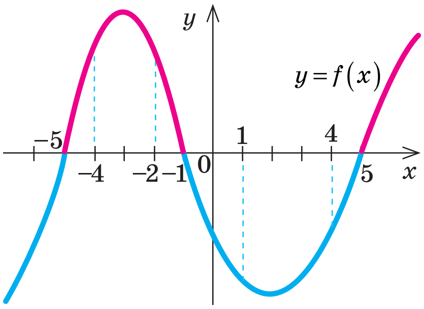


Рис. 2

ПРОМІЖКИ ЗНАКОСТАЛОСТІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо графік функції $y=f(x)$ (рис. 2). На проміжках $(-5;-1)$ і $(5;+\infty)$ графік розташований вище за вісь абсцис, тобто на цих проміжках функція набуває додатних значень $(y>0)$.

На проміжках $(-\infty;-5)$ і $(-1;5)$ графік розташований нижче від осі абсцис, тобто на цих проміжках функція набуває від'ємних значень $(y<0)$.

Отримані проміжки називають **проміжками знакосталості.** Записують:

1) $y<0$ при $x\in(-\infty;-5)\cup(-1;5)$; 2) $y>0$ при $x\in(-5;-1)\cup(5;+\infty)$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

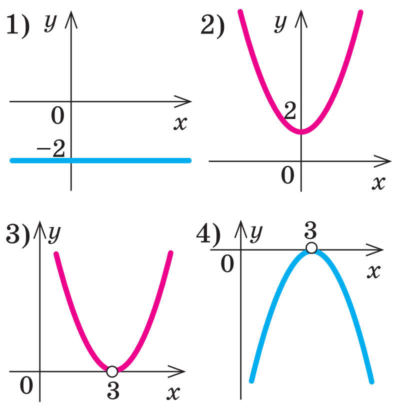
Означення. Кожний із проміжків, на якому функція набуває значень одного знака, називають **проміжком знакосталості** цієї функції.

Користуючись рис. 2, зауважимо:

- на проміжку $[-4;-2]$ функція набуває додатних значень, проте проміжком знакосталості є проміжок $(-5;-1)$;
- на проміжку $[1;4]$ функція набуває від'ємних значень, проте проміжком знакосталості є проміжок $(-1;5)$.

ПОМІРКУЙТЕ

Проаналізуйте графік функції та знайдіть проміжки її знакосталості.

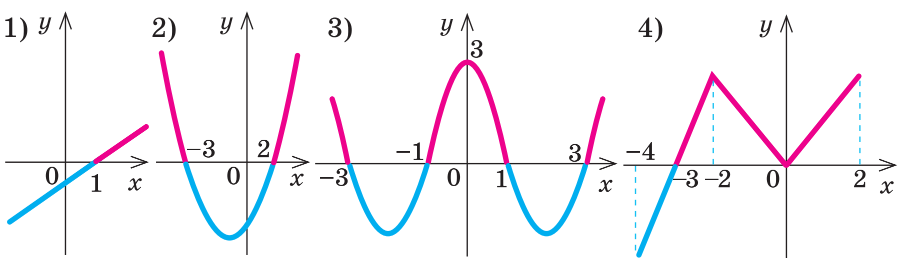


КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Проміжками знакосталості є проміжки **максимальної довжини**, на яких $f(x)>0$ або $f(x)<0$.

РОЗМИНКА 3

Знайдіть проміжки знакосталості функції за її графіком:



АЛГОРИТМ

Алгоритм знаходження проміжків знакосталості функції $y=f(x)$, заданої аналітично

1. Знайти $D(y)$ — область визначення заданої функції.
2. Розв'язати нерівності $y<0$ і $y>0$ на $D(y)$.
3. Записати у відповідь отримані проміжки, враховуючи область визначення функції.

ПРИКЛАД 1

Знайдіть нулі функції $y=\frac{x^3-9x}{x+3}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Складемо рівняння, корені якого будуть шуканими нулями функції. Розв'яжемо рівняння.	$y(x)=0$; $\frac{x^3-9x}{x+3}=0$; $\begin{cases}x^3-9x=0,\\x+3\neq 0\end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо отриману систему. Виберемо відповідь з урахуванням області визначення функції $y(x)$.	$\begin{cases}x(x^2-9)=0,\\x\neq -3;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-3)(x+3)=0,\\x\neq -3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0, \text{ або } x=3, \text{ або } x=-3,\\x\neq -3.\end{cases}$ Очевидно, $x\neq -3$ не є розв'язком системи, отже, $x=0$ або $x=3$

Відповідь: 0; 3.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Знайдіть нулі функції:

1) $y=6-18x$;
2) $y=42+7x$;
3) $y=x^2+x-6$;
4) $y=4+3x-x^2$;
5) $y=6-\sqrt{2x}$;
6) $y=3-\sqrt{x-2}$;
7) $y=\frac{x^3-16x}{x-4}$;
8) $y=\frac{4x-x^3}{x+2}$.

$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, якщо $\begin{cases}P(x)=0,\\Q(x)\neq 0\end{cases}$

З іншим способом розв'язування прикладу 2 ви можете ознайомитися на сайті interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 2

Визначте проміжки знакосталості функції $y=\frac{1}{2}x-4$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо $D(y)$.	$D(y)$: $x\in \boldsymbol{R}$
КРОК 2	Складемо нерівності $y<0$ і $y>0$ та розв'яжемо їх.	1) $\frac{1}{2}x-4<0$; $x-8<0$; $x<8$; 2) $\frac{1}{2}x-4>0$; $x-8>0$; $x>8$
КРОК 3	Запишемо множину розв'язків кожної нерівності у вигляді проміжку.	1) $y<0$ при $x\in(-\infty;8)$; 2) $y>0$ при $x\in(8;+\infty)$

Відповідь: $y<0$ при $x\in(-\infty;8)$; $y>0$ при $x\in(8;+\infty)$.

ПРИКЛАД 3

Визначте проміжки знакосталості функції $y=x^2-6x+9$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо $D(y)$. Перетворимо вираз x^2-6x+9, застосувавши формулу квадрата двочлена.	$D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$; $x^2-6x+9=(x-3)^2$
КРОК 2	З'ясуємо знак виразу $(x-3)^2$, враховуючи, що $a^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях a.	$(x-3)^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях x, причому рівність досягається при $x=3$
КРОК 3	Зробимо висновок.	$(x-3)^2>0$ при всіх значеннях x, окрім 3; $(x-3)^2<0$ — розв'язків немає, тому значень x, при яких $y<0$, не існує

Відповідь: $y>0$ при $x \in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; значень x, при яких $y<0$, не існує.

З іншим способом розв'язування прикладу 3 ви можете ознайомитися на сайті interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 4

Визначте проміжки знакосталості функції $y=\sqrt{x}+4$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо $D(y)$, скориставшись означенням арифметичного квадратного кореня.	Оскільки $\sqrt{x}$ існує лише при $x \geqslant 0$, то $D(y)$: $x \in[0;+\infty)$
КРОК 2	З'ясуємо знак виразу $\sqrt{x}$ за означенням арифметичного квадратного кореня.	$\sqrt{x} \geqslant 0$ при всіх $x \in[0;+\infty)$
КРОК 3	Проаналізуємо знак виразу $\sqrt{x}+4$ і зробимо висновок.	$\sqrt{x} \geqslant 0 \,\vert +4$; $\sqrt{x}+4 \geqslant 4$, отже, $\sqrt{x}+4>0$ при всіх $x \in D(y)$

Відповідь: $y>0$ при $x \in[0;+\infty)$; значень x, при яких $y<0$, не існує.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Визначте проміжки знакосталості функції:

1) $y=x-3$; 3) $y=5-\frac{1}{3}x$; 5) $y=-(x-10)^2$; 7) $y=\sqrt{x}+3$;

2) $y=x+4$; 4) $y=\frac{1}{2}x+6$; 6) $y=x^2-4x+4$; 8) $y=\sqrt{-x}+1$.

ПРИКЛАД 5

Знайдіть додатне значення a, при якому число $x_0=-0{,}2$ є нулем функції $y=5\left(a^2-4\right)x-3$.

Розв'язання

Крок	Зміст і результат дії
КРОК 1	Скористаємось означенням нуля функції: якщо $x_0=-0{,}2$ є нулем функції, то $y\left(x_0\right)=y(-0{,}2)=0$.
КРОК 2	Підставимо в задану формулу значення $x_0=-0{,}2$ і знайдемо $y(-0{,}2)$: $y(-0{,}2)=5\left(a^2-4\right)\cdot(-0{,}2)-3=-\left(a^2-4\right)-3=-a^2+4-3=1-a^2$.
КРОК 3	Складемо рівняння за умовою $y(-0{,}2)=0$ і розв'яжемо його. Виберемо серед знайдених значень a додатне число: $1-a^2=0$; $a^2=1$; $a_1=-1$, $a_2=1$; отже, $a=1$.

Відповідь: 1.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Знайдіть усі значення a, при яких число x_0 є нулем функції:

1) $y=a+2x$, $x_0=11$;
2) $y=3x-a$, $x_0=8$;
3) $y=a+7x-2x^2$, $x_0=-1$;
4) $y=5x^2+6x+a$, $x_0=-2$;
5) $y=\dfrac{a^2-x}{x+9}$, $x_0=0{,}81$;
6) $y=\dfrac{x+a^2}{x+1}$, $x_0=-0{,}01$;
7) $y=\dfrac{xa^2-102+\sqrt{x}}{x-3}$, $x_0=4$;
8) $y=\dfrac{33+\sqrt{x}-xa^2}{x-8}$, $x_0=9$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Нулі функції — **абсциси** точок перетину графіка функції з віссю абсцис.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть нулі функції:

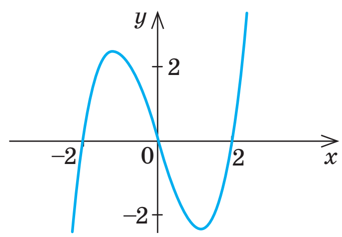
1) $y=4-\dfrac{2}{5}x$;
2) $y=\dfrac{2x+16}{x-8}$;
3) $y=2x^2+5x+2$;
4) $y=\sqrt{x-3}-4$;
5) $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x-10$;
6) $y=-8-2\sqrt{x}$.

2 Побудуйте графік функції, знайдіть її нулі та проміжки знакосталості, якщо:

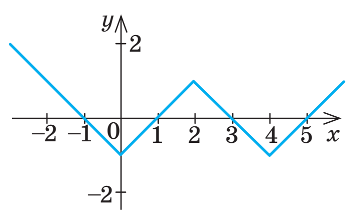
1) $y=\dfrac{1}{3}x$;
2) $y=\dfrac{3}{4}x-6$;
3) $y=-2x-8$;
4) $y=\dfrac{4}{x}$;
5) $y=\begin{cases}-2x-4, & x<-3,\\ 2x+8, & -3\leqslant x<2,\\ 6x, & x\geqslant 2;\end{cases}$
6) $y=\begin{cases}0, & x<0,\\ -x^2, & 0\leqslant x<2,\\ -4, & x\geqslant 2.\end{cases}$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і вставте пропущені числа і вирази.



−2; 0; 2	(−2; 0)∪(2; +∞)



?	?

Щоб знайти точку перетину графіка функції з віссю абсцис Ox (з віссю ординат Oy), необхідно у формулу, якою задано функцію, підставити значення $y=0$ ($x=0$) і знайти значення x (значення y). Координати точки перетину графіка:

- з віссю Ox — $(x;0)$;
- з віссю Oy — $(0;y)$.

3 Знайдіть значення a, при яких число x_0 є нулем функції:

1) $y=2x+a$, $x_0=-3$;
2) $y=ax-9$, $x_0=\frac{1}{3}$;
3) $y=\left(a^2+3\right)x+14$, $x_0=-2$;
4) $y=\frac{2}{9}x+a^2-2a-5$, $x_0=9$;
5) $y=3ax^2+(2a+1)x-4$, $x_0=-2$;
6) $y=-\frac{1}{2}a^2x-4x^2+a$, $x_0=\frac{1}{2}$.

4 Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y=\frac{1}{6}x-18$;
2) $y=\frac{5x}{x-3}$;
3) $y=\frac{x-4}{x+2}$;
4) $y=\frac{2}{x-5}+4$;
5) $y=-\frac{1}{3}x^2-4$;
6) $y=x^2-2x-3$.

Ігор Іванович Сікорський (1889–1972) — авіаконструктор, учений, винахідник, автор одного з кращих гелікоптерів в історії авіації. Розробив близько 50 моделей гелікоптерів, завдяки яким було врятовано понад 2 млн людських життів.

Із 2016 р. міжнародний аеропорт «Київ» і НТУУ «Київський політехнічний інститут» носять ім'я Ігоря Сікорського.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Функція $y=x^2+4$ не має нулів.
2) Якщо $x=6$ — нуль функції $y=f(x)$, то $\frac{f(6)}{12}=0$.
3) Якщо $x=-8$ — нуль функції $y=f(x)$, то точка $(-8;0)$ належить графіку цієї функції.
4) Якщо точка $(0;9)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то $x=9$ — нуль цієї функції.
5) Якщо $y<0$ при $x\in(3;+\infty)$, то $y(5)$ може дорівнювати 5.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ПОЛІТ НА ГЕЛІКОПТЕРІ»

Пілот-початківець, навчаючись керувати гелікоптером, виконує всі завдання пілота-інструктора. На рис. 3 зображено залежність висоти h (у м) над поверхнею землі, на якій перебував гелікоптер під час польоту, від часу t (у хв), $t\in[0;10]$.

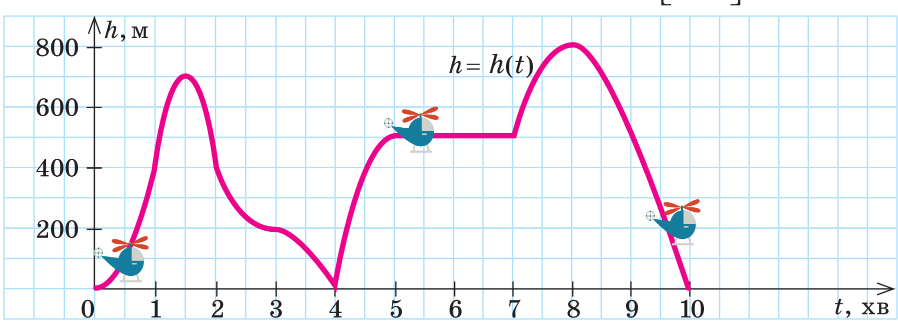


Рис. 3

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Отримати ліцензію приватного пілота можна в будь-якому віці, починаючи із 17 років. Курс навчання складається з наземної (теоретичної), аварійно-рятувальної, тренажерної та льотної підготовки. Дізнайтеся більше: utc-aviator.com/uk/

1. На яку найбільшу висоту над поверхнею землі піднявся гелікоптер? У який момент часу це відбулося?
2. Скільки разів гелікоптер торкався землі? У які моменти часу?
3. Укажіть проміжки часу, протягом яких гелікоптер: 1) набирав висоту; 2) знижувався; 3) не змінював висоту; визначте цю висоту.
4. Знайдіть значення $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(6)$, $h(9)$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

1. Функцію задано формулою $y=\frac{3}{2-x}$. Знайдіть $y(-1)$.

А	Б	В	Г
1	3	-3	-1

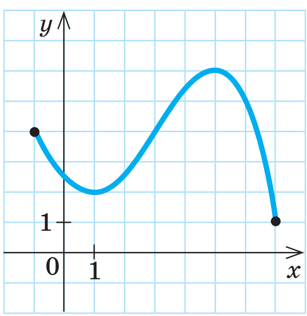
2. Знайдіть значення аргумента, при якому значення функції $y=3+\sqrt{x}$ дорівнює 7.

А	Б	В	Г
0	16	2	4

3. Знайдіть нулі функції $y=x^2-36$.

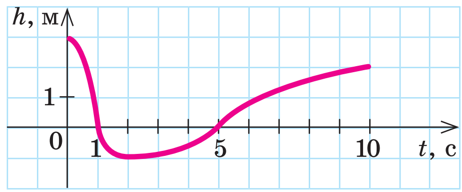
А	Б	В	Г
±18	18	6	±6

4. На рисунку подано графік функції $y=f(x)$. Знайдіть область її значень.



А	Б	В	Г
$[-1;7]$	$[2;6]$	$[1;6]$	$[1;5]$

5. Чайка полює на рибу, іноді пірнаючи під воду. На рисунку зображено залежність відстані h між чайкою та поверхнею води від часу t. Додатні значення h відповідають висоті польоту чайки над водою, від'ємні — глибині, на яку вона пірнає. Укажіть проміжок часу, протягом якого чайка була під водою.



А	Б	В	Г
$(0;1)$	$(1;5)$	$(0;2)$	$(-1;0)$

6. Установіть відповідність між заданою функцією (1–3) та областю її визначення (А–Г).

1	$y=\frac{x}{x-1}$	А	$(-\infty;1]$
2	$y=\sqrt{x-1}$	Б	$(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$
3	$y=\sqrt{1-x}$	В	$[1;+\infty)$
		Г	$(1;+\infty)$

7. Визначте проміжки знакосталості функції $y=2-\frac{1}{5}x$.
8. Знайдіть область визначення функції $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x\sqrt{x+3}}$ і побудуйте її графік.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Знайдіть нулі функції:

1) $y=56-8x$; 2) $y=x^2+2x-3$; 3) $y=8-\sqrt{4x}$; 4) $y=\dfrac{x^3-x}{x+1}$.

Див. приклади 2–4

2 Визначте проміжки знакосталості функції:

1) $y=x-5$; 2) $y=3-\dfrac{1}{4}x$; 3) $y=x^2-2x+1$; 4) $y=\sqrt{x}+2$.

3 Знайдіть усі значення a, при яких число x_0 є нулем функції:

1) $y=a-4x$, $x_0=6$;

2) $y=3x^2-5x+a$, $x_0=-2$;

3) $y=\dfrac{x-a^2}{x+2}$, $x_0=0{,}04$;

4) $y=\dfrac{xa^2-20+\sqrt{x}}{x-15}$, $x_0=16$.

4 Накресліть схематично графік функції, нулями якої є числа:

1) 5; 2) −4; 2; 3) −3; 0; 2; 4) −5; −1; 1; 5.

Користуючись графіками, укажіть проміжки знакосталості кожної функції.

Див. приклад 5

5 Побудуйте графік функції, знайдіть її нулі та проміжки знакосталості, якщо:

1) $y=\begin{cases} x+3, & x<-2, \\ -x-1, & -2\leqslant x<0, \\ x-1, & x\geqslant 0; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} 2x+8, & x<-2, \\ x^2, & -2\leqslant x<1, \\ -x+2, & x\geqslant 1; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x-2, & x<-1, \\ -x^2, & -1\leqslant x<1, \\ 2x-3, & x\geqslant 1. \end{cases}$

Бонусне завдання

6 Знайдіть нулі функції:

1) $y=x(x-3)(x-5)(x+1)(x+2)$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Навчальний центр Lufthansa пропонує відчути себе пілотом літака на льотних тренажерах «Lufthansa Flight Training», установлених в аеропортах Берліна, Франкфурта, Мюнхена і Відня.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

За графіком функції $y=f(x)$, заданої на проміжку $[-3;9]$ (рис. 4), знайдіть:

1) $f(3)$; $f(1)$; $f(0)$; $f(9)$;

2) нулі функції;

3) область значень функції;

4) множину розв'язків нерівності $f(x)\leqslant 0$;

5) множину розв'язків нерівності $f(x)\geqslant 0$.

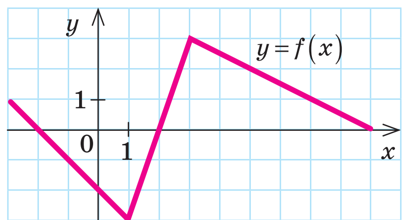


Рис. 4

TO BE SMART

Радимо прочитати

книжку Дебори Кесперт «Генії. Найвидатніші винаходи за всю історію науки». Ви дізнаєтеся про відкриття, технології, ідеї, які змінили наше життя:

- Леонардо да Вінчі розробляє креслення гелікоптера;
- Йоганн Гутенберг винаходить друкарський верстат;
- брати Райт злітають на першому аероплані;
- Тім Бернерс-Лі створює Всесвітнє павутиння.

«Повітроплавання не було ні наукою, ні галуззю промисловості. Воно було дивом.»

Ігор Сікорський

§ 10 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ. ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

ВЧОРА	Ви знаходили область визначення, область значень, нулі функції, проміжки її знакосталості
СЬОГОДНІ	Ви продовжите досліджувати функції: знаходити їх найбільше й найменше значення, проміжки зростання і спадання
ЗАВЖДИ	Ви зможете за допомогою графіків зробити висновки щодо вподобань телеглядачів або дослідити зміни погодних умов

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

На рис. 1 зображено графіки біоритмів певної людини, тобто залежності фізичного, емоційного та інтелектуального станів людини від часу (у днях) із 1 по 25 грудня.

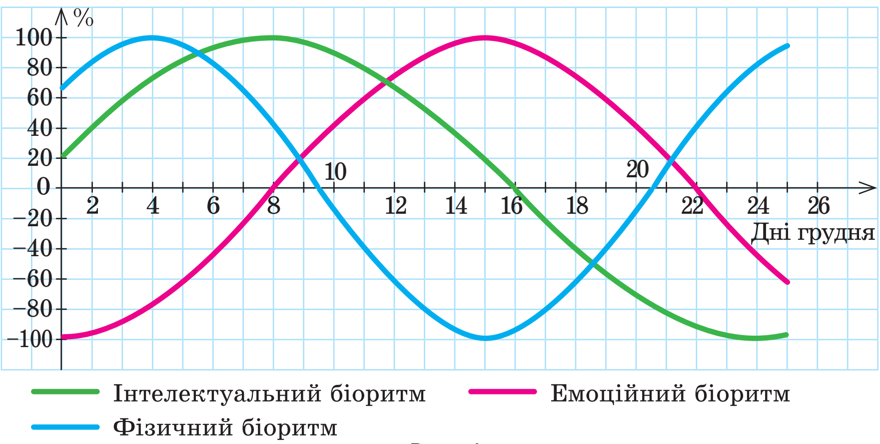


Рис. 1

1) Знайдіть значення кожної функції (у %) 11 грудня.
2) Укажіть найбільше значення інтелектуального біоритму (у %); найменше значення фізичного біоритму (у %); дні, коли вони спостерігаються.
3) Визначте проміжок (у днях), протягом якого значення емоційного біоритму зростають.
4) Вважаючи, що на рис. 1 подано ваші біоритми, визначте, у який день краще написати контрольну роботу з алгебри, а в який — узяти участь у спортивних змаганнях?

Коментар до розв'язання

Значення емоційного біоритму зростають на проміжку від 1 до 15 грудня: графік відповідної функції «йде» вгору, зі збільшенням абсциси збільшується ордината. Говорять, що на даному проміжку функція зростає. А на проміжку від 15 до 25 грудня бачимо, що графік «йде» вниз, зі збільшенням абсциси ордината зменшується. Говорять, що на цьому проміжку функція спадає.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Біологічний ритм (біоритм) — рівномірне чергування в часі станів організму. Існує теорія «трьох біоритмів» людини — інтелектуального, фізичного та емоційного, які змінюються циклічно, але не синхронно.

Цикл фізичного біоритму триває 23 дні, емоційного — 28 днів, інтелектуального — 33 дні.

Цю теорію поки що не підтверджено експериментально.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- зростаюча функція
- спадна функція
- найбільше значення функції
- найменше значення функції

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Графіки читаємо зліва направо.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Означення 1. Функцію називають **зростаючою на деякому проміжку I**, якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з цього проміжку, таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення 2. Функцію називають **спадною на деякому проміжку I**, якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з цього проміжку, таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Інакше кажучи, на деякому проміжку:

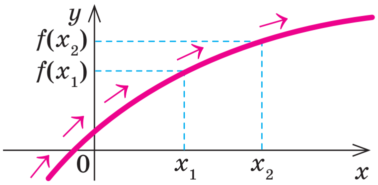
- функція зростає, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції;
- функція спадає, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

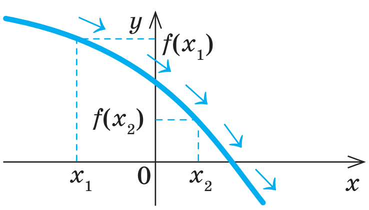
Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Графічна інтерпретація означення 1



Графічна інтерпретація означення 2



Функції також можуть бути ні зростаючими, ні спадними. Наприклад, на рис. 2 подано графік такої функції. На всій області її визначення є проміжки і зростання, і спадання. Записують: $f(x)\uparrow$ при $x\in[-2;1]$, $x\in[5;+\infty)$; $f(x)\downarrow$ при $x\in(-\infty;-2]$, $x\in[1;5]$.

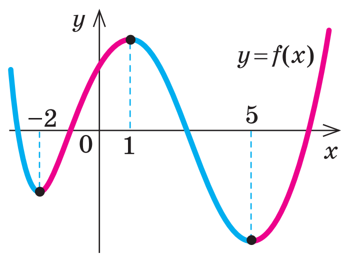
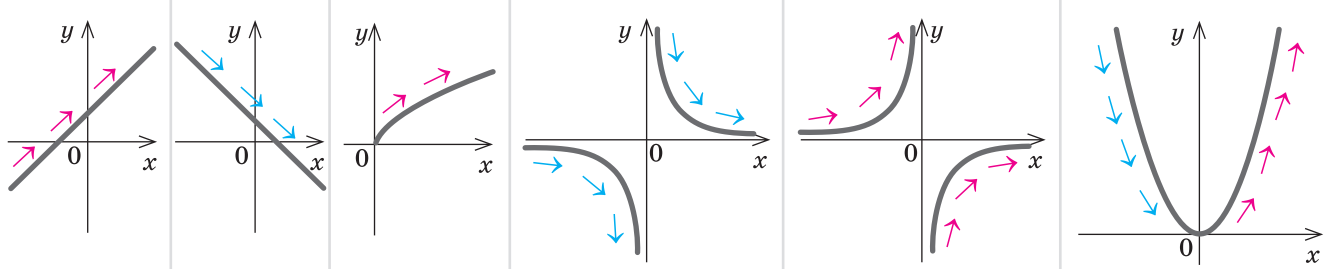


Рис. 2

Візуально, читаючи графік зліва направо, розпізнають проміжки зростання та спадання функції за умовами «графік йде вгору» або «графік йде вниз».

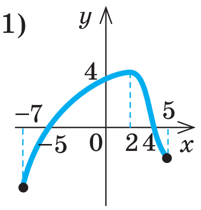
Розглянемо окремі випадки зростання (спадання) функцій.

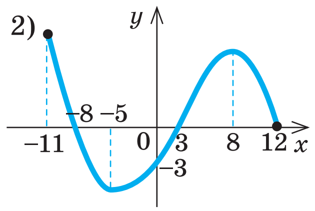
$y=kx+b$		$y=\sqrt{x}$	$y=\dfrac{k}{x}$		$y=x^2$
$k>0$	$k<0$		$k>0$	$k<0$	
$y\uparrow$ на $\boldsymbol{R}$	$y\downarrow$ на $\boldsymbol{R}$	$y\uparrow$ при $x\in[0;+\infty)$	$y\downarrow$ при $x\in(-\infty;0)$ та при $x\in(0;+\infty)$	$y\uparrow$ при $x\in(-\infty;0)$ та при $x\in(0;+\infty)$	$y\downarrow$ при $x\in(-\infty;0]$; $y\uparrow$ при $x\in[0;+\infty)$

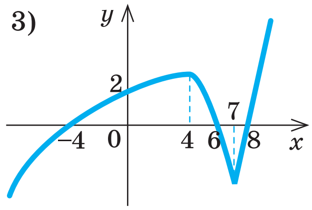


РОЗМИНКА 1

Визначте проміжки зростання та спадання функції за її графіком:

1)


2)


3)


СЛІД ЗНАТИ!

Під час запису проміжків зростання (спадання) функції необхідно пам'ятати таке: якщо кінці проміжку належать області визначення функції, то їх можна включити у проміжок (використовуючи квадратні дужки).

Для доведення зростання або спадання функції на проміжку зазвичай діють за алгоритмом.

АЛГОРИТМ

Алгоритм доведення зростання (спадання) функції $y=f(x)$ на певному проміжку I

1. Вибрати x_1 і x_2 з проміжку I, такі що $x_2>x_1$.
2. Знайти значення функції $y=f(x)$ у вибраних точках $y_1=f(x_1)$ і $y_2=f(x_2)$.
3. Записати різницю y_2-y_1 і спростити отриманий вираз.
4. Визначити знак різниці y_2-y_1.
5. Зробити висновок на основі означення:

$$\begin{cases} x_1, x_2\in I, \\ x_2>x_1, \\ f(x_2)>f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x)\uparrow \text{ на } I \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1, x_2\in I, \\ x_2>x_1, \\ f(x_2)<f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x)\downarrow \text{ на } I.$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вибираючи з проміжку I значення x_1 і x_2, можна накладати умову $x_2<x_1$. Тоді, якщо $y_2<y_1$, то функція зростає на I, якщо $y_2>y_1$, то функція спадає на I.

Доведемо, що функція $y=kx+b$:

1) є зростаючою на $\boldsymbol{R}$ при $k>0$; 2) є спадною на $\boldsymbol{R}$ при $k<0$.

Доведення

Доведемо першу частину твердження (випадок $k>0$).

1. Виберемо точки x_1 і x_2 з області визначення функції, такі що $x_2>x_1$.
2. Для $x_1, x_2\in \boldsymbol{R}$ маємо: $y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$.
3. Тоді $y_2-y_1=kx_2+b-(kx_1+b)=kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)$.
4. Якщо $x_2>x_1$, то $x_2-x_1>0$; оскільки $k>0$, то $y_2-y_1>0$, тобто $y_2>y_1$.
5. Отже, для $x_2>x_1$ маємо: $y_2>y_1$. Тоді за означенням функція $y=kx+b$ є зростаючою на $\boldsymbol{R}$, що й треба було довести.

Аналогічно доводять другу частину твердження. Спробуйте довести її самостійно.

ПОМІРКУЙТЕ

Функція $y=f(x)$ зростаюча. Якою (зростаючою або спадною) буде функція:

1) $y=5f(x)$; 3) $y=\frac{1}{7}f(x)$;

2) $y=-5f(x)$; 4) $y=-\frac{1}{7}f(x)$?

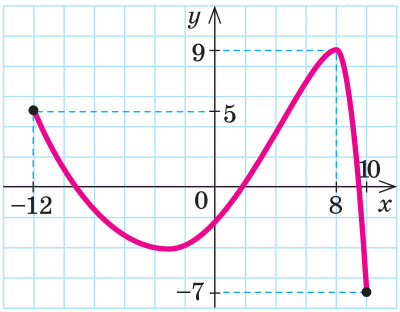


Рис. 3

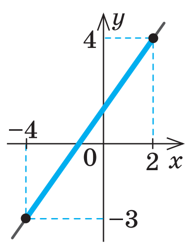
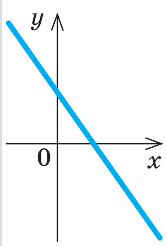
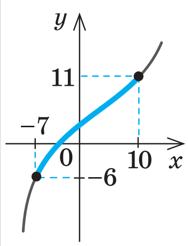
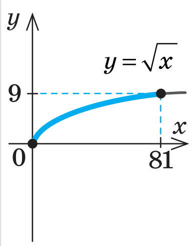
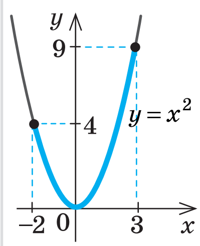
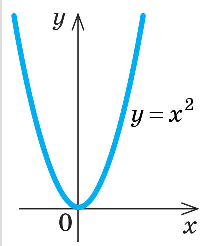
НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Проаналізуємо графік функції $y=f(x)$, поданий на рис. 3.

Область визначення цієї функції — проміжок $[-12;10]$, область значень функції — проміжок $[-7;9]$. Говорять, що число 9 $(f(8)=9)$ є **найбільшим** значенням, а число −7 $(f(10)=-7)$ є **найменшим** значенням функції $f(x)$ на проміжку $[-12;10]$.

У наступних класах ви дізнаєтеся, як знаходити найбільше та найменше значення функції на проміжку. Наразі, шукаючи ці значення, будемо орієнтуватися на область значень функції та значення функції на кінцях проміжку.

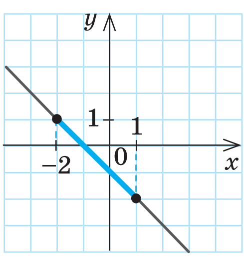
Розглянемо приклади визначення за графіком найбільшого та найменшого значень функції на заданому проміжку.

Значення функції на заданому проміжку	Графік функції, заданий проміжок					
	 $x\in[-4;2]$	 $x\in(-\infty;+\infty)$	 $x\in[-7;10]$	 $x\in[0;81]$	 $x\in[-2;3]$	 $x\in(-\infty;+\infty)$
найбільше	4	не існує	11	9	9	не існує
найменше	−3	не існує	−6	0	0	0

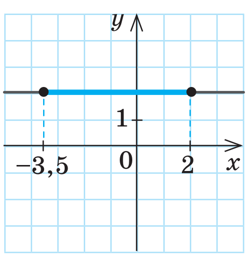
РОЗМИНКА 2

Користуючись графіком, укажіть найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку:

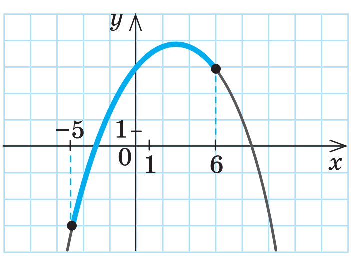
1) $[-2;1]$;



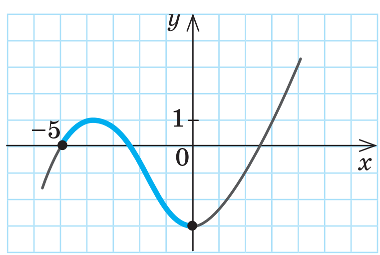
2) $[-3{,}5;2]$;



3) $[-5;6]$;



4) $[-5;0]$.



ПРИКЛАД 1

Користуючись графіком функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-13;12]$ (рис. 4), знайдіть:

а) проміжки зростання та проміжки спадання цієї функції;

б) найбільше та найменше значення функції на проміжку:

1) $[-13;-3]$; 2) $[-13;12]$; 3) $[6;9]$.

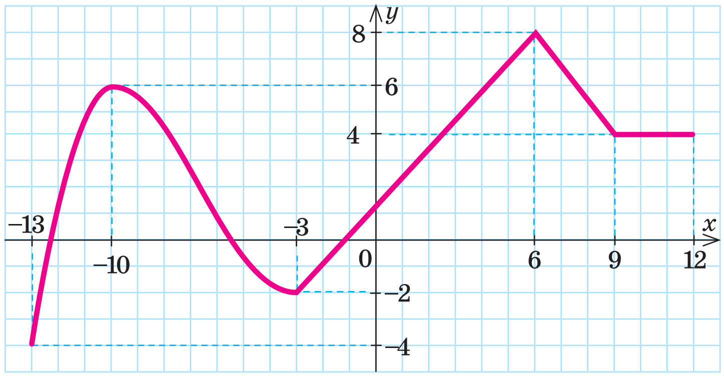


Рис. 4

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
а) КРОК 1	Визначимо проміжки, на яких функція зростає (тобто на яких графік «йде» вгору).	Проміжки зростання функції: $y\uparrow$ при $x\in[-13;-10]$, $x\in[-3;6]$
КРОК 2	Визначимо проміжки, на яких функція спадає (тобто на яких графік «йде» вниз).	Проміжки спадання функції: $y\downarrow$ при $x\in[-10;-3]$, $x\in[6;9]$
б) КРОК 1	Знайдемо найбільше та найменше значення функції на проміжку $[-13;-3]$.	Найбільше значення 6; найменше значення -4
КРОК 2	Знайдемо найбільше та найменше значення функції на проміжку $[-13;12]$.	Найбільше значення 8; найменше значення -4
КРОК 3	Знайдемо найбільше та найменше значення функції на проміжку $[6;9]$.	Найбільше значення 8; найменше значення 4
	Зверніть увагу: на проміжку $[9;12]$ функція набуває сталого значення $y=4$, тому на цьому проміжку функція ні зростає, ні спадає.	

Відповідь: а) функція зростає при $x\in[-13;-10]$ і при $x\in[-3;6]$, спадає при $x\in[-10;-3]$ і при $x\in[6;9]$; б) значення функції: 1) найбільше 6, найменше -4; 2) найбільше 8, найменше -4; 3) найбільше 8, найменше 4.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Користуючись графіком функції $y=f(x)$ (рис. 5), знайдіть її найменше та найбільше значення на проміжку:

1) $[1;3]$; 3) $[0;1]$; 5) $[-4;1]$; 7) $[-3;4]$;

2) $[4;6]$; 4) $[6;9]$; 6) $[4;8]$; 8) $[-4;10]$.

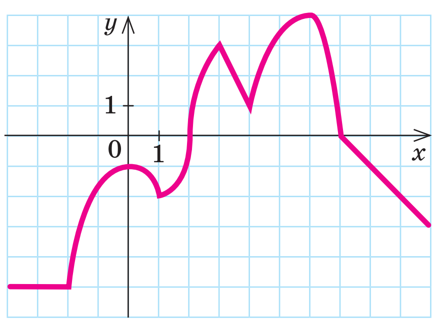


Рис. 5

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що функція $y(x)=\dfrac{2}{x-3}$ спадає на проміжку $(-\infty;3)$.

Доведення

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зазначимо, що проміжок $(-\infty;3)$ входить в область визначення заданої функції.	$D(y)$: $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$
КРОК 2	За означенням $y(x)$ спадає на проміжку I, якщо для x_1 і x_2 з проміжку I виконується умова: якщо $x_2>x_1$, то $y(x_2)<y(x_1)$.	Оберемо x_1 і x_2 з проміжку $(-\infty;3)$ такі, що $x_2>x_1$
КРОК 3	Знайдемо $y(x_1)$ і $y(x_2)$.	$y(x_1)=\dfrac{2}{x_1-3}$; $y(x_2)=\dfrac{2}{x_2-3}$
КРОК 4	Запишемо різницю $y(x_2)-y(x_1)$ та перетворимо отриманий вираз.	$y(x_2)-y(x_1)=\dfrac{2}{x_2-3}-\dfrac{2}{x_1-3}=$ $=\dfrac{2(x_1-3)-2(x_2-3)}{(x_2-3)(x_1-3)}=\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_2-3)(x_1-3)}$
КРОК 5	Проаналізуємо знаки виразів у чисельнику й знаменнику та з'ясуємо знак отриманого дробу.	1) $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-x_2<0$; 2) $x_1,\ x_2\in(-\infty;3) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1-3<0$ і $x_2-3<0$. Таким чином, $(x_2-3)(x_1-3)>0$. Отже, $\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_2-3)(x_1-3)}<0$. Маємо: $y(x_2)-y(x_1)<0 \Rightarrow y(x_2)<y(x_1)$
КРОК 6	Зробимо висновок.	$x_2>x_1$ за умовою, $y(x_2)<y(x_1)$ за доведеним, отже, задана функція спадає при $x\in(-\infty;3)$. Твердження доведено

Алгоритм доведення зростання (спадання) функції $y=f(x)$ на певному проміжку — с. 119.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Доведіть, що функція $y(x)$ зростає на заданому проміжку:

1) $y=4x-1$, $(-\infty;+\infty)$;
2) $y=\dfrac{2}{1-x}$, $(-\infty;1)$;
3) $y=6x^2$, $[0;+\infty)$;
4) $y=x^2+6x$, $[-3;+\infty)$.

Доведіть, що функція $y(x)$ спадає на заданому проміжку:

5) $y=-3x+2$, $(-\infty;+\infty)$;
6) $y=\dfrac{1}{x+2}$, $(-2;+\infty)$;
7) $y=-2x^2$, $[0;+\infty)$;
8) $y=4x-x^2$, $[2;+\infty)$.

ПРИКЛАД 3

На рис. 6 зображено графік зміни температури T повітря (у °C) протягом перших 10 днів листопада. Значення температури, які спостерігалися щодня о 12:00, позначено точками, сполученими плавною кривою.

Користуючись графіком, дайте відповіді на запитання.

1) Якою була температура повітря 3 листопада?
2) Якою була найвища температура повітря протягом 10 днів? У який день вона спостерігалася?
3) Якою була найнижча температура повітря протягом 10 днів? У який день вона спостерігалася?
4) Укажіть проміжки часу (у днях), протягом яких температура повітря:

   а) знижувалася; б) підвищувалася.

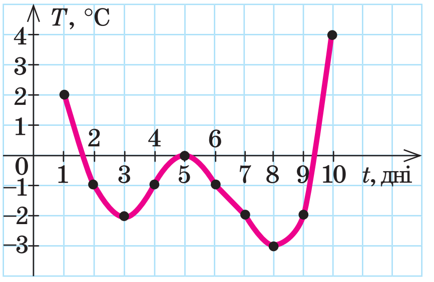


Рис. 6

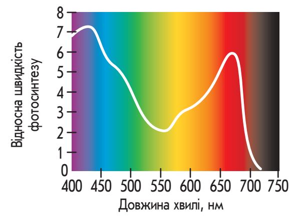
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Визначимо за графіком, якою була температура повітря 3 листопада.	-2 °C
2) КРОК 1	Знайдемо область значень функції — її межі й будуть найбільшим та найменшим значеннями функції $T(t)$. Для цього визначимо проекцію графіка на вісь ординат.	$E(T)$: $[-3; 4]$
КРОК 2	Знайдемо найбільше значення функції $T(t)$ на проміжку $[0; 10]$.	$T = 4$ при $t = 10$, тобто найвища температура 4 °C спостерігалася 10 листопада
3) КРОК 1	Знайдемо найменше значення функції $T(t)$ на проміжку $[0; 10]$.	$T = -3$ при $t = 8$, тобто найнижча температура -3 °C спостерігалася 8 листопада
4) КРОК 1	Визначимо проміжки часу, коли спостерігалося зниження температури (тобто проміжки, на яких функція спадає).	$T\downarrow$ при $t \in [1; 3]$ і при $t \in [5; 8]$, тобто зниження температури відбувалося з 1 по 3 і з 5 по 8 листопада
КРОК 2	Визначимо проміжки часу, коли спостерігалося підвищення температури (тобто проміжки, на яких функція зростає).	$T\uparrow$ при $t \in [3; 5]$ і при $t \in [8; 10]$, тобто підвищення температури відбувалося з 3 по 5 і з 8 по 10 листопада

Відповідь: 1) -2 °C; 2) 4 °C, 10 листопада; 3) -3 °C, 8 листопада; 4) при $t \in [1; 3]$ і при $t \in [5; 8]$; 5) при $t \in [3; 5]$ і при $t \in [8; 10]$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Функції у природі

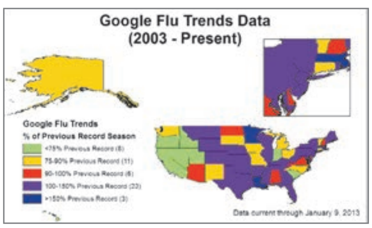


Функцією є залежність інтенсивності фотосинтезу від спектрального складу світла. За її графіком можна визначити, при яких значеннях довжини світлової хвилі швидкість виділення кисню зеленим листом зростає.

Функції в економіці

Функцією є залежність ціни акцій компанії від часу. За її графіком можна визначити найбільшу та найменшу ціни акцій.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Сервіс Google Flu Trends — спроба створити інструмент, який на основі аналізу пошукових запитів, пов'язаних із вірусом грипу, може моделювати й прогнозувати його поширення в різних країнах. Наразі сервіс працює в довідковому режимі. Пошук методів обробки таких великих масивів даних продовжується.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 На рис. 7 зображено графік, що ілюструє залежність обсягу споживання гарячої води (у л/год) протягом однієї доби в певному житловому будинку від часу (у год).

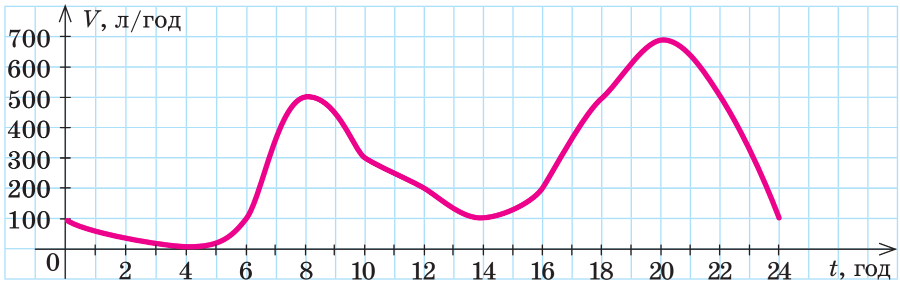


Рис. 7

1) Яке значення обсягу споживання гарячої води (у л/год) спостерігалось о 16:00?
2) Яким був найбільший обсяг споживання гарячої води (у л/год) протягом доби? О котрій годині це спостерігалось?
3) Яким був найменший обсяг споживання гарячої води (у л/год) протягом доби? О котрій годині це спостерігалось?
4) Укажіть проміжки часу (у год), протягом яких обсяг споживання гарячої води збільшувався.

4 На рис. 8 точками позначено щомісячну кількість запитів у пошуковій системі Google від користувачів певної країни щодо методів профілактики та лікування грипу (у відсотках від загальної кількості інтернет-користувачів цієї країни).

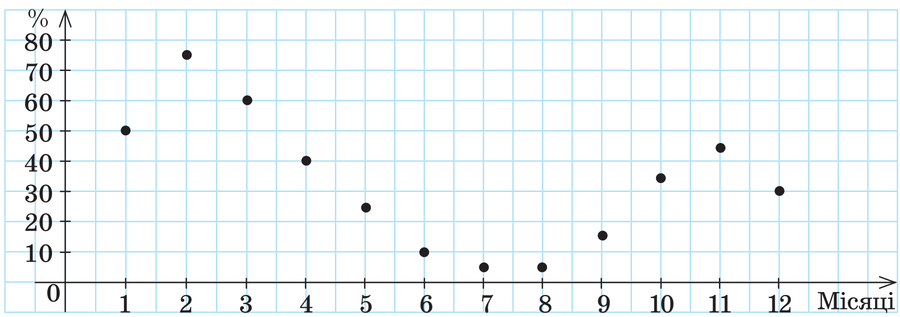


Рис. 8

1) Який відсоток користувачів зафіксовано пошуковою системою в листопаді?
2) Якою була максимальна кількість запитів (у %) у пошуковій системі протягом року? У якому місяці це було зафіксовано?
3) Якою була мінімальна кількість запитів (у %) у пошуковій системі протягом року? У якому місяці це було зафіксовано?
4) Якщо кількість запитів перевищує 60 %, то розглядається питання про запровадження карантину в навчальних закладах. У яких місяцях порушувалося це питання?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть значення m, при яких функція:

1) $y=2mx$ є зростаючою;
3) $y=-5mx+4$ є зростаючою;
2) $y=(m-1)x$ є спадною;
4) $y=9+\frac{1}{2}mx$ є зростаючою;
5) $y=(2m+6)x-13$ є зростаючою;
6) $y=4mx-5-m+x$ є спадною.

2 Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases}-x-3, & x<-5,\\ -\frac{2}{5}x, & -5\leqslant x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$
2) $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{x}, & x<-1,\\ 3, & -1\leqslant x<3,\\ \frac{9}{x}, & x\geqslant 3.\end{cases}$

Користуючись графіком, укажіть нулі функції, проміжки її знакосталості, проміжки зростання та спадання, найбільше та найменше значення функції.

3 Накресліть графік функції, якщо:

1) функція визначена на проміжку $[-6;3]$, її нулями є числа -6, 0, 2; функція зростає на проміжках $[-6;-2]$ і $[1;3]$, спадає на проміжку $[-2;1]$;
2) область визначення функції $[-7;13]$; її нулями є числа -7, -5, 13; проміжки спадання $[-7;0]$, $[9;13]$, проміжок зростання $[0;9]$; $y(9)=15$ — найбільше значення, $y(0)=-4$ — найменше значення функції.

4 **Задача «Телевізійний маркетинг».** Із метою впровадження телевізійного маркетингу було проведено дослідження. На рис. 9 наведено графіки, що відображають зміну кількості глядачів (у $\%$) двох рейтингових телеканалів A і B протягом вечірнього часу з 20:00 до 22:00.

1) Скільки глядачів (у $\%$) дивилися телеканал A о 20:00?
2) Скільки глядачів (у $\%$) дивилися телеканал B о 21:40?
3) О котрій годині кількість глядачів, які дивилися телеканал A, була найбільшою? Якою саме?
4) О котрій годині кількість глядачів, які дивилися телеканал B, була найменшою? Якою саме?
5) Як змінювалася (збільшувалася чи зменшувалася) кількість глядачів, які з 20:40 до 21:40 дивилися: а) телеканал A; б) телеканал B?
6) Телеканал B транслював соціальну рекламу в той час, коли кількість глядачів перевищувала 80%. У який проміжок часу це відбувалося?

ПРИГАДАЙТЕ!
Лінійна функція $y=kx+b$ є зростаючою на $\boldsymbol{R}$ при $k>0$, є спадною на $\boldsymbol{R}$ при $k<0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?
Netflix — компанія, що використовує інтернет-сервіси для доставки глядачеві відео на вимогу на основі потокового мультимедіа. Система Netflix використовує великий масив статистичних даних.

Шукаючи способи підвищити ефективність прогнозування глядацької оцінки фільмів, компанія оголосила у 2006 р. конкурс із призовим фондом в 1 млн доларів на розробку такого механізму. Переможцем у 2009 р. стала команда із 7 осіб, до складу якої ввійшли математики, статистики та програмісти із різних країн світу.

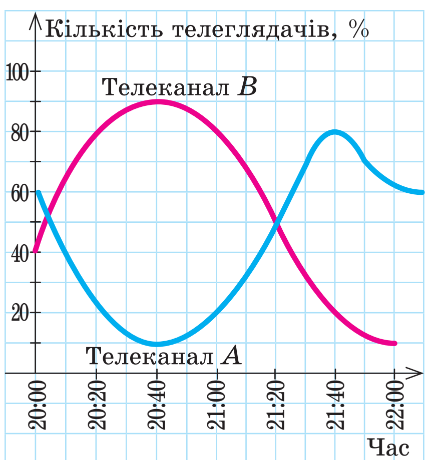


Рис. 9

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Функція $y=f(x)$, яку задано графічно (рис. 10), визначена на проміжку $[-4;10]$.

1 За рис. 10 знайдіть найбільше значення функції $y=f(x)$ на проміжку $[0;3]$.

А	Б	В	Г
-2	3	6	8

2 За рис. 10 знайдіть найменше значення функції $y=f(x)$ на проміжку $[6;10]$.

А	Б	В	Г
-2	2	3	8

3 За рис. 10 знайдіть найбільше значення функції $y=f(x)$ на області її визначення.

А	Б	В	Г
5	6	8	10

4 За рис. 10 знайдіть найменше значення функції $y=f(x)$ на області її визначення.

А	Б	В	Г
-2	2	3	-4

5 Серед поданих проміжків виберіть такий, на якому функція $y=f(x)$ (рис. 10) зростає.

А	Б	В	Г
$[-4;0]$	$[0;8]$	$[8;10]$	$[3;6]$

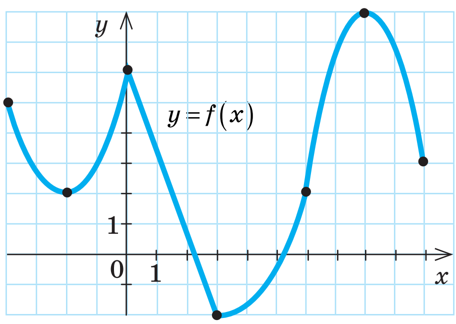


Рис. 10

6 Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Функція $y=2-x$
2	Функція $y=x-2$
3	Функція $y=2$
А	не має нулів.
Б	спадає на проміжку $(-\infty;+\infty)$.
В	має два нулі.
Г	зростає на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

7 На рис. 11 зображено графік зміни температури T повітря (у °С) протягом однієї доби.

1) Якою була найвища температура повітря протягом цієї доби? О котрій годині вона спостерігалася?
2) У приміщенні встановлено кондиціонер. Він автоматично вмикається, як тільки температура повітря на вулиці перевищує 25 °С, та вимикається, якщо температура повітря на вулиці стає нижчою від 25 °С. Визначте проміжок часу, протягом якого кондиціонер працював.

8 Доведіть, що функція $y=\dfrac{1}{x-1}$ спадає на проміжку $(1;+\infty)$.

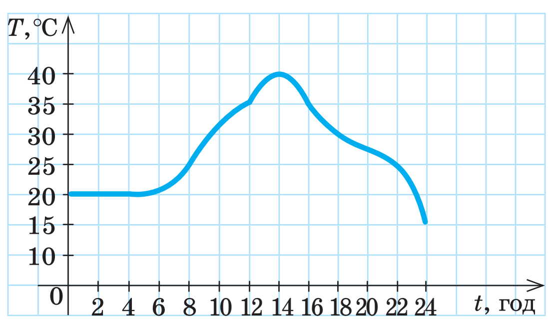


Рис. 11

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо функція $y=f(x)$ спадає на проміжку $(0;5)$, то $f(1)<f(4)$.
2) Якщо функція $y=f(x)$ зростає на проміжку $(-5;-1)$ і $f(-4)>0$, то $f(-2)>0$.
3) Якщо $E(f)=[-4;7]$, то найбільше значення функції $y=f(x)$ дорівнює 7.
4) Якщо найменше значення функції $y=f(x)$ дорівнює 2 на проміжку $[-3;3]$ і $f(0)=2$, то $f(3)>2$.
5) Якщо $f(1)<f(3)$, то функція $y=f(x)$ зростає на проміжку $[1;3]$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ГОНОЧНИЙ АВТОМОБІЛЬ»

Гоночний автомобіль, рухаючись кільцевою трасою, на якій немає підйомів та спусків, проїхав кілька кіл. Для другого кола побудовано графік залежності швидкості автомобіля від відстані, пройденої від лінії старту (рис. 12).

1 Якою була найбільша швидкість автомобіля під час проходження другого кола?

2 На якій відстані від початкової точки кола швидкість автомобіля була найменшою? Якою була ця швидкість?

3 Як змінювалася швидкість автомобіля на проміжку траси [2,5; 2,75]? Якою була найменша швидкість на цьому проміжку?

4 Укажіть проміжки траси (у км), на яких швидкість автомобіля: 1) зменшувалася; 2) збільшувалася; 3) залишалася сталою.

5 Який вигляд мала траса (рис. 13, А–Д), по якій рухався автомобіль (точка S — лінія старту)? Зверніть увагу: водій перед поворотом завжди зменшує швидкість автомобіля.

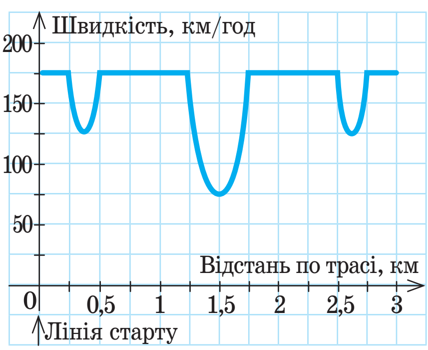


Рис. 12

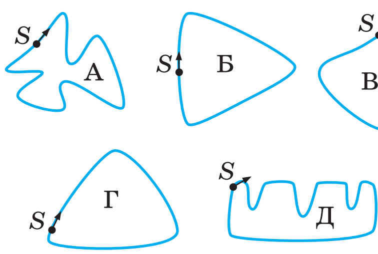


Рис. 13

Ларрі (Лоуренс) Пейдж (*Larry Lawrence Page*; нар. 1973) і Сергій Брін (*Sergey Brin*; нар. 1973) — американські підприємці та науковці в галузі обчислювальної техніки та інформаційних технологій, розробники найвідомішої пошукової системи і співзасновники компанії «Google».

Назва Google походить від математичного терміна «гугол» (googol) — число, десятковий запис якого містить одиницю і 100 нулів.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Болід «Формули-1» складається з 80 000 деталей.
- Болід може розвивати швидкість від 0 до 160 км/год за 4 с.
- На кермі розташовано понад 20 кнопок, що регулюють швидкість, радіозв'язок тощо.
- За регламентом у «Формулі-1» можуть брати участь жінки. Цим правом скористалися 5 жінок-гонщиць.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Користуючись графіком функції $y=f(x)$ (рис. 14), знайдіть її найменше та найбільше значення на проміжку:

1) $[-2;0]$; 3) $[-3;-2]$; 5) $[-3;0]$; 7) $[-3;6]$;
2) $[8;10]$; 4) $[3;4]$; 6) $[6;8]$; 8) $[-3;10]$.

Див. приклад 2

2 Доведіть, що функція:

1) $y=2x+3$ зростає на проміжку $(-\infty;+\infty)$;
2) $y=\dfrac{3}{x-5}$ спадає на проміжку $(5;+\infty)$;
3) $y=3x^2$ спадає на проміжку $(-\infty;0]$;
4) $y=x^2+8x$ зростає на проміжку $[-4;+\infty)$.

Див. приклад 3

3 На рис. 15 зображено графік залежності відносної вологості повітря (у %) в певній місцевості протягом 12 год від часу.

1) Якою була відносна вологість повітря (у %) о 8:00?
2) Якою була найбільша відносна вологість повітря (у %) протягом 12 год? О котрій годині це спостерігалося?
3) Якою була найменша відносна вологість повітря (у %) протягом 12 год? О котрій годині це спостерігалося?
4) Визначте проміжки часу (у год), протягом яких відносна вологість повітря збільшувалася.

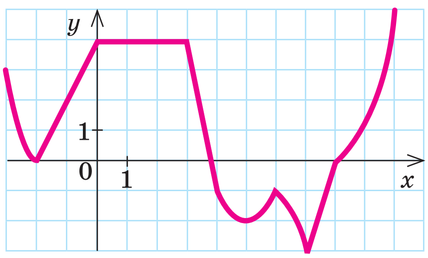


Рис. 14

4 На рис. 16 точками позначено ціну (у грн) 1 кг лимонів у певному супермаркеті протягом одного тижня (понеділок — неділя). Для наочності точки сполучено відрізками.

1) Скільки коштував 1 кг лимонів у неділю?
2) У який день тижня ціна 1 кг лимонів була найбільшою? Визначте цю ціну.
3) У який день тижня ціна 1 кг лимонів була найменшою? Визначте цю ціну.
4) У який день ціна 1 кг лимонів змінилася найбільше порівняно з попереднім днем?

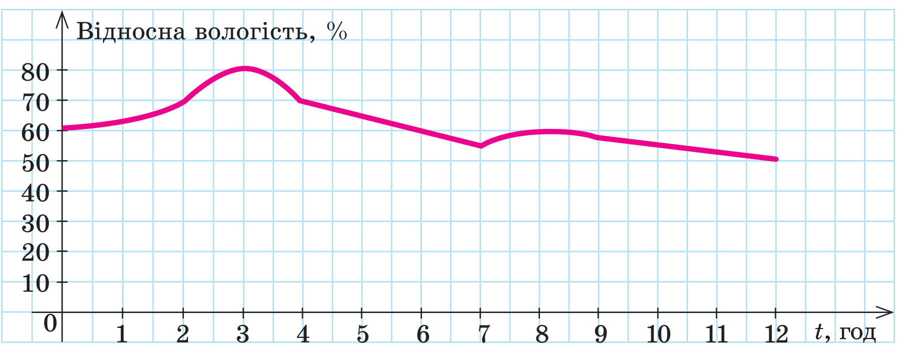


Рис. 15

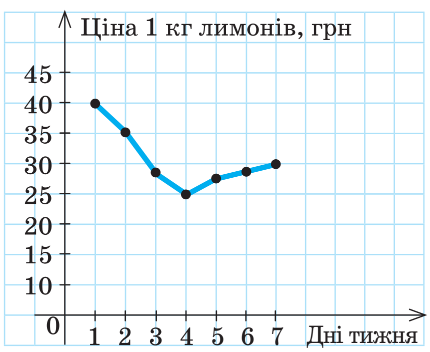


Рис. 16

5 На рис. 17 зображено графік зміни температури T (у °C) морської води біля узбережжя протягом перших 10 днів серпня. Значення температури, які спостерігалися щодня о 12:00, позначено точками.

1) Якою була температура води 8 серпня?
2) Якою була найбільша температура води протягом 10 днів? У який день вона спостерігалася?
3) Якою була найменша температура води протягом 10 днів? У який день вона спостерігалася?
4) Олена не купається в морі, якщо температура води менша від 18 °C. У які дні дівчина не купалася?

Бонусні завдання

6 Визначте найбільше ціле значення змінної m, при якому функція $y=(5m-11)x+3$ спадає.

7 Визначте найменше ціле значення зміної n, при якому функція $y=(7-2n)x-1$ спадає.

8 Відомий американський математик Стівен Строгац у своїй книжці «Задоволення від x. Захоплююча подорож у світ математики від одного з найкращих викладачів у світі» наводить цікаві приклади для пояснення математичних ідей. Один із них — ілюстрація за допомогою графіків посилення й послаблення почуттів Ромео і Джульєтти (рис. 18). (Зауважимо, що автор дещо змінив характер їх взаємин.)
Спробуйте проаналізувати зміну відносин цієї пари в різні періоди часу, використовуючи знання про властивості функцій.

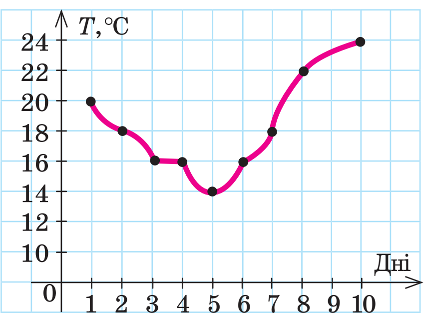


Рис. 17

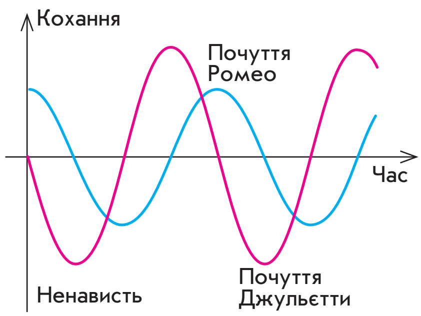
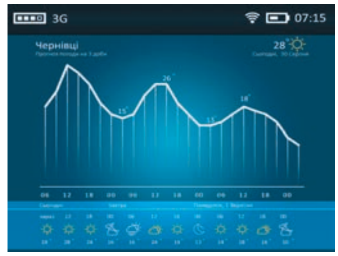


Рис. 18

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ



Основні завдання метеоролога:
- збір, оцінка, систематизація, аналіз, обробка даних атмосферних явищ;
- складання прогнозів динаміки температури повітря, атмосферного тиску, опадів тощо;
- контроль рівня забрудненості атмосфери.

TO BE SMART

Дізнатися багато цікавого про історію розвитку Google можна:
- прочитавши книжку Д. А. Вайза та М. Малсіда «Google. Прорив у дусі часу» («The Google Story: Inside the Hottest Business, Media, and Technology Success of Our Time»);
- переглянувши фільми «Погляд зсередини: Google»(«Inside: Google», 2010) та «Google і всесвітній мозок» («Google and the World Brain», 2013).

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Побудуйте графік функції, знайдіть її область визначення та область значень, якщо функцію задано формулою:

1) $y=x$; 3) $y=x^2$; 5) $y=\frac{1}{x}$; 7) $y=\sqrt{x}$;

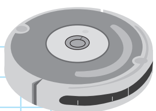
2) $y=-x$; 4) $y=-x^2$; 6) $y=-\frac{1}{x}$; 8) $y=-\sqrt{x}$.

«Щоб зробити щось важливе, потрібно подолати страх провалу.»

Ларрі Пейдж

§ 11 ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ $f(x)\to f(x)+a$; $f(x)\to f(x+a)$; $f(x)\to k\cdot f(x)$

ВЧОРА	Ви навчилися будувати графіки елементарних функцій і досліджувати їх властивості
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, як будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень
ЗАВЖДИ	Ви зможете вносити корективи в траєкторії руху різних пристроїв (роботів, квадрокоптерів тощо), прокладати на карті туристичні маршрути



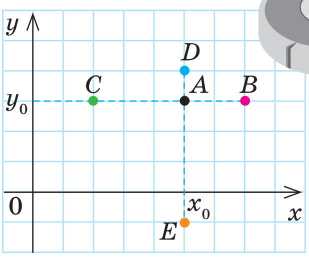


Рис. 1

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Керування роботом-порохотягом можна здійснювати дистанційно. Нехай зараз порохотяг розташований у точці $A(x_0; y_0)$ прямокутної системи координат xOy (рис. 1). За допомогою джойстика можна примусити його рухатися вздовж осі Ox управо чи вліво або вздовж осі Oy вгору чи вниз. Наприклад, робот-порохотяг може переміститися з точки A в точку:

1) B, яка розташована на 2 одиниці праворуч від точки A;
2) C, яка розташована на 3 одиниці ліворуч від точки A;
3) D, яка розташована на 1 одиницю вище за точку A;
4) E, яка розташована на 4 одиниці нижче від точки A.

Як змінюватимуться координати порохотяга в кожному випадку?

Коментар до розв'язання

Під час руху вправо вздовж осі Ox абсциса буде збільшуватися і в точці B стане більшою на 2 одиниці, тобто дорівнюватиме x_0+2. А внаслідок руху вліво на 3 одиниці (у точку C) абсциса становитиме x_0-3. При цьому під час кожного з цих переміщень ордината залишиться незмінною.

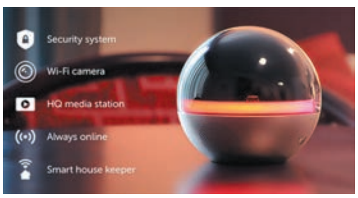
Аналогічно, якщо рух відбуватиметься з точки A вздовж осі Oy вгору до точки D або вниз до точки E, абсциса не зміниться, а ордината дорівнюватиме відповідно y_0+1 та y_0-4.

Виникає питання: як під час таких переміщень змінюватимуться абсциси та ординати не однієї точки, а множини точок, наприклад множини точок графіка функції?

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розглянемо, як за допомогою графіка функції $f(x)$ можна побудувати графіки функцій $y=|x|$, $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=k\cdot f(x)$. Графік функції $y=f(x)$, на основі якого будуються інші графіки, будемо називати базовим.

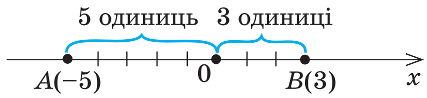
МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ



Робототехнік — професія XXI століття. Спеціалісти в цій галузі займаються створенням та обслуговуванням роботів і мають добре знати механіку, електроніку, програмування. Українські розробники Макс Метц і Микола Богун створили домашнього робота «Branto», що вміє не лише керувати «розумним будинком». Ця «техно-куля», яка обладнана камерою з круговим оглядом, може працювати й сторожем та повідомляти господарів про небезпеку.

ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y=|x|$

З курсу 6 класу ви знаєте, що модуль числа a — відстань (в одиничних відрізках) від початку відліку до точки з координатою a. Це означення розкриває геометричний зміст модуля (рис. 2). Пригадаємо алгебраїчне означення модуля (рис. 3).



$|-5|=5$ $\quad |3|=3$

Рис. 2

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. **Модуль числа** a (або абсолютна величина числа a) дорівнює числу a, якщо a — додатне число або нуль, і числу, протилежному a, якщо a — від'ємне число.

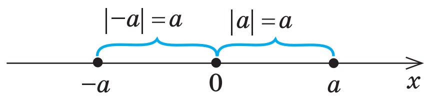


Рис. 3

Побудуємо графік функції $y=|x|$, використовуючи правило розкриття знака модуля:

$$y=|x|=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ якщо } x<0. \end{cases}$$

АЛГОРИТМ

Алгоритм побудови графіка функції $y=|x|$

1. Побудуємо графік функції $y=x$ (рис. 4).
2. При $x\geqslant 0$ маємо $|x|=x$, отже, $y=|x| \to y=x$. Тому розглядаємо тільки ту частину графіка, яка розташована в I координатній чверті (рис. 5).
3. Побудуємо графік функції $y=-x$ (рис. 6).
4. При $x<0$ маємо $|x|=-x$, отже, $y=|x| \to y=-x$. Тому розглядаємо тільки ту частину графіка, яка розташована в II координатній чверті (рис. 7).
5. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y=x$ для $x\geqslant 0$ та $y=-x$ для $x<0$ (рис. 8), тобто об'єднаємо частини графіків, зображених на рис. 5 і 7. Отримана фігура і є графіком функції $y=|x|$.

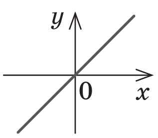


Рис. 4

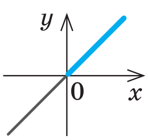


Рис. 5

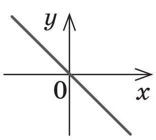


Рис. 6

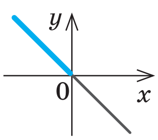


Рис. 7

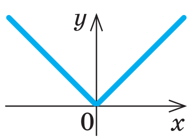


Рис. 8

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Слово «модуль» (від лат. *modulus* — міра) має безліч значень і застосовується не тільки в математиці, а й у фізиці, архітектурі, техніці, програмуванні та інших точних науках.

Термін «модуль» увів англійський математик Роджер Котес, знак модуля — німецький математик Карл Вейєрштрасс.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ $f(x)\to f(x)+a$. ПЕРЕМІЩЕННЯ ВЗДОВЖ ОСІ Oy

Складемо таблицю значень функцій $y=|x|$ та $y=|x|+2$ для однакових значень аргумента x.

x	0	±1	±2	±3	±4
$y=\|x\|$	0	1	2	3	4
$y=\|x\|+2$	$0+2=2$	$1+2=3$	$2+2=4$	$3+2=5$	$4+2=6$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- графік функції
- модуль числа
- паралельне перенесення
- осьова симетрія

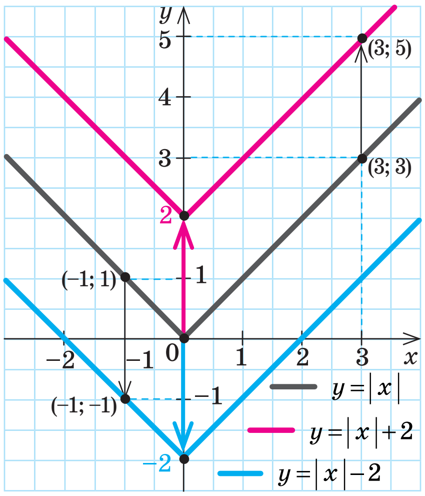


Рис. 9

Побудуємо графіки функцій $y=|x|+2$ і $y=|x|$ та розглянемо останній як базовий.

Очевидно, що кожну точку графіка функції $y=|x|+2$ можна отримати з відповідної точки графіка функції $y=|x|$ шляхом збільшення ординати точки на 2. У цьому випадку говорять, що графік функції $y=|x|+2$ отримано внаслідок паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ на 2 одиниці вгору (рис. 9).

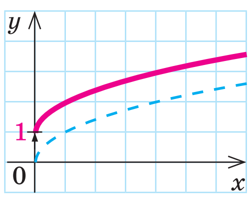
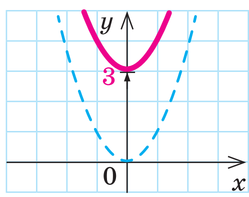
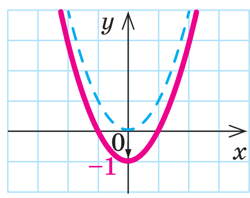
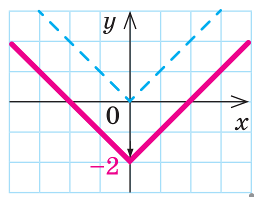
Аналогічно паралельним перенесенням графіка функції $y=|x|$ на 2 одиниці вниз можна отримати графік функції $y=|x|-2$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Щоб побудувати графік функції $y=f(x)+a$, можна застосувати паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$:

1) на a одиниць **угору**, якщо $a>0$;
2) на $|a|$ одиниць **униз**, якщо $a<0$.

У таблиці подано базовий графік (пунктиром) і графік, отриманий унаслідок його паралельного перенесення вздовж осі Oy. Проаналізуйте, як змінюються координати точок графіка функції $y=f(x)$ унаслідок його перетворення в графік функції $y=f(x)+a$ залежно від знака a.

Функція $y=f(x)+a$	$y=\sqrt{x}+1$	$y=x^2+3$	$y=x^2-1$	$y=|x|-2$
Перетворення $f(x)\to f(x)+a$				

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Унаслідок перетворення $f(x)\to f(x)+a$ абсциса кожної точки графіка залишається без змін, а ордината змінюється на a (з урахуванням знака a).

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ якщо } a<0\end{cases}$$

РОЗМИНКА 1

1 Знайдіть координати точки, у яку переміститься точка $A(4;-3)$ графіка функції $y=f(x)$, якщо внаслідок його перетворення отримали графік функції:

1) $y=f(x)+2$; 2) $y=f(x)-3$; 3) $y=f(x)-\frac{1}{3}$; 4) $y=f(x)+\sqrt{7}$.

2 Дано графік функції:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{1}{x}$; 5) $y=|x|$.

Графік якої функції отримаємо, якщо перенесемо заданий графік: а) униз на 3 одиниці; б) угору на 2 одиниці?

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ $f(x) \to f(x+a)$. ПЕРЕМІЩЕННЯ ВЗДОВЖ ОСІ Ox

Покажемо, як із графіка функції $y = x^2$ можна отримати графік функції $y = (x+2)^2$. Висунемо припущення: щоб отримати графік функції $y = (x+2)^2$, графік функції $y = x^2$ слід перенести вліво вздовж осі Ox на 2 одиниці. Доведемо цей факт.

Нехай точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $y_0 = x_0^2$. Доведемо, що точка $A_1(x_0 - 2;\ y_0)$ належить графіку функції $y = (x+2)^2$. Підставимо координати точки A_1 у формулу $y = (x+2)^2$, отримаємо: $y_0 = ((x_0 - 2) + 2)^2$, або $y_0 = x_0^2$, що є правильною рівністю. Таким чином, графік функції $y = (x+2)^2$ проходить через точку $A_1(x_0 - 2;\ y_0)$.

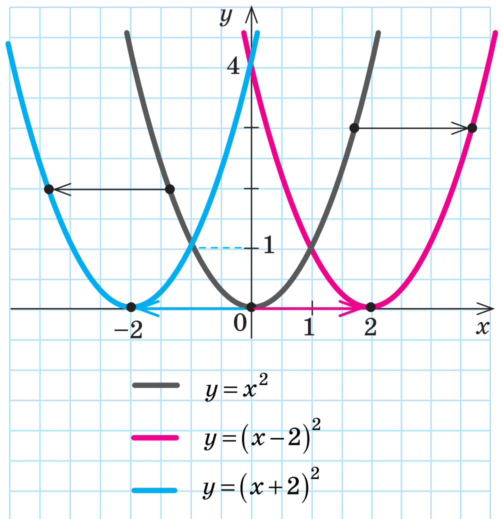


Рис. 10

Отже, всі точки графіка функції $y = (x+2)^2$ можна отримати, якщо кожну точку графіка функції $y = x^2$ замінити точкою з тією самою ординатою та зменшеною на 2 абсцисою.

Говорять, що графік функції $y = (x+2)^2$ можна отримати внаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 2 одиниці вліво (рис. 10). Якщо перенести графік функції $y = x^2$ на 2 одиниці вправо, отримаємо графік функції $y = (x-2)^2$.

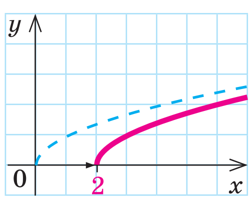
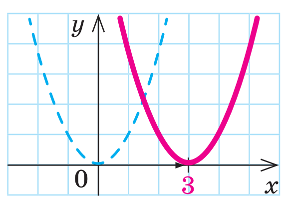
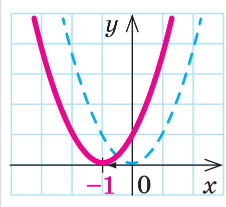
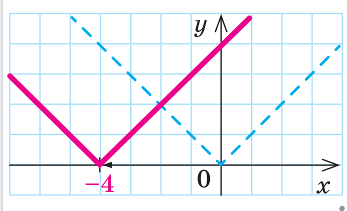
ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Щоб побудувати графік функції $y = f(x+a)$, можна застосувати паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$:
1) на a одиниць **уліво**, якщо $a > 0$;
2) на $|a|$ одиниць **управо**, якщо $a < 0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Для побудови графіка функції $y = f(x+a)$ зручно знайти нулі функції.

У таблиці подано базовий графік (пунктиром) і графік, отриманий унаслідок його паралельного перенесення вздовж осі Ox. Проаналізуйте, як змінюються координати точок графіка функції $y = f(x)$ унаслідок його перетворення в графік функції $y = f(x+a)$ залежно від знака a.

Функція $y = f(x+a)$	$y = \sqrt{x-2}$	$y = (x-3)^2$	$y = (x+1)^2$	$y = \lvert x+4 \rvert$
Перетворення $f(x) \to f(x+a)$				

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Унаслідок перетворення $f(x) \to f(x+a)$ ордината кожної точки графіка залишається без змін, а абсциса змінюється на a (з урахуванням знака a).

x	$y=\sqrt{x}$	$y=2\sqrt{x}$
0	0	$2 \cdot 0 = 0$
1	1	$2 \cdot 1 = 2$
4	2	$2 \cdot 2 = 4$
9	3	$2 \cdot 3 = 6$
16	4	$2 \cdot 4 = 8$

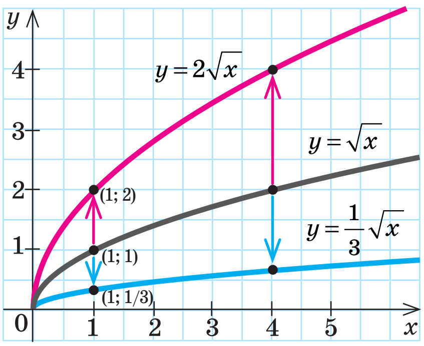


Рис. 11

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

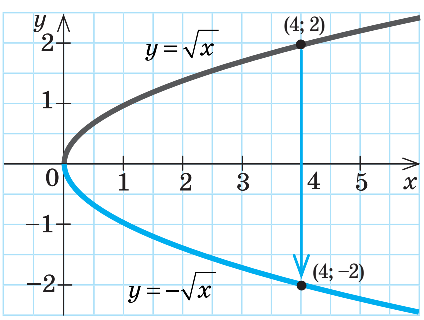


Рис. 12

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть координати точки, у яку переміститься точка $A(-2;1)$ графіка функції $y=f(x)$, якщо внаслідок його перетворення отримали графік функції:

1) $y=f(x+4)$; 2) $y=f(x-5)$; 3) $y=f\left(x+\sqrt{3}\right)$.

2 Дано графік функції:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{1}{x}$; 5) $y=|x|$.

Графік якої функції отримаємо, якщо перенесемо заданий графік: а) уліво на 5 одиниць; б) управо на 7 одиниць?

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ $f(x) \to k \cdot f(x)$

Вам уже відомий графік функції $y=\sqrt{x}$. Побудуємо графік функції $y=2\sqrt{x}$. Складемо таблицю значень функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=2\sqrt{x}$ для однакових значень аргумента x (див. ліворуч).

Бачимо, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y=\sqrt{x}$ відповідає точка $(x_0;\ 2y_0)$ графіка функції $y=2\sqrt{x}$ (рис. 11). Отже, всі точки графіка функції $y=2\sqrt{x}$ можна отримати, збільшивши у 2 рази відповідні ординати графіка функції $y=\sqrt{x}$. Говорять, що графік функції $y=\sqrt{x}$ розтягнули у 2 рази вздовж осі Oy.

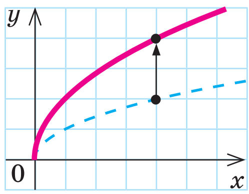
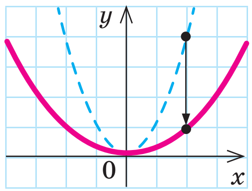
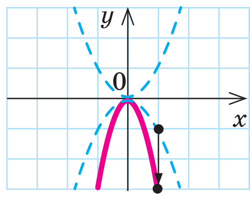
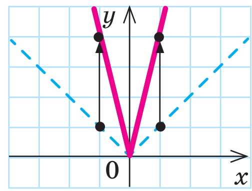
Будуючи аналогічно графік функції $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$, отримаємо, що кожна точка графіка має координати $\left(x_0;\ \frac{1}{3}y_0\right)$. Тобто графік функції $y=\sqrt{x}$ буде стиснутий у 3 рази вздовж осі Oy (рис. 11).

Щоб побудувати графік функції $y=kf(x)$, використовуючи графік функції $y=f(x)$, можна:
1) **розтягнути** графік функції $y=f(x)$ у k разів уздовж осі Oy, якщо $k>1$;
2) **стиснути** графік функції $y=f(x)$ у $\frac{1}{k}$ разів уздовж осі Oy, якщо $0<k<1$.

Зауважимо, що у випадку $k<0$ користуються правилом: щоб побудувати графік функції $y=-f(x)$, можна графік функції $y=f(x)$ симетрично (дзеркально) відобразити відносно осі Ox.

Якщо скласти таблицю значень функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=-\sqrt{x}$ для побудови їх графіків, побачимо, що кожна точка графіка функції $y=-\sqrt{x}$ матиме координати $(x_0; -y_0)$. Тобто графік функції $y=\sqrt{x}$ буде симетрично відображений відносно осі Ox (рис. 12).

У таблиці подано базовий графік (пунктиром) і графік, отриманий унаслідок геометричного перетворення $f(x) \to k \cdot f(x)$. Проаналізуйте, як змінюються координати точок графіка функції $y = f(x)$ унаслідок його перетворення в графік функції $y = k \cdot f(x)$ залежно від значення й знака k.

Функція $y = k \cdot f(x)$	$y = 2\sqrt{x}$	$y = \frac{1}{4}x^2$	$y = -3x^2$	$y = 4\lvert x \rvert$
Перетворення $f(x) \to k \cdot f(x)$				

РОЗМИНКА 3

1 Знайдіть координати точки, у яку переміститься точка $A(1; -12)$ графіка функції $y = f(x)$, якщо внаслідок його перетворення отримали графік функції:

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{4}f(x)$; 3) $y = -6f(x)$; 4) $y = \sqrt{3}f(x)$.

2 При яких a точка $A(a; 36)$ належить графіку функції:

1) $y = -12x$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$; 3) $y = 9\sqrt{x}$; 4) $y = -6\lvert x \rvert$?

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Унаслідок перетворення $f(x) \to k \cdot f(x)$ абсциса кожної точки графіка залишається без змін, а ордината змінюється в k разів.

Правила побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень
$f(x) \to f(x) + a$, $f(x) \to f(x+a)$, $f(x) \to k \cdot f(x)$, $f(x) \to -f(x)$

Функція	Перетворення графіка функції $y = f(x)$	Зміна координат точок графіка
$y = f(x) + a$	**Паралельне перенесення** графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy: на a одиниць угору, якщо $a > 0$; на $\lvert a \rvert$ одиниць униз, якщо $a < 0$	$(x_0; y_0) \to (x_0; y_0 + a)$, x — стала
$y = f(x + a)$	**Паралельне перенесення** графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox: на a одиниць уліво, якщо $a > 0$; на $\lvert a \rvert$ одиниць управо, якщо $a < 0$	$(x_0; y_0) \to (x_0 - a; y_0)$, y — стала
$y = k \cdot f(x)$	**Розтяг** графіка функції $y = f(x)$ у k разів уздовж осі Oy, якщо $k > 1$. **Стиск** графіка функції $y = f(x)$ у $\frac{1}{k}$ разів уздовж осі Oy, якщо $0 < k < 1$	$(x_0; y_0) \to (x_0; k \cdot y_0)$, x — стала
$y = -f(x)$	**Симетричне відображення** графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox	$(x_0; y_0) \to (x_0; -y_0)$, x — стала, y — набуває протилежного значення

У курсі геометрії 9 класу ви детально ознайомитеся з поняттям симетрії. Ми зупинимося лише на візуальному розумінні цього поняття.

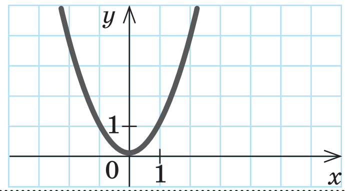
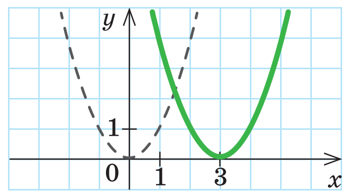
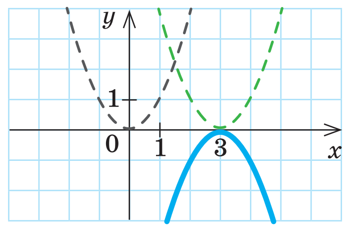
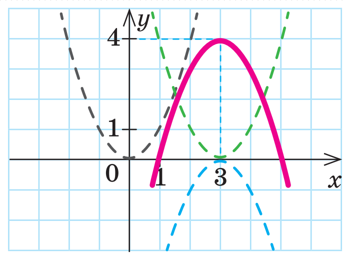
ПРИКЛАД 1

Побудуйте графік функції $y=4-(x-3)^2$.

Розв'язання

План побудови

$$y=x^2 \xrightarrow{\text{на 3 од. вправо}} y=(x-3)^2 \xrightarrow{\text{симетрія відносно } Ox} y=-(x-3)^2 \xrightarrow{\text{на 4 од. вгору}} y=-(x-3)^2+4$$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Побудуємо **базовий** графік — графік функції $y=x^2$. Координати вершини параболи $(0;0)$.	
КРОК 2	Паралельно перенесемо базовий графік на 3 одиниці вправо. Координати вершини параболи $(0;0)\to(3;0)$.	
КРОК 3	Графік, отриманий на кроці 2, відобразимо симетрично відносно осі абсцис. Координати вершини параболи не змінюються.	
КРОК 4	Графік, отриманий на кроці 3, паралельно перенесемо на 4 одиниці вгору. Координати вершини параболи $(3;0)\to(3;4)$. Шуканий графік зображений червоним кольором.	

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Під час побудови параболи зручно відстежувати зміни:
1) координат її вершини;
2) інших «зручних» точок, наприклад точок її перетину з осями координат.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Побудуйте графік функції:

1) $y=(x-1)^2$;
2) $y=(x+2)^2$;
3) $y=-(x-1)^2$;
4) $y=-(x+2)^2$;
5) $y=2-(x-1)^2$;
6) $y=-1-(x+2)^2$;
7) $y=(x^2-4x+4)-3$;
8) $y=1-(x^2+6x+9)$.

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y=\frac{2}{x+2}-1$.

Розв'язання

План побудови

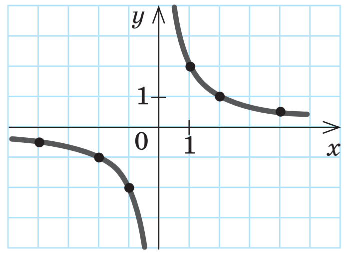
$$y=\frac{2}{x}\xrightarrow{\text{на 2 од. вліво}}y=\frac{2}{x+2}\xrightarrow{\text{на 1 од. вниз}}y=\frac{2}{x+2}-1$$

Крок	Зміст дії	Результат дії

КРОК 1

Побудуємо графік функції $y=\frac{2}{x}$ по точках, використавши таблицю.

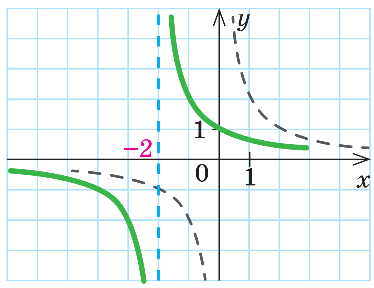
x	-4	-2	-1	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



КРОК 2

Паралельно перенесемо графік функції $y=\frac{2}{x}$ на 2 одиниці вліво.

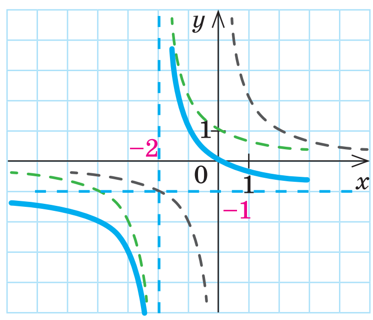
Вертикальна асимптота ($x=0$, тобто вісь Oy) також переноситься на 2 одиниці вліво ($x=-2$).



КРОК 3

Графік, отриманий на кроці 2, паралельно перенесемо на 1 одиницю вниз.

Горизонтальна асимптота ($y=0$, тобто вісь Ox) також переноситься на 1 одиницю вниз ($y=-1$). Шуканий графік зображений синім кольором.



ТРЕНУЄМОСЯ

2 Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{1}{x+2}$;
2) $y=\frac{1}{x-3}$;
3) $y=\frac{1}{x+2}-1$;
4) $y=\frac{1}{x-3}+2$;
5) $y=\frac{2}{x-1}+3$;
6) $y=\frac{2}{x+3}+1$;
7) $y=\frac{1-2(x+1)}{x+1}$;
8) $y=\frac{1+3(x-2)}{x-2}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Правила побудови графіків функцій $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=k\cdot f(x)$, $y=-f(x)$ за допомогою геометричних перетворень — с. 135, 144.

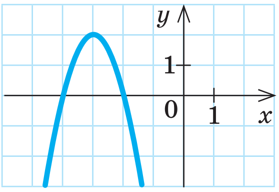


Рис. 13

ПРИКЛАД 3

На рис. 13 зображено графік функції, яку задано формулою виду $y=a(x+m)^2+n$. Знайдіть значення a, m, n та запишіть отриману формулу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Графік проходить через точку $(-3;2)$, яка є вершиною параболи $y=a(x+m)^2+n$.	$(-m;n)$ — вершина параболи, отже, $-m=-3$, $m=3$; $n=2$
КРОК 2	Запишемо формулу $y=a(x+m)^2+n$ для $m=3$ і $n=2$.	$y=a(x+3)^2+2$
КРОК 3	Графік функції $y=a(x+m)^2+n$ проходить через точку $(-2;0)$. Підставимо у формулу $y=a(x+3)^2+2$ значення $x=-2$, $y=0$ та розв'яжемо отримане рівняння відносно a.	$0=a(-2+3)^2+2$; $a=-2$
КРОК 4	Запишемо формулу, якою задано функцію.	$y=-2(x+3)^2+2$

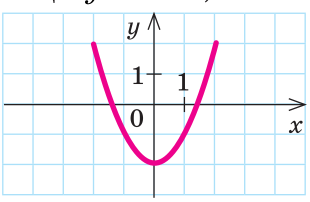
Відповідь: $y=-2(x+3)^2+2$.

Щоб побудувати параболу $y=a(x+m)^2+n$, можна паралельно перенести параболу $y=ax^2$ так, щоб її вершина перемістилася в точку $(-m;n)$.

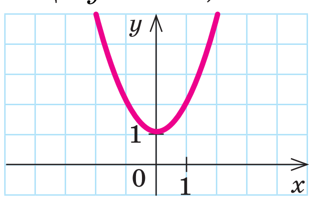
ТРЕНУЄМОСЯ

3 За рисунками, на яких зображено фрагменти графіків функцій $y=f(x)$, знайдіть:

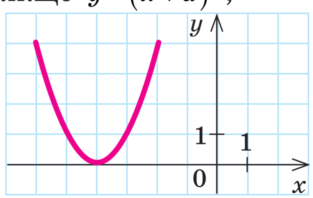
1) значення a, якщо $y=x^2+a$;



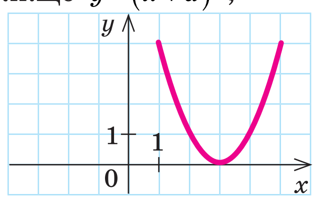
2) значення a, якщо $y=x^2+a$;



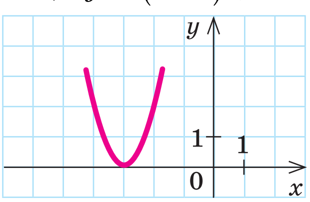
3) значення a, якщо $y=(x+a)^2$;



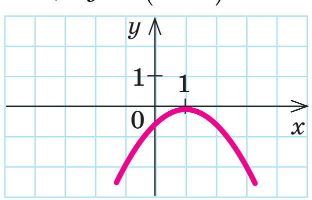
4) значення a, якщо $y=(x+a)^2$;



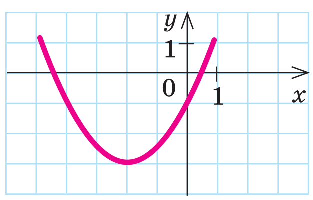
5) значення a і b, якщо $y=b(x+a)^2$;



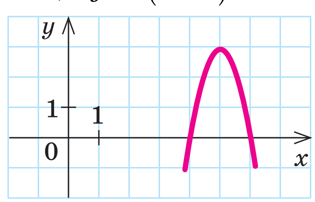
6) значення a і b, якщо $y=b(x+a)^2$;



7) значення a, b і c, якщо $y=b(x+a)^2+c$;



8) значення a, b і c, якщо $y=b(x+a)^2+c$.



ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Графіком функції $y=f(x)$ є відрізок AB (рис. 14). Знайдіть координати кінців відрізка, який є графіком функції:

1) $y=f(x)-4$; 3) $y=f(x-2)$; 5) $y=3\cdot f(x)$;

2) $y=f(x)+2$; 4) $y=f(x+1)$; 6) $y=\frac{1}{5}\cdot f(x)$.

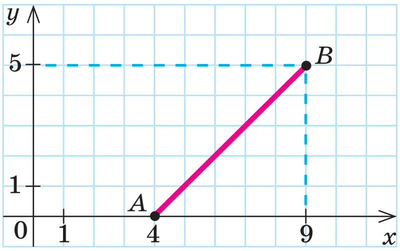
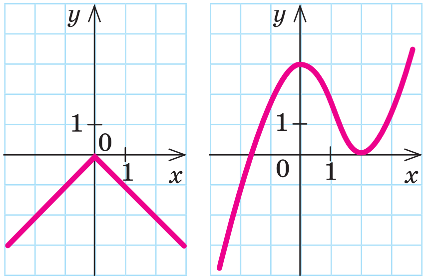


Рис. 14

2 На рис. 15 (*а*, *б*) зображено графік функції $y=f(x)$. Побудуйте графіки функцій: $y=f(x)+3$; $y=f(x)-2$; $y=f(x-1)$; $y=f(x+4)$; $y=4-f(x)$; $y=f(x-3)+2$.



а б

Рис. 15

3 Використовуючи графік функції $y=x^2$, побудуйте графік функції:

1) $y=x^2-4$; 3) $y=3x^2-2$; 5) $y=(x+2)^2-4$;

2) $y=-x^2+1$; 4) $y=\frac{1}{2}x^2-3$; 6) $y=-2(x-3)^2+1$.

4 Використовуючи графік функції $y=-\frac{4}{x}$, побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{4}{x}$; 3) $y=-\frac{4}{x+2}$; 5) $y=\frac{4}{x-1}+3$;

2) $y=-\frac{4}{x-2}$; 4) $y=\frac{4}{x}+2$; 6) $y=3-\frac{4}{x+2}$.

5 Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{x}+2$; 3) $y=\sqrt{x-5}$; 5) $y=-\sqrt{x-6}-2$;

2) $y=-\sqrt{x}-3$; 4) $y=-\sqrt{x+4}$; 6) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-2}+3$.

6 Використовуючи графік функції $y=|x|$, побудуйте графік функції:

1) $y=|x|-3$; 3) $y=-\frac{1}{2}|x|$; 5) $y=|x-3|+2$;

2) $y=-|x|+5$; 4) $y=3-|x+1|$; 6) $y=3|x+2|-1$.

7 Побудуйте графік функції $y=-(x-1)^2+4$ та знайдіть за графіком: 1) область значень функції; 2) нулі функції; 3) проміжки знакосталості; 4) проміжки зростання і спадання функції; 5) найбільше значення функції.

8 Визначте графічним способом кількість коренів рівняння:

1) $\sqrt{x}+2=2-x$; 3) $|x+2|=\frac{1}{x}$; 5) $x^2-5=-\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{x-3}=|x|$; 4) $3\sqrt{x}+1=-\frac{4}{x}$; 6) $(x-2)^2+3=\sqrt{x-6}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Будуючи графік функції виду $y=\sqrt{x+a}$, доцільно знайти область визначення функції.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У роботах Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона, Ґ. Лейбніца поняття функції мало інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричними, або з механічними уявленнями.

Означення функції, вільне від геометричних уявлень, сформулював Й. Бернуллі, а уточнив його учень Л. Ейлер (1748 р.), які ототожнювали функцію з аналітичним виразом, яким вона задається.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

1 Укажіть функцію, графік якої *може бути* зображений на рис. 16.

А	Б	В	Г
$y=\sqrt{x-3}$	$y=\sqrt{x}-3$	$y=\sqrt{x}+3$	$y=\sqrt{x+3}$

2 Укажіть функцію, графік якої *може бути* зображений на рис. 17.

А	Б	В	Г
$y=\sqrt{x+1}$	$y=\sqrt{x}+1$	$y=\sqrt{x}-1$	$y=\sqrt{x-1}$

3 Укажіть функцію, графік якої *може бути* зображений на рис. 18.

А	Б	В	Г
$y=-\frac{1}{2}x^2$	$y=-2x^2$	$y=\frac{1}{2}x^2$	$y=2x^2$

4 Проміжок $[0;1]$ є областю значень функції $y=f(x)$. Знайдіть область значень функції $y=f(x)+2$.

А	Б	В	Г
$[2;3]$	$[0;2]$	$[-2;-1]$	$[0;3]$

5 Машина для вишивання запрограмована відтворювати орнамент, визначений функцією $y=f(x)$ (рис. 19). Визначений якою функцією орнамент пройде через точку M?

А	Б	В	Г
$y=f(x)-2$	$y=f(x)+1$	$y=f(x+1)$	$y=f(x-1)$

6 Установіть відповідність між функціями (1–3) та алгоритмами (А–Г) побудови їх графіків за допомогою геометричних перетворень.

1. $y=\frac{1}{x-6}$
2. $y=\frac{1}{x+6}$
3. $y=\frac{1}{x}+6$

А. Графік функції $y=\frac{1}{x}$ паралельно перенести на 6 одиниць уліво вздовж осі Ox

Б. Графік функції $y=\frac{1}{x}$ паралельно перенести на 6 одиниць управо вздовж осі Ox

В. Графік функції $y=\frac{1}{x}$ паралельно перенести на 6 одиниць униз уздовж осі Oy

Г. Графік функції $y=\frac{1}{x}$ паралельно перенести на 6 одиниць угору вздовж осі Oy

7 Використовуючи графік функції $y=|x|$, побудуйте графік функції $y=2|x-3|$.

8 На рис. 20 подано фрагмент графіка функції $y=b(x+a)^2+c$. Користуючись графіком, знайдіть значення a, b, c.

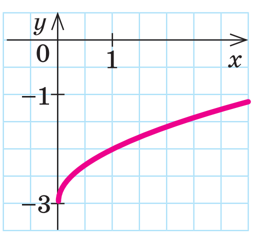


Рис. 16

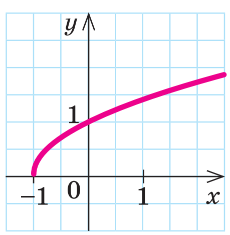


Рис. 17

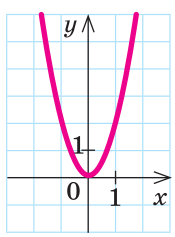


Рис. 18

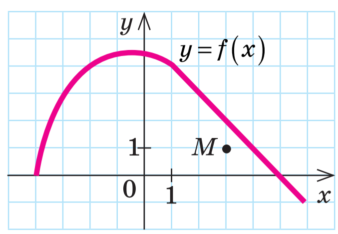


Рис. 19

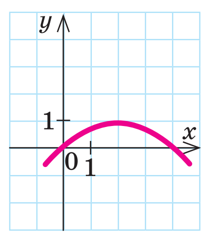


Рис. 20

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $x=5$ є нулем функції $y=f(x)$, то $x=1$ є нулем функції $y=f(x+4)$.

2) Якщо $x=0$ є нулем функції $y=f(x)$, то $x=3$ є нулем функції $y=f(x)-3$.

3) Якщо проміжок $[2;14]$ — область значень функції $y=f(x)$, то проміжок $[1;7]$ — область значень функції $y=\frac{1}{2}f(x)$.

4) Якщо проміжок $[6;7]$ — область визначення функції $y=f(x)$, то проміжок $[4;5]$ — область визначення функції $y=f(x-2)$.

5) Якщо функція $y=f(x)$ зростає на проміжку $[3;8]$, то функція $y=f(x)+1$ зростає на проміжку $[4;9]$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ЗЙОМКА ДИКОЇ ПРИРОДИ З КВАДРОКОПТЕРА»

Керування квадрокоптером можна здійснювати дистанційно. На рис. 21 зображено план місцевості сафарі-парку (вид згори). Лінія, задана функцією $y=f(x)$, — траєкторія польоту першого квадрокоптера під час зйомки.

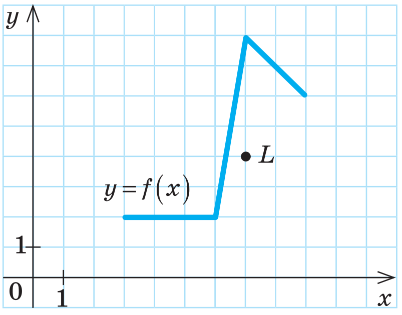


Рис. 21

1 Побудуйте в наведеній системі координат xOy траєкторії польотів чотирьох інших квадрокоптерів, якщо ці траєкторії задано функціями:

1) $y=f(x-1)$;
2) $y=f(x)+2$;
3) $y=f(x+1)-3$;
4) $y=f(x-2)+1$.

(Вважайте, що всі квадрокоптери рухалися на різній висоті.)

2 Траєкторія якого з чотирьох квадрокоптерів пройшла над родиною леопардів, яку на плані позначено точкою L?

П'єр де Ферма (франц. *Pierre de Fermat*, 1601–1665) — видатний французький математик, один із засновників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії чисел, теорії ймовірностей. Найдивовижнішим є те, що Ферма, адвокат за професією, займався математикою у вільний час. «Велика теорема Ферма», сформульована ним у 1637 р., посіла перше місце за кількістю неправильних доведень. Лише наприкінці XX ст. її довів англійський математик Ендрю Джон Вайлс.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Квадрокоптер — безпілотний літальний апарат, що має 4 пропелери, яким зазвичай керують із землі дистанційно.
- Японські технологи розробили «мультконтер» розміром із долонь, його маса менше 200 г, висота польоту 20–30 м.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Побудуйте графік функції:

1) $y=(x-4)^2$; 3) $y=3-(x-4)^2$;

2) $y=-(x-4)^2$; 4) $y=(x^2+10x+25)-1$.

Див. приклад 2

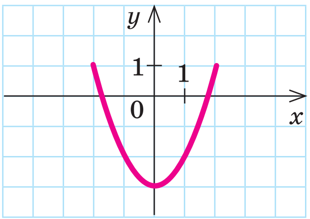
2 Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $y=\dfrac{1}{x+3}-2$; 3) $y=\dfrac{3}{x-2}+1$; 4) $y=\dfrac{1+3(x-1)}{x-1}$.

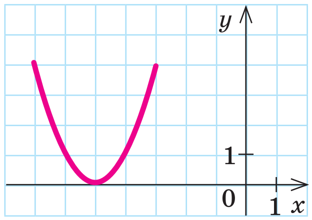
Див. приклад 3

3 За рисунками, на яких зображено фрагменти графіків функцій $y=f(x)$, знайдіть:

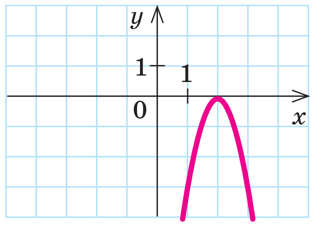
1) значення a, якщо $y=x^2+a$;



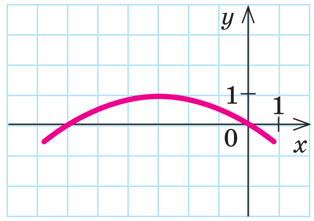
2) значення a, якщо $y=(x+a)^2$;



3) значення a і b, якщо $y=b(x+a)^2$;



4) значення a, b і c, якщо $y=b(x+a)^2+c$.



Див. завдання 7 «Інтелектуального фітнесу»

4 Побудуйте графік функції $y=(x+4)^2-1$ та знайдіть за графіком: 1) область значень функції; 2) нулі функції; 3) проміжки її знакосталості; 4) проміжок зростання функції; 5) проміжок спадання функції; 6) найменше значення функції.

Бонусне завдання

5 Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{(x-2)^3}{x-2}$; 3) $y=\dfrac{2x+3}{x}$; 4) $y=\dfrac{3x-7}{x-2}$.

IQ

TO BE SMART

Курс «STEM FLL. Мій перший StartUp» технічної студії «Винахідник» допоможе навчитися основ конструювання та програмування, набути навичок дослідницької діяльності, командної роботи, стане кроком до участі в міжнародних змаганнях. Дізнайтеся більше: vynahidnyk.org/stem-fll/

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть квадратне рівняння, не використовуючи теорему Вієта і не обчислюючи дискримінант:

1) $x^2-5=0$; 4) $(x-2)^2-16=0$; 7) $x^2-6x+8=0$;

2) $x^2-7=0$; 5) $x^2-10x+25=4$; 8) $x^2+4x-5=0$.

3) $(x+1)^2-9=0$; 6) $x^2+12x+36=64$;

> *Природа завжди діє найкоротшими шляхами.*
>
> П'єр Ферма

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 8—11

1 Ви повторили основні відомості про функцію, відомі вам із попередніх класів.

Залежність змінної y від змінної x називають **функцією**, якщо кожному значенню x за деяким правилом ставиться у відповідність **єдине** значення y.

- $y=f(x)$ — функціональна залежність y від x (правило);
- x — аргумент (незалежна змінна);
- y — функція (залежна змінна).

Область визначення функції — множина всіх значень незалежної змінної (аргумента).

Область значень функції (або **множина значень функції**) — множина всіх значень, яких набуває залежна змінна.

Наприклад:

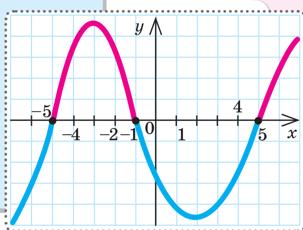
$D(y)$ — область визначення функції y;

$E(y)$ — область значень функції y.

2 Ви познайомилися з такими властивостями функції, як нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання та спадання функції, навчилися їх знаходити.

Нулем функції називають значення аргумента, при якому значення функції дорівнює нулю.

- Нулі функції — абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис.
- Нулями функції $y=f(x)$ є корені рівняння $f(x)=0$.



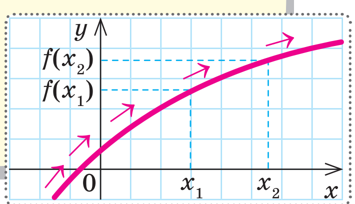
Проміжком знакосталості функції називають кожний із проміжків, на якому функція набуває значень одного знака.

Проміжками знакосталості є проміжки максимальної довжини, на яких $f(x)>0$ або $f(x)<0$.

Проміжки зростання функції

Функцію називають **зростаючою на деякому проміжку *I***, якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з цього проміжку, таких що $x_2>x_1$, виконується нерівність $f(x_2)>f(x_1)$. Тобто якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції.

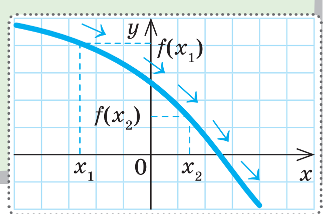
Якщо функція зростає на всій області визначення, її називають **зростаючою**.



Проміжки спадання функції

Функцію називають **спадною на деякому проміжку *I***, якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з цього проміжку, таких що $x_2>x_1$, виконується нерівність $f(x_2)<f(x_1)$. Тобто якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції.

Якщо функція спадає на всій області визначення, її називають **спадною**.



Алгоритм знаходження нулів функції $y=f(x)$, заданої аналітично

1. Знайти $D(y)$ — область визначення заданої функції.
2. Розв'язати рівняння $f(x)=0$ на $D(y)$.
3. Записати у відповідь знайдені корені рівняння $f(x)=0$, які і є нулями функції.

Алгоритм знаходження проміжків знакосталості функції $y=f(x)$, заданої аналітично

1. Знайти $D(y)$ — область визначення заданої функції.
2. Розв'язати нерівності $y<0$ і $y>0$ на $D(y)$.
3. Записати у відповідь отримані проміжки, враховуючи область визначення функції.

Алгоритм доведення зростання (спадання) функції $y=f(x)$ на певному проміжку I

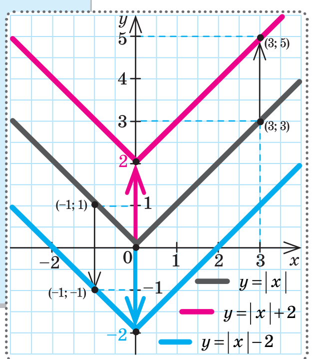
1. Вибрати x_1 і x_2 з проміжку I, такі що $x_2>x_1$.
2. Знайти значення функції $y=f(x)$ у вибраних точках $y_1=f(x_1)$ і $y_2=f(x_2)$.
3. Записати різницю y_2-y_1 і спростити отриманий вираз.
4. Визначити знак різниці y_2-y_1.
5. Зробити висновок: $\begin{cases} x_1, x_2 \in I, \\ x_2>x_1, \\ f(x_2)>f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x)\uparrow$ на I або $\begin{cases} x_1, x_2 \in I, \\ x_2>x_1, \\ f(x_2)<f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x)\downarrow$ на I.

3 Ви навчилися будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень.

$y=f(x)+a$

Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy:

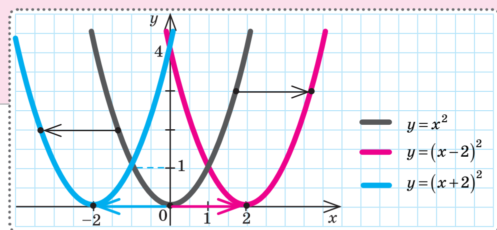
- на a одиниць **угору**, якщо $a>0$;
- на $|a|$ одиниць **униз**, якщо $a<0$.



$y=f(x+a)$

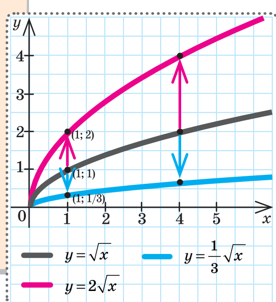
Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox:

- на a одиниць **уліво**, якщо $a>0$;
- на $|a|$ одиниць **управо**, якщо $a<0$.



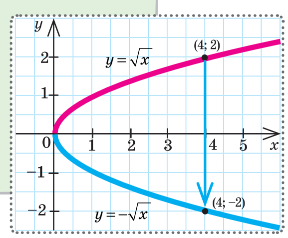
$y=k\cdot f(x)$

- **Розтяг** графіка функції $y=f(x)$ у k разів уздовж осі Oy, якщо $k>1$.
- **Стиск** графіка функції $y=f(x)$ у $\frac{1}{k}$ разів уздовж осі Oy, якщо $0<k<1$.

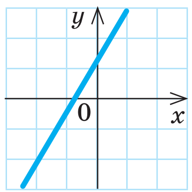
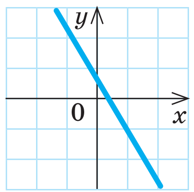
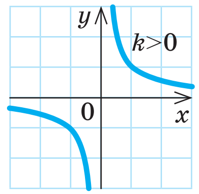
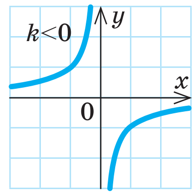
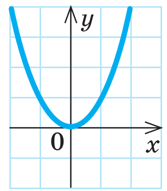
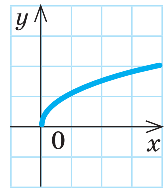
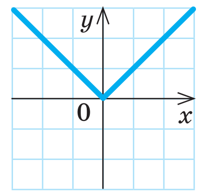


$y=-f(x)$

Симетричне відображення графіка функції $y=f(x)$ відносно осі Ox.



ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Властивості функції	Функції						
	$y=kx+b,\ k\neq 0$		$y=\frac{k}{x},\ k\neq 0$		$y=x^2$	$y=\sqrt{x}$	$y=\lvert x\rvert$
$D(y)$	$x\in(-\infty;+\infty)$		$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$		$x\in(-\infty;+\infty)$	$x\in[0;+\infty)$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$E(y)$	$y\in(-\infty;+\infty)$		$y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$		$y\in[0;+\infty)$	$y\in[0;+\infty)$	$y\in[0;+\infty)$
Нулі функції	$y=0$, якщо $x=-\frac{b}{k}$		Нулів немає		$y=0$, якщо $x=0$	$y=0$, якщо $x=0$	$y=0$, якщо $x=0$
Графік функції	Пряма		Дві вітки гіперболи		Парабола	Одна вітка параболи	Розташований у I і III чвертях
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$			
							
Проміжки знако-сталості функції	• $y>0$, якщо $x>-\frac{b}{k}$; • $y<0$, якщо $x<-\frac{b}{k}$	• $y>0$, якщо $x<-\frac{b}{k}$; • $y<0$, якщо $x>-\frac{b}{k}$	• $y>0$, якщо $x>0$; • $y<0$, якщо $x<0$	• $y>0$, якщо $x<0$; • $y<0$, якщо $x>0$	$y>0$, якщо $x\neq 0$	$y>0$, якщо $x>0$	$y>0$, якщо $x\neq 0$
Проміжки зростання й спадання функції	Функція **зростає** при $x\in(-\infty;+\infty)$	Функція **спадає** при $x\in(-\infty;+\infty)$	Функція **спадає** при $x\in(-\infty;0)$ та $x\in(0;+\infty)$	Функція **зростає** при $x\in(-\infty;0)$ та $x\in(0;+\infty)$	Функція **спадає** при $x\in(-\infty;0]$, **зростає** при $x\in[0;+\infty)$	Функція **зростає** при $x\in[0;+\infty)$	Функція **спадає** при $x\in(-\infty;0]$, **зростає** при $x\in[0;+\infty)$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{2-x}$.

А	Б	В	Г
$[-2;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$(-\infty;2]$	$(-\infty;-2]$

2 Областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[-2;4]$. Яка область значень функції $y=2f(x)$?

А	Б	В	Г
$[-1;2]$	$[0;6]$	$[-2;8]$	$[-4;8]$

3 Скільки нулів має функція $y=8-x$?

А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Більше за два

4 Яке найменше значення функції $y=x^2-25$?

А	Б	В	Г
-25	-5	5	25

5 На рис. 1 подано графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-3;4]$. Укажіть проміжок спадання цієї функції.

А	Б	В	Г
$[-2;4]$	$[-2;3]$	$[1;4]$	$[-3;0]$

6 Укажіть функцію, графік якої зображено на рис. 2.

А	Б	В	Г
$y=\frac{1}{x-1}$	$y=\frac{1}{x}-1$	$y=\frac{1}{x+1}$	$y=\frac{1}{x}+1$

7 На рис. 3 зображено графік залежності обсягу споживання холодної води (у л/год) у певному житловому будинку протягом однієї доби від часу (у год).

1) Яким було найбільше споживання холодної води (у л/год) протягом доби? О котрій годині воно спостерігалося?
2) Укажіть проміжки часу (у год), протягом яких споживання холодної води збільшувалося.

8 Використовуючи графік функції $y=|x|$, побудуйте графік функції $y=3-|x|$.

9 Доведіть, що функція $y=\frac{6}{x-3}$ спадає на проміжку $(3;+\infty)$.

10 Побудуйте графік функції $y=(x-3)^2-1$ та знайдіть за графіком: 1) область значень функції; 2) нулі функції; 3) проміжки знакосталості функції; 4) проміжки спадання та зростання функції.

Бонусне завдання

Визначте графічним способом кількість коренів рівняння $\sqrt{x}=|x-1|$.

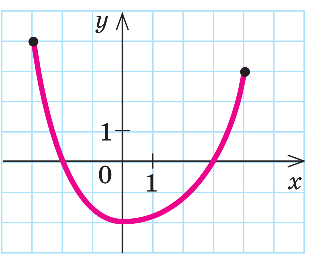


Рис. 1

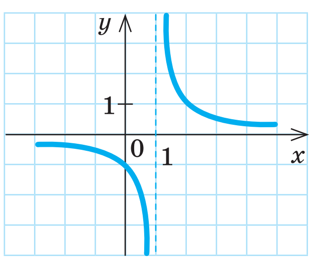


Рис. 2

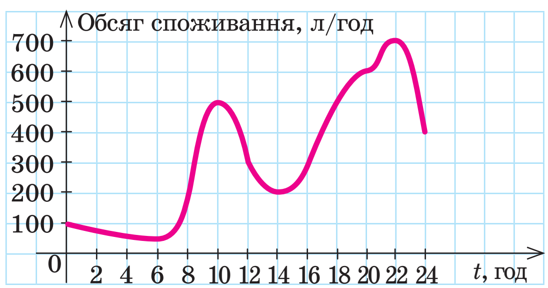


Рис. 3

§ 12 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА	Ви познайомилися з окремим випадком квадратичної функції $y=x^2$, навчилися будувати графіки за допомогою геометричних перетворень
СЬОГОДНІ	Ви продовжите знайомитися із властивостями квадратичної функції та способами побудови її графіка
ЗАВЖДИ	Ви зможете за допомогою квадратичної функції описувати різноманітні виробничі процеси, природні явища

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Змоделюємо рух кенгуру під час стрибка. Приймемо тварину за матеріальну точку (вам відомий цей прийом з уроків фізики). Траєкторію цього руху можна змоделювати графіком функції $y=-0{,}08x^2+0{,}8x$ (рис. 1). Місце, з якого кенгуру стрибнув, є початком координат. Тоді x — відстань (у м) по горизонталі між поточним положенням точки та початком координат, y — відстань (у м) по вертикалі (висота, на якій перебуває точка).

1) На яку найбільшу висоту піднялася над землею матеріальна точка — модель справжнього кенгуру?
2) Чи може цей кенгуру перестрибнути паркан заввишки 3 м?
3) На яку найбільшу відстань стрибнув кенгуру?

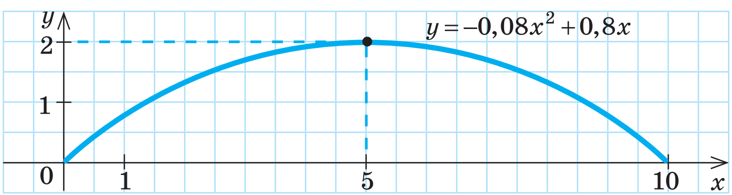


Рис. 1

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Дорослий кенгуру може розвивати швидкість до 60 км/год, стрибати на відстань до 13 м, перестрибувати бар'єри заввишки до 3 м.
- У 1999 р. австрійський винахідник Олександр Бок створив пружні ходулі — джампери, принцип роботи яких заснований на будові колін кенгуру.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Права частина рівності $y=-0{,}08x^2+0{,}8x$ є квадратним тричленом, тому дану функцію прийнято називати квадратичною.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

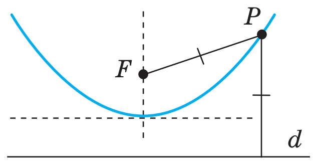
> *Означення.* Функцію, що задається формулою виду $y=ax^2+bx+c$, де x — незалежна змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$, називають **квадратичною функцією**.

Наприклад, квадратичними функціями є:

- залежність площі S круга від його радіуса R
  $S(R)=\pi R^2$, де $a=\pi$, $b=0$, $c=0$;

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Парабола в геометрії



Парабола — множина всіх точок, рівновіддалених від даної точки (на рисунку точка F) і даної прямої (пряма d), що не містить цієї точки. Точку F називають фокусом параболи.

- залежність висоти, на якій перебуває тіло, що кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, від часу t руху тіла $h(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$, де $a=-\frac{g}{2}$, $b=v_0$, $c=0$.

РОЗМИНКА 1

1 Визначте, чи є квадратичною функція $y(x)$, якщо:

1) $y=3x^2+x+\frac{1}{3}$;
2) $y=x^2-2x+\frac{5}{x}$;
3) $y=21x-3x^2$;
4) $y=5x(x^2-1)+20x$;
5) $y=2x^2+\frac{3}{x^2}-1$;
6) $y=\sqrt{2}x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x-11$.

2 Знайдіть значення квадратичної функції $f(x)$ в точці x_0, якщо:

1) $f(x)=x^2-6x+1$, $x_0=0$;
2) $f(x)=-2x^2+x-5$, $x_0=-1$;
3) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-11$, $x_0=-3$;
4) $f(x)=-x^2+x$, $x_0=-2$.

ПРИГАДАЙТЕ!
Графіком функції виду $y=a(x+m)^2+n$ є парабола з вершиною в точці $(-m;n)$.

Розглянемо функцію $y=x^2-6x-3$. Її графік можна побудувати, застосувавши до графіка функції $y=x^2$ відомі вам геометричні перетворення (див. § 11). Виділимо квадрат двочлена у правій частині рівності $y=\underbrace{x^2-6x+9}-12$ і запишемо функцію у вигляді $y=(x-3)^2-12$. Отже, графіком функції $y=x^2-6x-3$ є парабола з вершиною в точці $(3;-12)$, вітки параболи напрямлені вгору.

СЛІД ЗНАТИ!

Графік функції $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ можна отримати з графіка функції $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ шляхом геометричних перетворень.

З'ясуємо, яких саме. Розглянемо функцію $y=ax^2+bx+c$. У тричлені ax^2+bx+c винесемо за дужки множник a, оскільки $a\neq 0$, і застосуємо **метод виділення квадрата двочлена**.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\underbrace{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{застосуємо формулу квадрата двочлена}}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{\text{зведемо до спільного знаменника}}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ
- квадратична функція
- парабола
- вершина параболи
- вісь симетрії параболи

Розкриємо дужки та скоротимо дріб у другому доданку:

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Маємо: $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Отже, функцію $y=ax^2+bx+c$ можна записати у вигляді $y=a(x+m)^2+n$, позначивши $\frac{b}{2a}=m$, $-\frac{b^2-4ac}{4a}=n$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо координати вершини параболи $y=ax^2+bx+c$ записати у вигляді $(x_в;\ y_в)$, то $x_в=-\frac{b}{2a}$, $y_в=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, а функцію $y=ax^2+bx+c$ можна подати у вигляді $y=a(x-x_в)^2+y_в$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Колонада «Відлуння» у парку міста Біла Церква має чудову акустичну властивість. Якщо в одному кінці споруди прошептати слово, воно, не змінюючись, долинає вздовж стіни до протилежного кінця. А слово, вимовлене голосно, відлунює назад.

Графік функції $y=ax^2+bx+c$ можна побудувати **методом геометричних перетворень** за таким планом:

АЛГОРИТМ

$$y=ax^2\ \xrightarrow[\text{вліво на } |x_в| \text{ од. при } x_в<0]{\text{вправо на } |x_в| \text{ од. при } x_в>0}\ y=a(x-x_в)^2\ \xrightarrow[\text{вниз на } |y_в| \text{ од. при } y_в<0]{\text{вгору на } |y_в| \text{ од. при } y_в>0}\ y=a(x-x_в)^2+y_в$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола з вершиною в точці $(x_в;\ y_в)$, де $x_в=-\frac{b}{2a}$, $y_в=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

У 8 класі ви познайомилися з поняттям дискримінанта квадратного рівняння: $D=b^2-4ac$. Цей вираз називають також **дискримінантом квадратного тричлена** ax^2+bx+c.

- Формулу $y_в=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ можна записати як $y_в=-\frac{D}{4a}$.
- Ординату вершини параболи можна знайти, підставивши значення $x=x_в$ у формулу $y=ax^2+bx+c$, тобто $y_в=y(x_в)$.

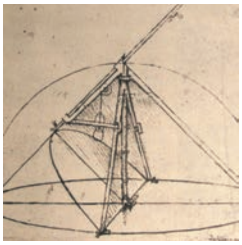
Наприклад, знайдемо координати $(x_в;\ y_в)$ вершини параболи $y=x^2-6x-3$. Маємо: $x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot1}=3$; $y_в=-\frac{b^2-4ac}{4a}=$ $=-\frac{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-3)}{4\cdot1}=-12$. Або: $y_в=y(x_в)=y(3)=3^2-6\cdot3-3=-12$.
Отже, вершина параболи $y=x^2-6x-3$ має координати $(3;-12)$.

Координати вершини параболи $y=ax^2+bx+c$

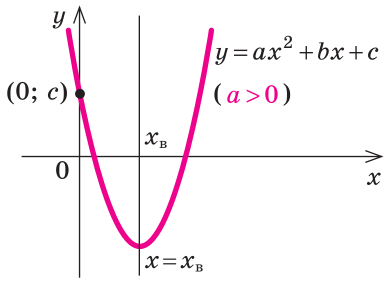
$$\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right),$$

або $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$

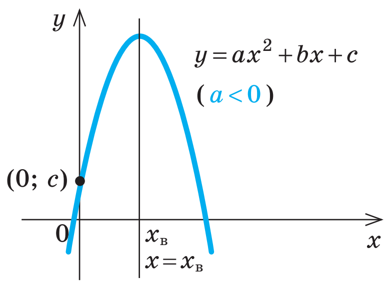
ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Серед численних креслень Леонардо да Вінчі зустрічається креслення параболічного компаса.



а



б

Рис. 2

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть координати $(x_в; y_в)$ вершини параболи:

1) $y=x^2-2x-8$; 3) $y=-7x^2$; 5) $y=3x^2-6x+5$;

2) $y=4x^2+2x$; 4) $y=x^2-4$; 6) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-1$.

2 Виділіть квадрат двочлена у формулі, якою задано квадратичну функцію, та знайдіть координати вершини параболи:

1) $y=x^2+12x+36$; 3) $y=x^2+2x-5$; 5) $y=x^2-10x+26$;

2) $y=x^2-6x$; 4) $y=x^2-4x+3$; 6) $y=-4x^2+4x+3$.

Напрям віток параболи $y=ax^2+bx+c$ збігається з **напрямом віток графіка функції** $y=ax^2$. При $a>0$ вітки параболи $y=ax^2+bx+c$ напрямлені вгору, при $a<0$ — униз (рис. 2).

Будуючи графік квадратичної функції, доцільно знайти точки перетину параболи з осями координат. Нагадаємо, що **абсциси точок перетину з віссю *Ox* є нулями функції** (якщо вони існують). Графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$, визначеної на множині дійсних чисел, завжди перетинає вісь *Oy*. Точка перетину має ординату $y(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$. Тобто **координати точки перетину параболи з віссю ординат** — $(0; c)$ (рис. 2).

Парабола $y=ax^2$ симетрична відносно осі *Oy*, тобто відносно прямої, яка проходить через вершину параболи. Це означає, що вітки параболи є *дзеркальними відображеннями* одна одної (дзеркало розташоване на осі *Oy*).

Під час виконання геометричних перетворень графіка функції $y=ax^2$, зокрема його переміщення вздовж осі абсцис вліво або вправо та вздовж осі ординат угору або вниз, вісь симетрії також переміщується вліво або вправо та вгору або вниз (але останні перетворення не приводять до зміни положення осі). Таким чином, вісь симетрії параболи залишається паралельною осі ординат. Отже, віссю симетрії параболи (або віссю параболи) є пряма, що проходить через вершину параболи паралельно осі *Oy*.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Віссю симетрії параболи є пряма $x=x_в$ (рис. 2).

РОЗМИНКА 3

Визначте напрям віток параболи, нулі функції та координати точок перетину з віссю *Oy* графіка функції:

1) $y=x^2+3x-4$; 3) $y=x^2+11x-30$;

2) $y=-x^2+5x-6$; 4) $y=-4x^2-12x+9$.

ПРИГАДАЙТЕ!
Для того щоб визначити нулі функції, потрібно знайти корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Нулі функції x_1 і x_2 симетричні відносно абсциси $x_в$ вершини параболи (рис. 3). Отже, абсциса $x_в$ є серединою відрізка, кінцями якого є нулі функції: $x_в = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Тому для визначення координат вершини параболи іноді зручно спочатку знайти нулі функції, а потім — абсцису вершини.

СЛІД ЗНАТИ!

$$x_в = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

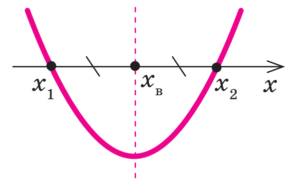


Рис. 3

Отже, для побудови графіка квадратичної функції необхідно визначити напрям віток параболи, координати її вершини й точок перетину з осями координат, вісь симетрії параболи. Ці дії є кроками **алгоритму побудови параболи без використання геометричних перетворень.**

?

ПОМІРКУЙТЕ

Складіть алгоритм побудови параболи $y = ax^2 + bx + c$, розташувавши кроки у правильній, на вашу думку, послідовності. (Послідовність кроків може змінюватися.)

АЛГОРИТМ

Крок____
Знайти (за необхідності) додаткові «зручні» точки графіка (точку, симетричну точці $(0; c)$ відносно осі симетрії параболи, або інші довільні точки, що належать графіку).

Крок____
Визначити напрям віток параболи:
- при $a > 0$ вітки напрямлені вгору;
- при $a < 0$ вітки напрямлені вниз.

Крок____
Позначити всі знайдені точки на координатній площині й сполучити їх плавною лінією (рис. 4).

Крок____
Знайти точку перетину графіка функції з віссю Oy, тобто $y(0) = c$.

Крок____
Записати рівняння осі симетрії параболи: $x = x_в$.

Крок____
Знайти ординату вершини параболи за формулою $y_в = -\frac{D}{4a}$, де $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, або за формулою $y_в = y(x_в)$.

Крок____
Знайти нулі функції як корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо вони існують). Записати координати точок перетину з віссю Ox.

Крок____
Знайти абсцису вершини параболи за формулою $x_в = -\frac{b}{2a}$ або $x_в = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

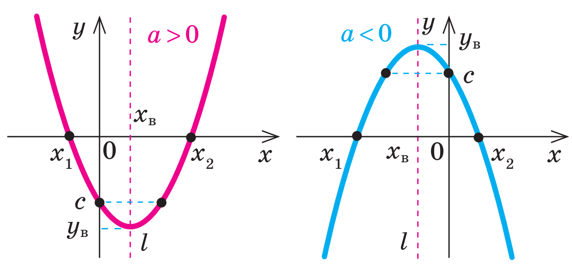
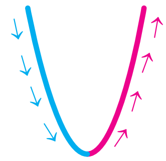
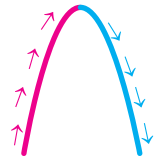
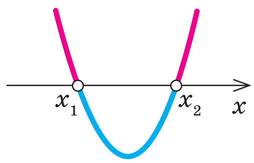
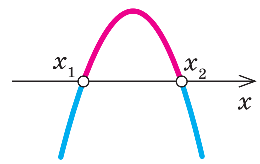
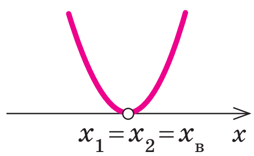
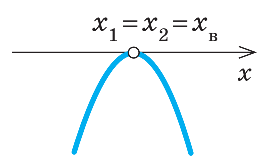
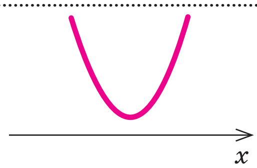
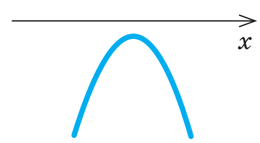


Рис. 4

Користуючись графіком та враховуючи знак першого коефіцієнта a, узагальнимо властивості квадратичної функції (див. таблицю). Зазвичай визначення властивостей певної функції називають **дослідженням** цієї функції. Другий стовпчик таблиці можна вважати **алгоритмом дослідження квадратичної функції**.

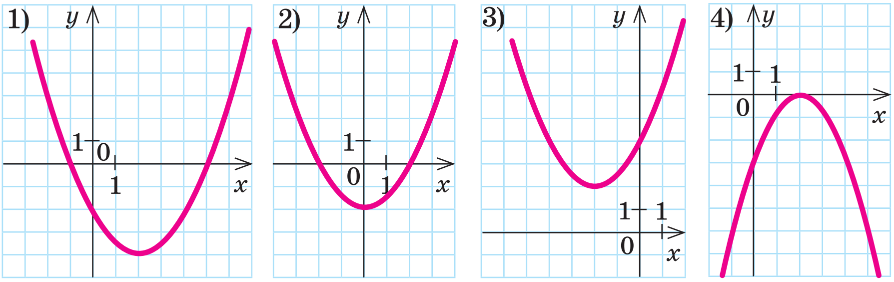
Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$

№ з/п	Алгоритм дослідження функції		$a > 0$	$a < 0$
1	Область визначення		$x \in (-\infty; +\infty)$	
2	Область значень		$y \in [y_в; +\infty)$	$y \in (-\infty; y_в]$
3	Проміжки зростання та спадання		 $y\uparrow$ при $x \in [x_в; +\infty)$, $y\downarrow$ при $x \in (-\infty; x_в]$	 $y\uparrow$ при $x \in (-\infty; x_в]$, $y\downarrow$ при $x \in [x_в; +\infty)$
4	Нулі функції		x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	
5	Проміжки знакосталості	$D > 0$ $(x_1 \neq x_2)$	 $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$	 $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
		$D = 0$ $(x_1 = x_2)$	 $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$, $y < 0$ не існує	 $y > 0$ не існує, $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$
		$D < 0$ (нулів функції не існує)	 $y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$, $y < 0$ не існує	 $y > 0$ не існує, $y < 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

Як бачимо, залежно від знака дискримінанта D і напряму віток параболи, тобто знака коефіцієнта a, розрізняють шість випадків розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ox.

РОЗМИНКА 4

Користуючись графіком функції, визначте координати вершини параболи, рівняння осі симетрії параболи, нулі функції, координати точки перетину з віссю Oy і точки, симетричної точці перетину з віссю Oy відносно осі симетрії параболи.



ПОМІРКУЙТЕ

Для кожного запису квадратичної функції (1–3) доберіть найзручніший спосіб визначення координат вершини параболи (А–В).

1 $y=a(x+m)^2+n$

2 $ax^2+bx+c=0$

3 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

А $\left(-\dfrac{b}{2a};\ -\dfrac{D}{4a}\right)$

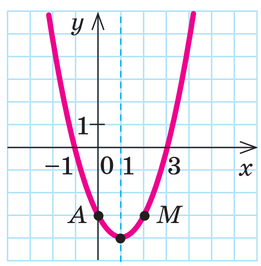
Б $(-m;n)$

В $\left(x_в=\dfrac{x_1+x_2}{2};\ y_в(x_в)\right)$

ПРИКЛАД 1

Побудуйте графік функції $y=x^2-2x-3$ за алгоритмом (с. 151, 176).

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо напрям віток параболи.	$a>0$, тому вітки параболи напрямлені вгору
КРОК 2	Визначимо абсцису вершини параболи та запишемо рівняння осі симетрії параболи.	$x_в=-\dfrac{b}{2a}$; $x_в=-\dfrac{-2}{2}=1$; $x=1$
КРОК 3	Визначимо ординату вершини параболи та запишемо координати вершини параболи.	$y_в=y(x_в)$; $y_в=y(1)=-4$, отже, координати вершини параболи $(1;-4)$
КРОК 4	Знайдемо нулі функції як корені квадратного рівняння $x^2-2x-3=0$. Запишемо координати точок перетину графіка функції з віссю Ox.	$x_1=-1$ і $x_2=3$ — нулі функції; $(-1;0)$, $(3;0)$ — координати точок перетину графіка з віссю Ox
КРОК 5	Знайдемо координати точки перетину параболи з віссю Oy.	$y(0)=c$; $y(0)=-3$; $(0;-3)$ — точка перетину параболи з віссю Oy
КРОК 6	Побудуємо графік. Зауважимо, що точка M — «зручна» точка графіка, вона симетрична точці A (точці перетину параболи з віссю Oy) відносно осі симетрії параболи (є дзеркальним відображенням).	

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Парабола в природі. Квіти, що живуть в умовах браку сонячного проміння (полярний мак тощо), розкривають пелюстки у формі параболоїда, що допомагає їм акумулювати тепло.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Побудуйте за алгоритмом графік функції:

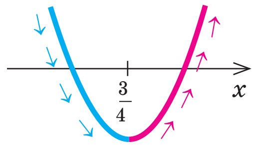
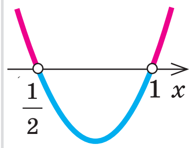
1) $y=x^2-2x+1$;
2) $y=x^2+4x+4$;
3) $y=x^2-6x$;
4) $y=4x-x^2$;
5) $y=8-2x-x^2$;
6) $y=x^2+2x-3$;
7) $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+2$;
8) $y=-\frac{1}{4}x^2-x-4$.

ПРИКЛАД 2

Знайдіть значення a і b, при яких графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+1$ проходить через точки $A(-2;15)$ і $K(3;10)$. Запишіть формулу, якою задано функцію. Дослідіть функцію за алгоритмом (див. с. 152).

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося правилом: якщо графік функції проходить через точку, то її координати перетворюють формулу, якою задано функцію, у правильну рівність. Складемо рівняння для обох заданих точок.	$A(-2;15)$, $15=4a-2b+1$; $K(3;10)$, $10=9a+3b+1$
КРОК 2	Складемо систему з одержаних на кроці 1 рівнянь та розв'яжемо її.	$\begin{cases}4a-2b+1=15,\\9a+3b+1=10;\end{cases}$ $\begin{cases}4a-2b=14\,\vert:2,\\9a+3b=9\,\vert:3;\end{cases}$ $+\begin{cases}2a-b=7,\\3a+b=3;\end{cases}$ $5a=10;$ $a=2$, тоді $b=-3$
КРОК 3	Значення a і b визначено, запишемо формулу, якою задано функцію.	$y=2x^2-3x+1$
КРОК 4	Знайдемо координати вершини параболи: $x_в=-\frac{b}{2a}$, $y_в=y(x_в)$	$x_в=-\frac{-3}{2\cdot 2}$, $x_в=\frac{3}{4}$; $y_в=y\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\frac{9}{16}-\frac{9}{4}+1=-\frac{1}{8}$. Точка $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$ — вершина параболи
КРОК 5	Знайдемо область визначення функції, напрям віток параболи, найменше значення функції та область значень функції.	Функція квадратична, отже, її область визначення $D(y)$: $(-\infty;+\infty)$. $a>0$, тому вітки параболи напрямлені вгору. Отже, функція набуває найменшого значення у вершині параболи. Найменше значення $\left(-\frac{1}{8}\right)$, тоді $E(y)$: $\left[-\frac{1}{8};+\infty\right)$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 6	Визначимо проміжки зростання та спадання функції, враховуючи, що $x_{в}=\frac{3}{4}$.	 $y\downarrow$ при $x\in\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$, $y\uparrow$ при $x\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$
КРОК 7	Знайдемо нулі функції — корені рівняння $2x^2-3x+1=0$.	$2x^2-3x+1=0$, $x_1=\frac{1}{2}$ або $x_2=1$
КРОК 8	Визначимо проміжки знакосталості.	 $y>0$ при $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$, $y<0$ при $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть значення невідомих коефіцієнтів, при яких графік заданої квадратичної функції проходить через указані точки. Запишіть формулу, якою задано функцію. Дослідіть функцію за алгоритмом.

1) $y=x^2+bx$, $A(-2;10)$;
2) $y=-x^2+bx$, $A(3;6)$;
3) $y=-x^2+4x+c$, $A(-3;-9)$;
4) $y=x^2+2x+c$, $A(2;-16)$;
5) $y=x^2+bx+c$, $M(2;5)$, $N(-1;32)$;
6) $y=-x^2+bx+c$, $M(-3;12)$, $N(1;12)$;
7) $y=ax^2+bx+c$, $M(0;20)$, $N(1;11)$, $K(-1;35)$;
8) $y=ax^2+bx+c$, $M(0;-41)$, $N(1;-21)$, $K(-1;69)$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і вставте пропущені числа.

Тихий океан	Безодня Челленджера
$y=x^2-17x+72$	(__; __)
Гімалаї	Еверест
$y=-(x+2)(x-4)$	(__; __)

ПРИКЛАД 3 (актуальна задача)

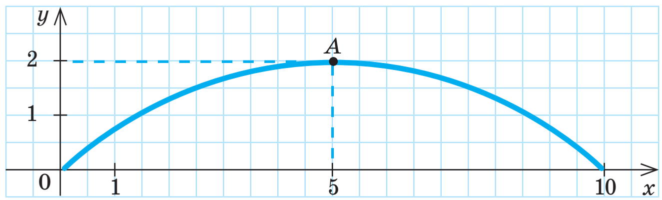
Змоделюємо рух кенгуру під час стрибка. Приймемо тварину за матеріальну точку. Траєкторія її руху може бути змодельована графіком функції $y=-0{,}08x^2+0{,}8x$, побудованим у системі координат, де початком координат є місце, з якого кенгуру стрибнув. Тоді x — відстань (у м) по горизонталі між поточним положенням точки та початком координат, y — відстань (у м) по вертикалі (висота, на якій перебуває точка).

1) Побудуйте графік заданої функції.
2) Визначте за графіком найбільшу висоту, на яку піднялася над землею матеріальна точка — модель справжнього кенгуру.
3) З'ясуйте, чи може цей кенгуру перестрибнути паркан заввишки 3 м.
4) Знайдіть найбільшу відстань, на яку стрибнув кенгуру.

Розв'язуючи задачі практичного змісту, ви можете отримати дуже великі або дуже малі значення величин. Це створює незручності під час побудови графіків функцій.

У таких випадках креслять ескізи графіків, які відображають властивості функції, проте дозволяють змінювати масштаб.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Знайдемо нулі функції $y=-0{,}08x^2+0{,}8x$.	$-0{,}08x^2+0{,}8x=0$; $x_1=0$, $x_2=10$
КРОК 2	Знайдемо координати вершини параболи.	$x_в=\frac{x_1+x_2}{2}$, $x_в=5$; $y_в=y(5)=-0{,}08\cdot 25+0{,}8\cdot 5=2$; $(5;2)$
КРОК 3	Визначимо напрям віток параболи та координати точки перетину графіка функції з віссю ординат.	$a<0$, вітки параболи напрямлені вниз; $y(0)=0$, графік перетинає вісь Oy в точці $(0;0)$
КРОК 4	Оскільки нулі функції дорівнюють 0 і 10, побудуємо ескіз графіка функції для $x\in[0;10]$.	
2) КРОК 1	Визначимо за ескізом найбільше значення функції, тобто найбільшу висоту, на яку піднялася над землею матеріальна точка — модель справжнього кенгуру.	Найвищою точкою графіка функції є точка $A(5;2)$. $y=2$ — найбільше значення функції, тобто шукана найбільша висота дорівнює 2 м
3) КРОК 1	Зробимо висновок, чи може цей кенгуру перестрибнути паркан певної висоти.	Оскільки найвища точка стрибка кенгуру розташована на висоті 2 м над землею, то цей кенгуру не зможе перестрибнути паркан заввишки 3 м
4) КРОК 1	Визначимо найбільшу відстань, на яку стрибнув кенгуру.	Нулі функції $x=0$ і $x=10$ є точками початку стрибка і приземлення, тому найбільша відстань, на яку стрибнув кенгуру, — 10 м

Відповідь: 2) 2 м; 3) ні, не зможе; 4) 10 м.

СЛІД ЗНАТИ!

Для визначення найбільшого або найменшого значень квадратичної функції досить знати напрям віток параболи та значення ординати її вершини: при $a<0$ $y_в$ — **найбільше** значення функції, при $a>0$ $y_в$ — її **найменше** значення.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть задачу.

1) Струмінь води декоративного фонтану є параболою, яку можна описати рівнянням $y=ax^2+bx$, $x\in[0;2]$. Знайдіть значення коефіцієнтів a і b, якщо відомо, що $y(2)=0$ і вода піднімається на найбільшу висоту 1 м, тобто $y(1)=1$.

2) Жонглер, стоячи на підлозі, підкидає м'ячик правою рукою і ловить лівою. Траєкторія польоту м'яча може бути змодельована графіком функції $y=-16x^2+8x+1$, де x — відстань (у м) по горизонталі від правої руки жонглера до м'яча, y — висота (у м), на яку піднімається м'ячик над підлогою.
   а) Побудуйте графік заданої функції, якщо $x \in [0; 0{,}5]$.
   б) На яку найбільшу висоту підкидає м'ячик жонглер?

3) Форму моста можна описати формулою $y=-0{,}4x^2+2{,}4x$, де x — відстань (у м) по горизонталі від краю (початку) моста до точки, якою позначена людина, що переходить на інший берег річки; y — висота (у м) цієї точки над поверхнею води.
   а) На яку найбільшу ширину може розлитися річка, щоб цим мостом можна було користуватися?
   б) На яку найбільшу висоту піднімається людина над поверхнею води, рухаючись по мосту?

4) Залежність кількості q (у шт.) сорочок, проданих протягом одного тижня, від ціни p (у грн) однієї сорочки можна задати формулою $q=80-0{,}16p$. Дохід за тиждень r (у грн) підприємства, що продає ці сорочки, обчислюється за формулою $r(p)=p \cdot q$.
   а) Знайдіть кількість q сорочок, проданих протягом одного тижня, якщо ціна однієї сорочки становила 150 грн.
   б) Визначте тижневий дохід підприємства від реалізації сорочок, якщо ціна однієї сорочки становила 400 грн.
   в) Побудуйте графік функції $y=r(p)$, якщо $p \in [0; 500]$.
   г) Знайдіть ціну p (у грн), за якої тижневий дохід підприємства буде найбільшим. Визначте цей дохід.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Користуючись алгоритмом, побудуйте графік функції:

1) $y=x^2-4x+3$; 3) $y=\frac{1}{2}x^2+2$; 5) $y=15-x^2+2x$;

2) $y=-x^2+6x$; 4) $y=2x^2-7x+3$; 6) $y=3x^2-x-1$.

2 Не виконуючи побудови графіка, знайдіть область значень, проміжки зростання та спадання функції:

1) $y=x^2-6$; 3) $y=-2x^2+8x-1$; 5) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+3$;

2) $y=3x^2-18x$; 4) $y=2x^2+5x+2$; 6) $y=10-4x-0{,}1x^2$.

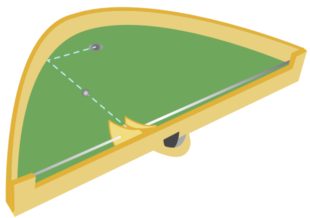
ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Парабола в архітектурі

Інженерні розрахунки свідчать, що архітектурні споруди у формі параболи (мости, арки) мають підвищену міцність.

Місячний міст,
Сан-Фрациско, США

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



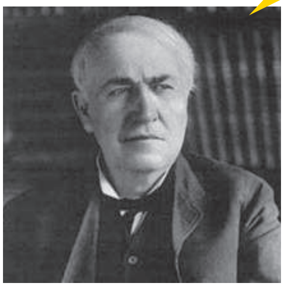
Параболічний більярд є механічною моделлю, яка ілюструє оптичну властивість параболи. А саме: промінь, що пройшов паралельно осі параболи, після відбиття від параболи потрапляє в її фокус.

Одна зі стінок більярду має форму параболи, в її фокусі розташовано лузу для кульки. З гірки, яку можна переміщувати перпендикулярно до осі параболи, скочується кулька. У будь-якому положенні гірки кулька завжди котиться паралельно осі параболи і завжди потрапляє в лузу.

Готуємося до ДПА

Міст Ракотцбрюке, Німеччина

ПРИГАДАЙТЕ!
$D=b^2-4ac$ — дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c; $x_в$ — абсциса вершини параболи.



Томас Алва Едісон (англ. *Thomas Alva Edison*, 1847–1931) — всесвітньо відомий американський винахідник, підприємець. Саме йому ми завдячуємо створенням першого вдалого варіанта електричної лампи розжарювання, електровоза, фонографа тощо. Він удосконалив телеграф, телефон (а також запропонував починати телефонну розмову словом «алло») та багато іншого.

3 Знайдіть:

1) значення a і b, при яких числа 2 і $\frac{1}{3}$ є нулями функції $y=ax^2+bx+2$;

2) значення m і n, при яких графік функції $y=x^2+mx+n$ проходить через точки $(-2;21)$ і $(3;-4)$;

3) значення b, при якому проміжок $[4;+\infty)$ є проміжком зростання функції $y=2x^2-bx-1$;

4) значення m, при якому проміжок $(-\infty;-2]$ є проміжком спадання функції $y=-\frac{1}{3}x^2+mx+2$;

5) значення c, при якому ордината вершини параболи $y=2x^2-4x+c$ дорівнює -11;

6) значення a, при якому найбільше значення функції $y=2a-x^2+2x$ дорівнює 18.

4 Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$, якщо:

1) $a>0,\ D>0,\ c<0,\ x_в>0$;
2) $a>0,\ D=0,\ x_в<0$;
3) $a<0,\ D>0,\ c<0,\ x_в<0$;
4) $a<0,\ D<0,\ x_в>0$;
5) $a>0,\ D<0,\ x_в<0$;
6) $a<0,\ D=0,\ x_в>0$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $x_в=7$ — абсциса вершини параболи, яка є графіком функції $y=x^2+bx+c$, то ця функція спадає при $x\in(-\infty;7]$.

2) Якщо $x_в=2$ — абсциса вершини параболи, яка є графіком функції $y=-x^2+bx+c$, то ця функція зростає при $x\in(-\infty;2]$.

3) Якщо $x_в=-3$ — абсциса вершини параболи $y=ax^2+bx+c$, то $\frac{b}{2a}=-3$.

4) Якщо точка $(4;0)$ — вершина параболи $y=ax^2+bx+c$, то $b^2-4ac=0$.

5) Якщо точка $(4;-3)$ належить графіку квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ і $x=5$ — вісь симетрії цієї параболи, то точка $(6;-3)$ також належить цій параболі.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

1 Укажіть проміжок, на якому функція $y=(x-4)^2$ зростає.

А	Б	В	Г
$[-4;+\infty)$	$[4;+\infty)$	$(-\infty;4]$	$(-\infty;-4]$

2 Знайдіть область значень функції $y=(x-1)^2+2$.

А	Б	В	Г
$(-\infty;1]$	$(-\infty;2]$	$[1;+\infty)$	$[2;+\infty)$

3 Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y=x^2-6x+9$ з віссю Oy.

А	Б	В	Г
$(0;9)$	$(9;0)$	$(0;3)$	$(3;0)$

4 Визначте нулі функції $y=x^2-4x-5$.

А	Б	В	Г
5; 1	5; −1	−5; 1	−5; −1

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Франк Шуман (1862–1918), відомий американський винахідник, побудував у Єгипті у 1912–1913 рр. першу сонячну термальну електростанцію. Зараз його ідеї використовуються під час побудови сучасних параболічних електростанцій.

5 Вітки параболи $y=ax^2-7x+2$ напрямлені вниз. Яке з чисел *може* бути значенням коефіцієнта a?

А	Б	В	Г
$\sqrt{3}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{2}{9}$	3

6 Установіть відповідність між формулою, якою задано квадратичну функцію (1–3), та абсцисою вершини її графіка (А–Г).

1	$y=(x-5)^2-1$	А	$x_в=-5$
2	$y=5+(x-1)^2$	Б	$x_в=-1$
3	$y=x^2+10x+1$	В	$x_в=1$
		Г	$x_в=5$

7 Змоделюємо рух акробата під час стрибка. Приймемо спортсмена за матеріальну точку. Траєкторію його польоту можна змоделювати графіком функції $y=-\frac{3}{4}x^2+3x$. Місце, з якого акробат стрибнув, є початком координат. Тоді x — відстань (у м) по горизонталі між поточним положенням точки й початком координат, y — відстань (у м) по вертикалі від підлоги спортзалу (висота, на якій перебуває матеріальна точка).

1) Побудуйте графік заданої функції, якщо $x\in[0;4]$.
2) Визначте, на яку найбільшу висоту піднявся акробат під час стрибка.

8 Задано квадратичну функцію $y=x^2+bx+8$.

1) Знайдіть значення b, при якому графік цієї функції проходить через точку $M(-1;3)$, і запишіть формулу, якою задано функцію.
2) Побудуйте графік цієї функції та знайдіть проміжки її знакосталості.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Спеціалісти зі спецефектів добре знають математику. Координати, вектори, тривимірний простір, алгоритми — і ось унаслідок математичних розробок на екрані монітора мчить торнадо або спалахує полум'я.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ІСТОРИЧНИЙ ФІЛЬМ»

Під час зйомок історичного фільму було виготовлено механічну катапульту для метання каменів. Траєкторію польоту каменя можна описати формулою $y=-0{,}001x^2+0{,}2x$, де x — відстань (у м) по горизонталі від катапульти (початок координат) до каменя, y — висота (у м) каменя над землею.

1. На яку найбільшу відстань катапульта метає камінь?
2. На яку найбільшу висоту над землею катапульта метає камінь?
3. На якій відстані від стіни фортеці необхідно розташувати катапульту, щоб камінь, досягнувши найбільшої висоти, пролетів над стіною? Якою має бути висота стіни, щоб камінь у цей момент не пошкодив її?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1. Побудуйте за алгоритмом графік функції:

1) $y=x^2+2x+1$; 3) $y=x^2-2x-3$;

2) $y=2x-x^2$; 4) $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x-3$.

Див. приклад 2

2. Знайдіть значення невідомих коефіцієнтів, при яких графік заданої квадратичної функції проходить через указані точки. Запишіть формулу, якою задано функцію. Дослідіть функцію.

1) $y=-x^2+bx$, $A(-1;-8)$;

2) $y=x^2+4x+c$, $A(-5;-7)$;

3) $y=-x^2+bx+c$, $M(-2;15)$, $N(3;-20)$;

4) $y=ax^2+bx+c$, $M(0;40)$, $N(1;26)$, $K(-1;58)$.

3. Розв'яжіть задачу.

1) Струмінь води музичного фонтану є параболою, яку можна описати рівнянням $y=ax^2+bx$, $x\in[0;4]$. Знайдіть значення коефіцієнтів a і b, якщо відомо, що $y(4)=0$ і вода піднімається на найбільшу висоту 3 м, тобто $y(2)=3$.

2) Футболіст б'є по нерухомому м'ячу в напрямку воріт суперника. Траєкторія польоту м'яча може бути змодельована графіком функції $y=-\frac{1}{80}x^2+\frac{1}{2}x$, де x — відстань (у м) по горизонталі від футболіста (точки удару) до м'яча, y — висота (у м), на яку піднімається м'яч над полем.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Струмінь води у фонтані має форму параболи, що залежить від кута, під яким струмінь випускається. Оптимальними є кути 50°–60°.

а) Побудуйте графік заданої функції, якщо $x \in [0; 40]$.

б) Визначте, на яку найбільшу висоту піднявся м'яч над футбольним полем.

3) Залежність кількості q (у шт.) светрів, проданих протягом одного тижня, від ціни p (у грн) одного светра можна задати формулою $q = 120 - 0{,}12p$. Дохід за тиждень r (у грн) підприємства, що продає ці светри, обчислюється за формулою $r(p) = p \cdot q$.

а) Знайдіть кількість q светрів, проданих протягом одного тижня, якщо ціна одного светра становила 300 грн.

б) Визначте тижневий дохід підприємства від реалізації светрів, якщо ціна одного светра становила 400 грн.

в) Побудуйте графік функції $y = r(p)$, якщо $p \in [0; 1000]$.

г) Знайдіть ціну p (у грн), за якої тижневий дохід підприємства буде найбільшим. Визначте цей дохід.

4) Траєкторія руху жаби прудкої під час стрибка може бути змодельована графіком функції $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, де x — відстань (у м) по горизонталі від жаби до місця, з якого вона стрибнула, y — висота (у м), на яку жаба стрибає над землею.

а) Побудуйте графік заданої функції, якщо $x \in [0; 3]$.

б) Визначте, на яку найбільшу висоту над землею стрибнула жаба.

в) З'ясуйте, чи може ця жаба перестрибнути перешкоду заввишки 90 см.

Бонусні завдання

4 Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 4|$;   2) $y = |x^2 - x + 12|$.

5 Знайдіть значення a, при яких:

1) функція $y = 3x^2 - 4x + a$ набуває додатних значень при всіх дійсних значеннях x;

2) функція $y = -2x^2 - 3x + a$ набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях x.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть нулі та проміжки знакосталості квадратичної функції:

1) $y = 1 - x^2$;   3) $y = x^2 + 7x - 18$;   5) $y = x^2 + 10x + 25$;

2) $y = 18x - x^2$;   4) $y = -x^2 + 8x + 20$;   6) $y = x^2 + 2x + 2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Футбольний м'яч летить по параболічній траєкторії, форма якої залежить від того, з якою швидкістю і під яким кутом до горизонту вдарено по м'ячу. Саме у виборі цих параметрів і полягає мистецтво футболіста.

Див. приклад 3

IQ

TO BE SMART

Академія Хана — міжнародна освітня мережа, заснована Салманом Ханом. Його короткі освітні відеоуроки присвячені різним предметам і темам. Навчання проходить у формі комп'ютерної гри — там є підказки, бали, рівні... Усі завдання розподілено на модулі. Ви можете побачити графік особистого прогресу. Дізнайтеся більше: www.youtube.com/KhanAcademyUkrainian

«Найважливіше завдання цивілізації — навчити людину мислити.»

Томас Едісон

§ 13 КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ

ВЧОРА	Ви розв'язували лінійні нерівності, будували графіки квадратичних функцій, визначали їх нулі та проміжки знакосталості
СЬОГОДНІ	Ви ознайомитеся з двома способами розв'язування квадратних нерівностей — графічним та аналітичним
ЗАВЖДИ	Ви зможете прогнозувати прибутки підприємства залежно від запропонованих моделей маркетингу, оцінювати висоту стрибка спортсмена тощо

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Бокінг (від англ. *bocking*) — новий вид екстремального спорту, а саме пробіжки та стрибки на ходулях із пружинами — джамперах. На джамперах можна виконувати стрибки заввишки 2 м і завдовжки 6 м, пересуватися кроками в 3–4 метри, розвиваючи швидкість до 40 км/год.

Бокінг стає дедалі популярнішим у світі, виникають бокерські клуби, проводяться збори бокерів з Європи та Америки.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Траєкторія руху юнака, який займається бокінгом, під час стрибка описується функцією $y=-0{,}32x^2+1{,}6x$ (рис. 1), де x — відстань (у м) по горизонталі від місця, з якого він стрибнув, y — висота (у м) його стрибка над землею. При яких значеннях x висота стрибка бокера перевищує 1,28 м?

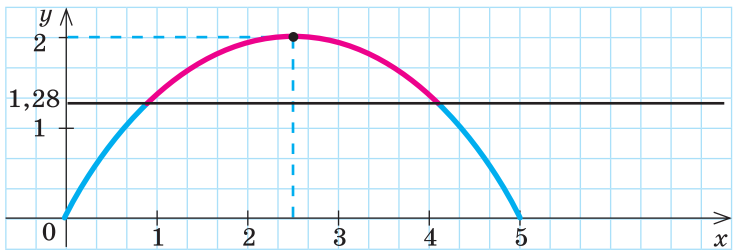


Рис. 1

Коментар до розв'язання

Щоб відповісти на запитання задачі, слід знайти ті значення x, при яких значення функції $y=-0{,}32x^2+1{,}6x$ є більшими за 1,28 м. Отже, задача зводиться до розв'язання нерівності $-0{,}32x^2+1{,}6x>1{,}28$. У цьому параграфі ви ознайомитеся зі способами розв'язування таких нерівностей.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Нерівності виду $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$), де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$, називають **квадратними нерівностями.**

Квадратні нерівності можуть бути строгими (знаки «>» або «<») і нестрогими (знаки «⩾» або «⩽»).

Для розв'язування квадратних нерівностей найчастіше застосовують *графічний* і *аналітичний* способи. Розглянемо їх.

ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

У попередніх параграфах, досліджуючи функції, ми визначали проміжки їх знакосталості. Тобто для функції $y=f(x)$ знаходили ті значення x, при яких функція набуває значень одного знака: $y>0$ або $y<0$. Таким чином, фактично ми розв’язували нерівності $f(x)>0$ або $f(x)<0$. Для квадратичної функції ці нерівності мають вигляд $ax^2+bx+c>0$ і $ax^2+bx+c<0$.

Наприклад, розглянемо графік функції $y=x^2+2x-3$ (рис. 2).

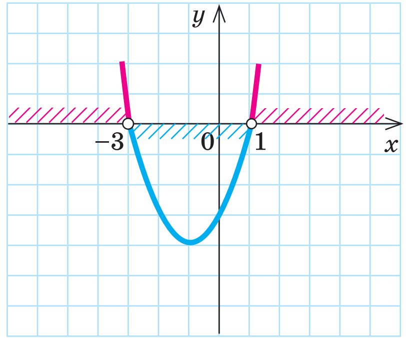


Рис. 2

У тричлені x^2+2x-3 старший коефіцієнт $a=1$ — додатне число, отже, вітки параболи напрямлені вгору. Графік функції перетинає вісь Ox в точках із абсцисами $x_1=-3$ та $x_2=1$, значення функції $y=x^2+2x-3$ в цих точках дорівнює нулю, тобто $x_1=-3$ та $x_2=1$ — *нулі функції*.

Графік функції розташований нижче від осі Ox на проміжку $(-3;1)$, тобто функція $y=x^2+2x-3$ на цьому проміжку набуває від’ємних значень.

Графік функції розташований вище за вісь Ox на проміжках $(-\infty;-3)$ і $(1;+\infty)$, тобто функція $y=x^2+2x-3$ на цих проміжках набуває додатних значень.

Проаналізувавши графік функції, запишемо проміжки її знакосталості, тобто знайдемо множини розв’язків квадратних нерівностей $x^2+2x-3<0$ і $x^2+2x-3>0$:

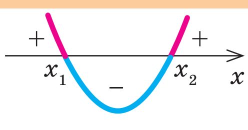
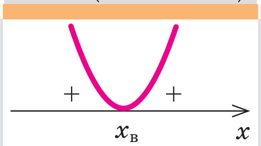
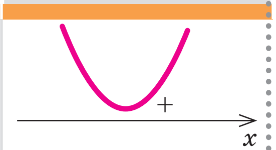
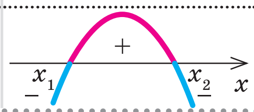
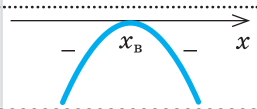
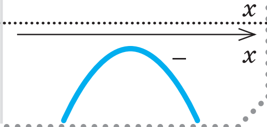
- $x^2+2x-3<0$ при $x\in(-3;1)$;
- $x^2+2x-3>0$ при $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Зауважимо, що координати вершини параболи при цьому знаходити не потрібно.

Отже, для розв’язування квадратних нерівностей графічним способом достатньо:

- схематично зобразити розміщення графіка функції відносно осі Ox, враховуючи напрям віток параболи і наявність нулів функції;
- визначити за графіком проміжки знакосталості функції.

Наявність і кількість нулів функції визначає положення параболи $y=ax^2+bx+c$ відносно осі абсцис. Можливі шість випадків залежно від знака дискримінанта D квадратного тричлена ax^2+bx+c і знака коефіцієнта a.

Знак a	$D>0$ $(x_1\neq x_2)$	$D=0$ $(x_1=x_2=x_в)$	$D<0$ (нулів не існує)
$a>0$			
$a<0$			

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратна нерівність
- строгі та нестрогі нерівності
- нулі функції
- проміжки знакосталості
- графічний спосіб розв’язування нерівностей
- метод інтервалів

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Для визначення проміжків знакосталості квадратичної функції необхідно знайти її нулі. Саме вони розбивають числову пряму на проміжки, на яких функція зберігає свій знак.
- Від наявності та кількості нулів квадратичної функції залежить, якими є проміжки її знакосталості.

ПРИГАДАЙТЕ!

Знак нерівності	Зображення точок	Дужки
$\leqslant$ $\geqslant$	—●—	[;]
$<$ $>$	—○—	(;)

Розв'язуючи нерівність, враховуйте, строгою чи нестрогою вона є! Можливі випадки розв'язування квадратних нерівностей наведено на с. 177.

Якщо необхідно знайти проміжок, на якому значення функції:

- більші за нуль $(ax^2+bx+c>0)$, то шукаємо числовий проміжок, на якому парабола розташована вище за вісь Ox;
- менші від нуля $(ax^2+bx+c<0)$, то шукаємо числовий проміжок, на якому парабола розташована нижче від осі Ox.

Якщо квадратна нерівність нестрога, то нулі функції входять у числовий проміжок (їх позначають зафарбованими кружечками і для запису застосовують квадратні дужки). Якщо нерівність строга, то нулі функції не входять до проміжку (їх називають «виколотими» точками і для запису застосовують круглі дужки).

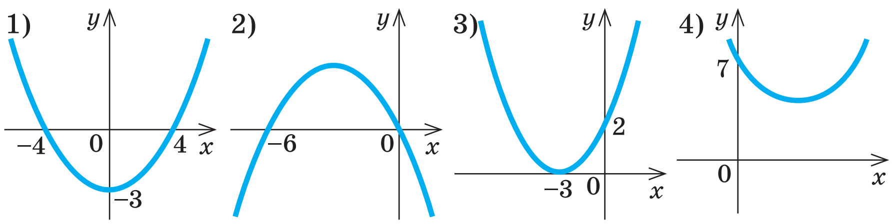
ПОМІРКУЙТЕ

Серед наведених функцій визначте ті, що мають сталий знак. Укажіть цей знак.

1) $y=x^2-x+6$;
2) $y=x^2+5x+1$;
3) $y=a^2-2a+7$;
4) $y=-t^2+t-10$;
5) $y=4a^2-a+1$;
6) $y=-a^2+a-2$.

РОЗМИНКА 1

За рисунками, на яких зображено графіки квадратичних функцій $y=ax^2+bx+c$, знайдіть значення x, що задовольняють задану умову.



$ax^2+bx+c>0$ $\quad$ $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $\quad$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$ $\quad$ $ax^2+bx+c<0$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо квадратний тричлен не має коренів (тобто $D<0$), то відповідна функція завжди має сталий знак, причому цей знак збігається зі знаком старшого коефіцієнта.

Узагальнюючи вивчене, сформулюємо алгоритм розв'язування квадратних нерівностей графічним способом.

АЛГОРИТМ

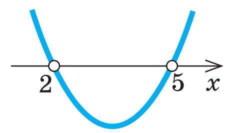
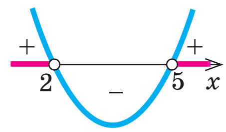
Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей графічним способом

1. Для заданої нерівності ввести відповідну функцію $y=ax^2+bx+c$.
2. Визначити напрям віток параболи та нулі функції.
3. Схематично зобразити параболу, враховуючи її розташування відносно осі абсцис.
4. Визначити проміжки знакосталості функції ($y>0$, $y<0$).
5. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть нерівність $x^2-7x+10>0$ графічним способом.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо функцію $y=ax^2+bx+c$, де ax^2+bx+c — квадратний тричлен, що стоїть у лівій частині заданої нерівності.	$y=x^2-7x+10$
КРОК 2	Визначимо напрям віток параболи, яка є графіком отриманої функції.	Вітки параболи напрямлені вгору, оскільки $a=1$, тобто $a>0$
КРОК 3	Знайдемо нулі функції.	$x^2-7x+10=0$; $x_1=2$, $x_2=5$ — нулі функції
КРОК 4	Схематично зобразимо параболу, враховуючи напрям її віток та нулі функції. Задана в умові нерівність строга, тому точки 2 і 5 «виколоті».	
КРОК 5	Визначимо проміжки знакосталості функції і виберемо ті проміжки, які позначено знаком «+», оскільки за умовою $x^2-7x+10>0$.	 $x\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$

Відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть графічним способом нерівність:

1) $1-x^2\leqslant 0$;
2) $x^2-9<0$;
3) $x^2+x>0$;
4) $5x-x^2\geqslant 0$;
5) $-x^2+6x-9\geqslant 0$;
6) $x^2-2x+1>0$;
7) $x^2-4x<12$;
8) $x^2\geqslant 6x+7$.

АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо ще один спосіб, за допомогою якого можна розв'язувати квадратні нерівності.

Наприклад, необхідно розв'язати нерівність $x^2-2x-8>0$. Знайдемо корені квадратного тричлена x^2-2x-8 ($x_1=4$, $x_2=-2$) та розкладемо його за відомою вам формулою на лінійні множники: $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Формула розкладання квадратного тричлена на лінійні множники:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

де x_1, x_2 — корені квадратного тричлена.

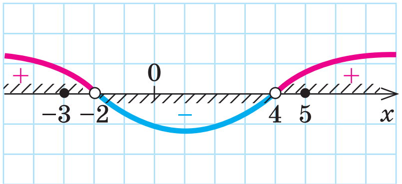


Рис. 3

Позначимо корені квадратного тричлена на числовій прямій (рис. 3). Відповідні точки розбивають її на три проміжки: $(-\infty; -2)$, $(-2; 4)$, $(4; +\infty)$. На кожному з них квадратний тричлен зберігає знак.

З'ясуємо, яких значень (додатних чи від'ємних) набуває квадратний тричлен на цих проміжках. Скористаємося для цього одним із таких способів.

1) Оцінити знак добутку $(x-4)(x+2)$ на кожному проміжку, враховуючи правила множення додатних і від'ємних чисел.
2) Підставити довільне число, що належить проміжку, у квадратний тричлен x^2-2x-8 замість змінної. Отриманий знак і буде знаком тричлена на всьому проміжку.

ПРИГАДАЙТЕ!

«–» · «–» = «+»;

«–» · «+» = «–»;

«+» · «+» = «+»

Зазвичай вибирають той спосіб, який для заданої нерівності буде зручнішим. Зауважимо, що знайдені знаки тричлена доцільно позначати на рисунках.

Застосуємо обидва способи для оцінювання знака квадратного тричлена x^2-2x-8 на кожному з отриманих проміжків.

Проміжок	Оцінювання знака добутку на проміжку	Оцінювання значення квадратного тричлена в точці на проміжку
$(-\infty; -2)$	Якщо $x<-2$, то $x-4<0$, $x+2<0$, *Висновок:* $(x-4)(x+2)>0$.	Якщо $x=-3$, то $x^2-2x-8=(-3)^2-2\cdot(-3)-8=7$, $7>0$. *Висновок:* $x^2-2x-8>0$.
$(-2; 4)$	Якщо $-2<x<4$, то $x-4<0$, $x+2>0$. *Висновок:* $(x-4)(x+2)<0$.	Якщо $x=0$, то $x^2-2x-8=(0)^2-2\cdot(0)-8=-8$, $-8<0$. *Висновок:* $x^2-2x-8<0$.
$(4; +\infty)$	Якщо $x>4$, то $x-4>0$, $x+2>0$. Висновок: $(x-4)(x+2)>0$.	Якщо $x=5$, то $x^2-2x-8=5^2-2\cdot5-8=7$, $7>0$. *Висновок:* $x^2-2x-8>0$.

Для запису розв'язків нерівності $x^2-2x-8>0$ слід вибрати ті проміжки, на яких тричлен набуває додатних значень. Це два проміжки: $(-\infty; -2)$ і $(4; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Отже, ми розв'язали квадратну нерівність, не виконуючи побудови параболи, тобто аналітичним способом. Для цього:

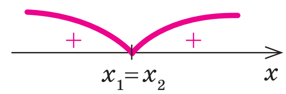
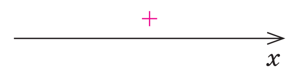
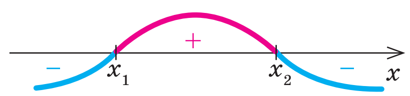
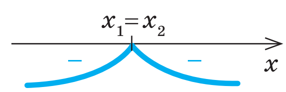
- знайшли корені квадратного тричлена;
- зобразили на числовій прямій точки, що відповідають кореням;
- з'ясували знаки квадратного тричлена на кожному з проміжків, на які було розбито числову пряму коренями квадратного тричлена.

СЛІД ЗНАТИ!

Аналітичний спосіб розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів.**

За допомогою цього методу розв'язують не лише квадратні, а й інші нерівності, які ви вивчатимете в наступних класах.

Зобразимо схематично знаки квадратного тричлена ax^2+bx+c на проміжках числової прямої залежно від знаків його першого коефіцієнта a і дискримінанта D.

	$D>0$ $(x_1 \neq x_2)$	$D=0$ $(x_1 = x_2)$	$D<0$ (коренів немає)
$a>0$			
$a<0$			

Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей аналітичним способом

1. Для заданої нерівності знайти корені відповідного квадратного тричлена ax^2+bx+c.
2. Якщо корені існують:
   - зобразити корені на числовій прямій, тобто розбити її на проміжки точками, що відповідають знайденим кореням;
   - на кожному проміжку визначити знак тричлена ax^2+bx+c;
   - обрати проміжки, на яких значення функції має знак, що відповідає знаку нерівності.
3. Якщо коренів немає, врахувати, що знак квадратного тричлена ax^2+bx+c є сталим і збігається зі знаком старшого коефіцієнта a.
4. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

АЛГОРИТМ

СЛІД ЗНАТИ!
Для визначення знака тричлена ax^2+bx+c на проміжку можна підставити довільне число, що належить проміжку, у вираз ax^2+bx+c замість змінної. Отриманий знак і буде знаком тричлена на всьому проміжку.

РОЗМИНКА 2

1 Розв'яжіть аналітичним способом нерівність:

1) $(x+3)(x-7)<0$; 4) $(6-2x)(3x-4)>0$; 7) $x^2+7\leqslant 0$;

2) $(x-1)(x+3)\geqslant 0$; 5) $x^2-16\geqslant 0$; 8) $(x+5)^2<0$.

3) $(2x+5)(3x-4)\leqslant 0$; 6) $(x-3)^2\leqslant 0$;

2 Зведіть задану нерівність до рівносильної нерівності з додатним старшим коефіцієнтом:

1) $-x^2+x-10<0$; 3) $4-x-\frac{1}{2}x^2>0$; 5) $-\frac{1}{4}x^2>-1$;

2) $5x-x^2\geqslant 0$; 4) $0{,}2x-x^2\leqslant 0$; 6) $-10x^2\leqslant 40x$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Якщо у квадратній нерівності значення старшого коефіцієнта a від'ємне, то цю нерівність можна перетворити в нерівність із додатним старшим коефіцієнтом, помноживши обидві частини заданої нерівності на (-1) і змінивши знак нерівності на протилежний.

Квадратні нерівності будь-якого виду можна звести до квадратних нерівностей виду $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$ за допомогою рівносильних перетворень (див. § 5).

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть нерівність $(2-x)(x+2)+9(x-2)<2(x^2-3)-2$. У відповідь запишіть найменший натуральний розв'язок нерівності.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкриємо дужки та спростимо вирази в лівій та правій частинах нерівності. Перенесемо всі доданки у ліву частину нерівності, зведемо подібні доданки.	$4-x^2+9x-18<2x^2-8$; $4-x^2+9x-18-2x^2+8<0$; $-3x^2+9x-6<0$
КРОК 2	Перетворимо отриману нерівність у нерівність із додатним старшим коефіцієнтом: поділимо обидві її частини на -3 та змінимо знак нерівності на протилежний.	$-3x^2+9x-6<0 \,\vert :(-3)$ $x^2-3x+2>0$
КРОК 3	Відповідно до алгоритму розв'язування квадратних нерівностей аналітичним способом знайдемо корені квадратного тричлена.	$x^2-3x+2=0$; $x_1=1$, $x_2=2$
КРОК 4	Розіб'ємо числову пряму отриманими числами на проміжки та з'ясуємо знаки на кожному проміжку. Оскільки знак заданої нерівності «більше», виберемо проміжки зі знаком «+».	 $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$
КРОК 5	Виберемо найменший натуральний розв'язок нерівності.	Точки $x=1$ і $x=2$ не входять у визначені проміжки, тому найменший натуральний розв'язок $x=3$

Відповідь: 3.

ПРИГАДАЙТЕ!
Рівносильні перетворення нерівностей — § 5 (с. 57).

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть нерівність:

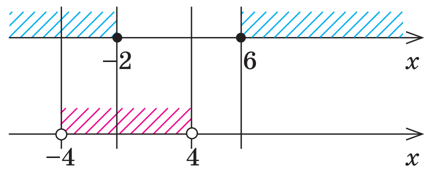
1) $x(x-10)\geqslant 5(5-2x)$;
2) $x(x+14)<7(2x+14)$;
3) $(x-2)(x+2)>3x$;
4) $(x-3)(x+3)\leqslant 8x$;
5) $x(x+1)+2<2(1-x)$;
6) $x(x-5)+4\geqslant 2(x+2)$;
7) $(\sqrt{3}-x)(x+\sqrt{3})+3(x-1)\geqslant 2(x^2+5)+1$;
8) $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)-8(x-2)<4(x^2-1)+30$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2-4x-12\geqslant 0, \\ x^2<16. \end{cases}$

У відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розв'яжемо окремо першу нерівність системи.	$x^2-4x-12\geqslant 0$; $x^2-4x-12=0$; $x_1=-2$, $x_2=6$.  $x\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$
КРОК 2	Розв'яжемо другу нерівність системи.	$x^2<16$; $x^2-16<0$; $x^2-16=0$; $x_1=-4$; $x_2=4$.  $x\in(-4;4)$
КРОК 3	Знайдемо спільні розв'язки обох нерівностей, тобто переріз множин їх розв'язків.	 $x\in(-4;-2]$
КРОК 4	Визначимо цілі розв'язки системи та знайдемо їх суму.	$x_1=-3$, $x_2=-2$ — цілі розв'язки системи нерівностей; $x_1+x_2=-3+(-2)=-5$

Відповідь: −5.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 4x^2\geqslant 1, \\ 3x<6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x^2>1, \\ 4x\leqslant 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2<9x, \\ \dfrac{x}{2}-3\leqslant 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2\leqslant -18x, \\ \dfrac{x}{3}+5<0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-3x-18\leqslant 0, \\ x^2>1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+x-30<0, \\ x^2\geqslant 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+4x-12>0, \\ |x|\leqslant 10; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+5x-14\geqslant 0, \\ |x|<5. \end{cases}$

ПРИГАДАЙТЕ!

Для $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

де $D=b^2-4ac$;

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Готуємося до ДПА

На тестуванні ДПА та ЗНО найбільшої кількості помилок учні припускаються саме під час розв'язування нерівностей.

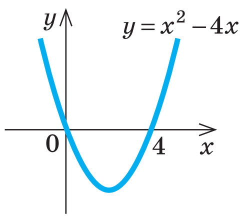
Розгляньте приклади розв'язування нерівностей, наведені в таблиці, знайдіть помилку та опрацюйте правильне розв'язання.

Нерівність	Неправильне розв'язання	Правильне розв'язання
$-x^2+7x-12<0$	$-(x-3)(x-4)<0$; $(x-3)(x-4)<0$. *Відповідь:* $x\in(3;4)$.	$x^2-7x+12>0$; $(x-3)(x-4)>0$: *Відповідь:* $x\in(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$.
$x^2+8x+16\geqslant0$	$(x+4)^2\geqslant0$; $x+4\geqslant0$; $x\geqslant-4$. *Відповідь:* $x\in[-4;+\infty)$.	$(x+4)^2\geqslant0$. Нерівність $(x+4)^2\geqslant0$ виконується для всіх значень x, тобто x — будь-яке число. *Відповідь:* $x\in(-\infty;+\infty)$.
$x^2-6x+9>0$	$(x-3)^2>0$. Нерівність $(x-3)^2>0$ виконується для всіх значень x, тобто x — будь-яке число. *Відповідь:* $x\in(-\infty;+\infty)$.	$(x-3)^2>0$. При $x=3$ маємо $(x-3)^2=0$, отже, $x\neq3$. *Відповідь:* $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.
$x^2+4x+4\leqslant0$	$(x+2)^2\leqslant0$. Розв'язків немає. *Відповідь:* $\varnothing$.	$(x+2)^2\leqslant0$. Нерівність $(x+2)^2\leqslant0$ виконується при єдиному значенні $x=-2$. *Відповідь:* $x=-2$, або $\{-2\}$.
$x^2+3x+4>0$	$D=3^2-4\cdot1\cdot4=-7$. Оскільки $D<0$, то розв'язків немає. *Відповідь:* $\varnothing$.	Оскільки старший коефіцієнт — додатне число і $D<0$, то для будь-якого значення x ліва частина нерівності — додатне число. *Відповідь:* $x\in(-\infty;+\infty)$.
$x^2-49\leqslant0$	$x^2\leqslant49$; $x\leqslant7$. *Відповідь:* $x\in(-\infty;7]$.	$(x-7)(x+7)\leqslant0$; $-7\leqslant x\leqslant7$. *Відповідь:* $x\in[-7;7]$.
$x^2-25\geqslant0$	$x^2\geqslant25$; $x\geqslant5$. *Відповідь:* $x\in[5;+\infty)$.	$(x-5)(x+5)\geqslant0$; $x\leqslant-5$, $x\geqslant5$. *Відповідь:* $x\in(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$.

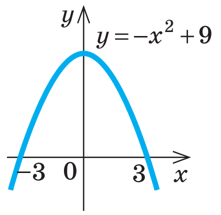
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 За допомогою графіка розв'яжіть нерівність:

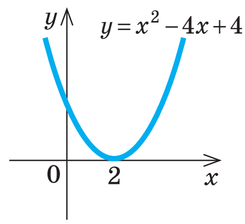
1) $x^2-4x\leqslant 0$;



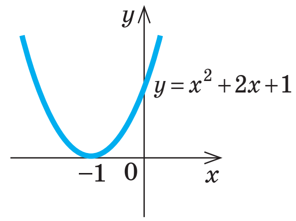
2) $9-x^2>0$;



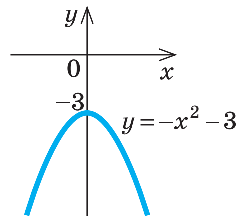
3) $x^2-4x+4>0$;



4) $x^2+2x+1\leqslant 0$;

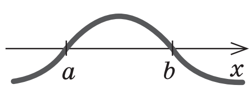


5) $-x^2-3<0$.

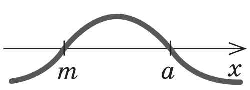


2 Користуючись рисунком, на якому позначено нулі та проміжки знакосталості функції $y=f(x)$, розв'яжіть нерівність:

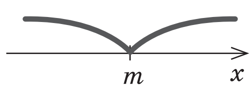
1) $f(x)>0$;



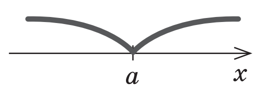
2) $f(x)\leqslant 0$;



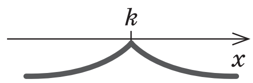
3) $f(x)\leqslant 0$;



4) $f(x)<0$;



5) $f(x)<0$.



3 Розв'яжіть графічним способом нерівність:

1) $x^2-8x<0$;
2) $x^2+4x\geqslant 0$;
3) $x^2-4x-5>0$;
4) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}\leqslant 0$;
5) $2x^2+4>0$;
6) $-x^2-9\geqslant 0$.

4 Розв'яжіть аналітичним способом нерівність:

1) $10x^2-20x\geqslant 0$;
2) $-4t^2+16<0$;
3) $9x^2-49<0$;
4) $100-4x^2>0$;
5) $x^2-12x+36<0$;
6) $t^2+10t+26\geqslant 0$.

5 Розв'яжіть нерівність:

1) $t^2-20t+21\geqslant 0$;
2) $-\frac{1}{2}t^2+4t<0$;
3) $16t^2-24t+9>0$;
4) $3a^2+5a+2<0$;
5) $4y^2-y+1<0$;
6) $-5m^2+6m-11\geqslant 0$.

6 **Задача «Планування виробництва».** Компанія щомісяця виготовляє x одиниць сільськогосподарської продукції. Залежність доходу y (у тис. грн) компанії за місяць від x можна змоделювати функцією $y=80x-0{,}1x^2$, де $x\in[0;800]$. Визначте, якими мають бути значення x, щоб дохід:

1) перевищував 15 млн грн;
2) був найбільшим; розрахуйте цей дохід.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Україна вирощує в 7 разів більше зерна, ніж вирощують кави в усьому світі.
- Кількість меду, який експортує Україна, є такою, що кожний мешканець Фінляндії може куштувати щодня по 1 чайній ложці меду протягом 6 місяців!
- Перший рамковий вулик винайшов український бджоляр Петро Прокопович у 1814 р.

СЛІД ЗНАТИ!

У нерівностях, ліва частина яких записана у вигляді добутку, нулі функції $y=f(x)$ зручніше шукати як корені x_1 і x_2 рівняння $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Готуємося до ДПА

ПРИГАДАЙТЕ!

- Формула розкладання квадратного тричлена на лінійні множники:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

де x_1, x_2 — корені квадратного тричлена.

- $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$;
- $\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$(x-3)^2<16$;
$x-3<4$;
$x<7$;
$x\in(-\infty;7)$.

7 Розв'яжіть нерівність:

1) $(y-3)(y+6)\leqslant 0$;
2) $(2x+16)(14-x)>0$;
3) $(3x-1)(3x+1)-(x-2)^2+5\geqslant 0$;
4) $t(2t-1)-(t+3)^2<21$;
5) $\frac{x^2-11}{2}-\frac{x+3}{4}\leqslant 2x^2$;
6) $y+\frac{y^2+3y}{8}>\frac{3}{2}+\frac{y-1}{4}$.

8 Знайдіть множину розв'язків нерівності та запишіть відповідь згідно із заданою умовою.

1) $-4x^2+10x\leqslant 0$, найбільший від'ємний розв'язок;
2) $16-y^2>0$, сума всіх цілих розв'язків;
3) $t^2-7t+10<0$, найменший натуральний розв'язок;
4) $-2a^2+3a-1\leqslant 0$, найменший додатний парний розв'язок;
5) $\frac{3}{2}y^2-\frac{5}{2}y+1\leqslant 0$, найбільше ціле від'ємне число, яке НЕ є розв'язком нерівності;
6) $-4x^2-9x-2<0$, сума цілих чисел, які НЕ є розв'язками нерівності.

9 Перетворивши нерівність так, щоб її права частина дорівнювала нулю, знайдіть усі розв'язки нерівності:

1) $t^2\geqslant 1$;
2) $4x^2\leqslant 9$;
3) $2x^2-x<-1$;
4) $25a\geqslant a^2$;
5) $t^2+t\leqslant 2$;
6) $6t+18t^2>42t$.

10 Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{6x+2x^2}$;
2) $y=\sqrt{16-x^2}$;
3) $y=\sqrt{x^2-x+3}$;
4) $y=\sqrt{20-8x-x^2}$;
5) $y=\frac{2x}{\sqrt{5x^2-3x-2}}$;
6) $y=\frac{x-5}{\sqrt{-2x^2+5x+2}}$.

11 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2-2x-15\leqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x+\frac{x}{3}<1, \\ x^2-7x-18\geqslant 0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2-49\leqslant 0, \\ 7x^2\leqslant 4x; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2>1, \\ 2x\leqslant 4x^2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 14+5t-t^2\leqslant 0, \\ t^2-t-2>0; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 2y^2-11y\geqslant 6, \\ y^2-y-12<0. \end{cases}$

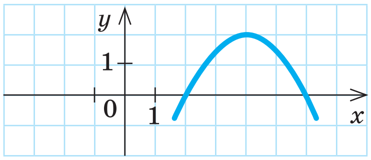
ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

1 Використовуючи фрагмент графіка функції $y=-0,5x^2+4x-6$, зображений на рисунку, розв'яжіть нерівність $-0,5x^2+4x-6\geqslant 0$.



А	Б	В	Г
$(-\infty;4]$	$[2;6]$	$(-\infty;2]\cup[6;+\infty)$	$[0;2]$

2 Розв'яжіть нерівність $x^2+5x-6<0$.

А $(-6;1)$	В $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$
Б $(-1;6)$	Г $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$

3 Розв'яжіть нерівність $(x-3)(x+5)\geqslant 0$.

А $[-5;3]$	В $(-\infty;-3]\cup[5;+\infty)$
Б $[-3;5]$	Г $(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$

4 Розв'яжіть нерівність $x^2-49>0$.

А $(-\infty;7)$	В $(-\infty;-7)\cup(7;+\infty)$
Б $(7;+\infty)$	Г $(-7;7)$

5 Розв'яжіть нерівність $x^2-x+2\geqslant 0$.

А $\varnothing$	В $[-1;2]$
Б $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$	Г $(-\infty;+\infty)$

6 Установіть відповідність між заданою нерівністю (1–3) та кількістю (А–Г) всіх її цілих розв'язків.

1	$(x+4)^2\leqslant 0$	А	Жодного
2	$x^2+4\leqslant 0$	Б	Один
3	$x^2+3x<0$	В	Два
		Г	Більше ніж два

7 За допомогою спеціального пристрою м'ячик підкинули вертикально вгору з поверхні землі. Висота (у м) м'ячика над землею змінюється за законом $h(t)=-5t^2+16t$, де t — час (у с), що пройшов із моменту кидка $(t=0)$.

1) Через скільки секунд після кидка м'ячик опиниться на землі?

2) Укажіть проміжок часу (у с), протягом якого висота м'ячика над землею була більшою за 11 м.

8 Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+3x-18\leqslant 0,\\ x+5>0.\end{cases}$$

Вірджинія (Джинні) Рометті (англ. *Virginia (Ginni) Rometty*, нар. 1957) — голова ради директорів, президент і генеральний директор компанії IBM, перша жінка, яка стала головою компанії. На думку Вірджинії, розвиток інформаційних технологій, зокрема технології точного аналізу та прогнозів, сприяє прийняттю максимально ефективних рішень.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $x_1=-10$ і $x_2=4$ — нулі функції $y=x^2+bx+c$, то множиною розв'язків нерівності $x^2+bx+c<0$ є проміжок $(-10;4)$.

2) Якщо функція $y=x^2+bx+c$ не має нулів, то нерівність $x^2+bx+c<0$ не має розв'язків.

3) Якщо функція $y=-x^2+bx+c$ не має нулів, то множиною розв'язків нерівності $-x^2+bx+c\leqslant 0$ є проміжок $(-\infty;+\infty)$.

4) Якщо $x=8$ є розв'язком нерівності $x^2+c\leqslant 0$, то $x=-8$ також є розв'язком цієї нерівності.

5) Якщо проміжок $(3;9)$ є множиною розв'язків нерівності $ax^2+bx+c>0$, то $a<0$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ»

Керівництву компанії, що займається продажем складного обладнання, для прогнозування прибутків запропоновано дві математичні моделі, засновані на різних методах маркетингу. Модель A має вигляд $y=8{,}5x-x^2$, модель B має вигляд $y=1{,}5x$, де x — кількість (у сотнях) проданих одиниць продукції, y — прогнозований прибуток (у тис. грн).

Для яких значень x за моделлю B прогнозується більший прибуток, ніж за моделлю A?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Маркетологи — спеціалісти, які здійснюють аналітичну роботу з вивчення смаків покупців та розробляють концепцію просування товару на ринку.

Маркетологи повинні мати аналітичні здібності, вміти мислити творчо й нестандартно, втілювати в життя свої ідеї.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклади 1–3

1 Розв'яжіть нерівність:

1) $4-x^2\geqslant 0$; 2) $x^2-6x>0$; 3) $-x^2+8x-16\geqslant 0$; 4) $3x+10>x^2$.

2 Розв'яжіть нерівність:

1) $x(12-x)\geqslant 12(x-3)$; 3) $x(x+6)+8\leqslant 4(x+2)$;

2) $(x-4)(x+4)>15x$; 4) $(\sqrt{2}-x)(x+\sqrt{2})+4(x-3)\leqslant 3(x^2-4)+5$.

3 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}16x^2\geqslant 1,\\ 3x<9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2<-15x,\\ \dfrac{x}{7}+2\leqslant 0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2+x-20\leqslant 0,\\ x^2>9;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2-5x-24>0,\\ |x|\leqslant 7.\end{cases}$

4 Знайдіть множину розв'язків нерівності і запишіть відповідь згідно із заданою умовою.

1) $2x^2 - 18x \leqslant 0$, найменший натуральний розв'язок;

2) $-15x - 5x^2 > 0$, найменший цілий від'ємний розв'язок;

3) $2t^2 + 5t + 2 > 0$, найменше ціле від'ємне число, яке НЕ є розв'язком нерівності;

4) $-3a^2 + 8a + 3 \leqslant 0$, середнє арифметичне цілих чисел, які НЕ є розв'язками нерівності.

Див. завдання 8–11 «Інтелектуального фітнесу»

5 Знайдіть усі розв'язки нерівності:

1) $m^2 \leqslant 16$; 2) $2y^2 \geqslant 18$; 3) $3x^2 - 10x \leqslant -3$; 4) $2 \leqslant -7t - 3t^2$.

6 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^2 - 5x}$;

2) $y = \sqrt{12x + 16x^2}$;

3) $y = \frac{7x}{\sqrt{x^2 - x - 90}}$;

4) $y = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{11x + 4 - 3x^2}}$.

7 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 + 2x - 8 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 \geqslant 25, \\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 \leqslant 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -x^2 + 3x > -10, \\ 2x^2 - 7x > 39. \end{cases}$

Бонусні завдання

8 Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 - 6x + 9)\sqrt{x} \leqslant 0$;

2) $(x - 5)^2(x^2 - 7x + 10) < 0$;

3) $(x + 3)(x^2 + 6x + 9) \geqslant 0$;

4) $(x - 3)(x + 7)(x - 1)(x + 2) \leqslant 0$.

9 Знайдіть значення k, при якому не має коренів рівняння:

1) $x^2 + kx + 25 = 0$;

2) $x^2 - (k - 3)x + 4 = 0$;

3) $3x^2 - (2k + 3)x + 2k = 0$;

4) $kx^2 + (k + 4)x + (k + 4) = 0$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 - y = 5, \\ 3x = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y = -3, \\ 2y = -6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + y = 5, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 5y = 14, \\ -x + 3y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x + 3y = -18, \\ x + 3y = -6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 7y = -11, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$

IQ

TO BE SMART

В Україні діють курси бізнесу для підлітків, засновані на принципі відомої програми Master of Business Administration (магістр бізнес-адміністрування).

Навчаючись в інтерактивній формі за програмою «Школа бізнесу MBA для підлітків», ви зможете вивчити основи маркетингу, продажів, реклами, набути практичних навичок за цими напрямами, поглибити свої знання з окремих тем, прослухавши додаткові курси.

Дізнайтеся більше: center-balu.com.ua/ua_shkola_biznesa_mba_dlya_podrostkov/

«Будь першим — і ти станеш єдиним.»

Вірджинія Рометті

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 12—13

1 Ви познайомилися з квадратичною функцією та її властивостями, навчилися будувати графік квадратичної функції.

Квадратична функція — функція, що задається формулою виду $y=ax^2+bx+c$, де x — незалежна змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$.

Графік квадратичної функції — **парабола**.

Вітки параболи $y=ax^2+bx+c$ напрямлені: **вгору** при $a>0$; **вниз** при $a<0$.

Графік завжди перетинає вісь Oy в точці $(0;c)$.

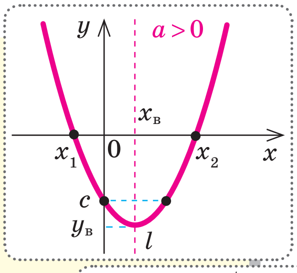
Вісь симетрії параболи — пряма, що проходить через її вершину паралельно осі Oy.

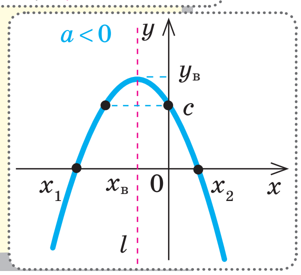
Координати вершини параболи $(x_в;y_в)$:

$y=ax^2+bx+c$	$\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$
$y=a(x+m)^2+n$	$(-m;n)$
$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	$\left(x_в=\dfrac{x_1+x_2}{2};\ y_в(x_в)\right)$

Алгоритм побудови графіка квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$

1. Визначити напрям віток параболи.
2. Знайти абсцису вершини параболи.
3. Записати рівняння осі симетрії параболи: $x=x_в$.
4. Знайти ординату вершини параболи.
5. Знайти нулі функції (якщо вони існують). Записати координати точок перетину з віссю Ox.
6. Знайти точку перетину графіка функції з віссю Oy.
7. Знайти (за необхідності) додаткові «зручні» точки графіка.
8. Позначити знайдені точки на координатній площині та сполучити їх плавною лінією.





Властивості функції $y=ax^2+bx+c$

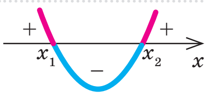
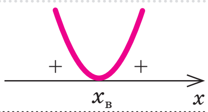
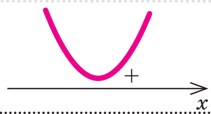
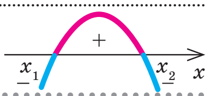
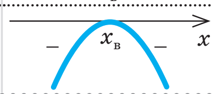
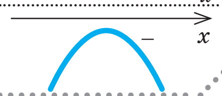
		$a>0$	$a<0$
Область визначення		$D(y)\colon x\in(-\infty;+\infty)$	
Множина значень		$E(y)\colon\ y\in[y_в;+\infty)$	$E(y)\colon\ y\in(-\infty;y_в]$
Проміжки зростання та спадання		$y\uparrow$ при $x\in[x_в;+\infty)$, $y\downarrow$ при $x\in(-\infty;x_в]$	$y\uparrow$ при $x\in(-\infty;x_в]$, $y\downarrow$ при $x\in[x_в;+\infty)$.
Нулі функції		x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$	
Проміжки знакосталості	$D>0$ $(x_1\neq x_2)$	$y>0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, $y<0$ при $x\in(x_1;x_2)$	$y>0$ при $x\in(x_1;x_2)$, $y<0$ при $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
	$D=0$ $(x_1=x_2)$	$y>0$ при $x\in(-\infty;x_в)\cup(x_в;+\infty)$, $y<0$ не існує	$y>0$ не існує, $y<0$ при $x\in(-\infty;x_в)\cup(x_в;+\infty)$
	$D<0$ (нулів функції не існує)	$y>0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$, $y<0$ не існує	$y>0$ не існує, $y<0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$

2 Ви дізналися, що таке квадратні нерівності, як їх розв'язувати різними способами.

Квадратні нерівності — нерівності виду $ax^2+bx+c>0$ і $ax^2+bx+c<0$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$. Квадратні нерівності бувають **строгі** та **нестрогі**.

Алгоритм розв'язування квадратної нерівності (графічний спосіб)

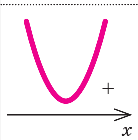
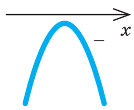
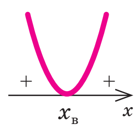
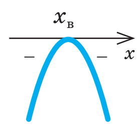
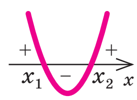
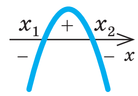
1. Для заданої нерівності розглянути відповідну функцію $y=ax^2+bx+c$.
2. Визначити напрям віток параболи та нулі функції.
3. Схематично зобразити параболу, враховуючи її розташування відносно осі абсцис.
4. Визначити проміжки знакосталості функції ($y>0$, $y<0$).
5. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

Знак a	$D>0$ $(x_1\neq x_2)$	$D=0$ $(x_1=x_2=x_в)$	$D<0$ (нулів не існує)
$a>0$			
$a<0$			

Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей (аналітичний спосіб)

1. Для заданої нерівності знайти корені відповідного квадратного тричлена ax^2+bx+c.
2. Якщо нулі існують:
   - зобразити корені на числовій прямій;
   - на кожному проміжку визначити знак тричлена ax^2+bx+c;
   - вибрати проміжки, на яких значення функції має знак, що відповідає знаку нерівності.
3. Якщо нулів немає, врахувати, що знак квадратного тричлена ax^2+bx+c є сталим, причому збігається зі знаком старшого коефіцієнта a.
4. Записати відповідь.

Розв'язки квадратних нерівностей

Квадратна нерівність	ax^2+bx+c					
	$D<0$		$D=0$		$D>0$	
	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
						
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;x_в)\cup$ $\cup(x_в;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;x_1)\cup$ $\cup(x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$x=x_в$	$(-\infty;x_1]\cup$ $\cup[x_2;+\infty)$	$[x_1;x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;x_в)\cup$ $\cup(x_в;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$(-\infty;x_1)\cup$ $\cup(x_2;+\infty)$
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$x=x_в$	$(-\infty;+\infty)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1]\cup$ $\cup[x_2;+\infty)$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

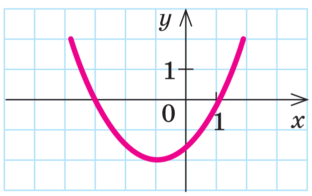
1 Знайдіть координати вершини параболи квадратичної функції $y=(x-1)^2+8$.

А	Б	В	Г
$(-1;8)$	$(1;8)$	$(8;1)$	$(8;-1)$

2 Знайдіть точку перетину графіка функції $y=x^2-4x+4$ з віссю Oy.

А	Б	В	Г
$(2;0)$	$(4;0)$	$(0;4)$	$(0;2)$

3 Використовуючи фрагмент графіка функції $y=0{,}5x^2+x-1{,}5$, зображений на рисунку, розв'яжіть нерівність $0{,}5x^2+x-1{,}5\leqslant 0$.



А	Б	В	Г
$x\in[-3;1]$	$x\in(-\infty;-1]$	$x\in(-\infty;-3]\cup$ $\cup[1;+\infty)$	$x\in[-2;0]$

4 Розв'яжіть нерівність $x(x+9)>0$.

А	Б	В	Г
$x\in(-9;0)$	$x\in(0;9)$	$x\in(-\infty;0)\cup$ $\cup(9;+\infty)$	$x\in(-\infty;-9)\cup$ $\cup(0;+\infty)$

5 Розв'яжіть нерівність $-x^2+100\geqslant 0$.

А	Б	В	Г
$x\in[-10;10]$	$x\in(-\infty;-10]\cup$ $\cup[10;+\infty)$	$x\in(-\infty;10]$	$x\in[10;+\infty)$

6 Розв'яжіть нерівність $x^2-3x+4\geqslant 0$.

А	Б	В	Г
$\varnothing$	$x\in(-\infty;-1]\cup$ $\cup[4;+\infty)$	$x\in(-\infty;+\infty)$	$x\in[-1;4]$

7 Розв'яжіть нерівність $5(x-2)\leqslant(2-x)(2+x)$.

8 Дано квадратичну функцію $y=-x^2-2x+c$.

1) Знайдіть значення c, при якому графік поданої функції проходить через точку $M(-2;3)$. Запишіть формулу, якою задано функцію.

2) Побудуйте графік цієї функції та визначте проміжки її зростання та спадання.

9 Каскадер стрибає у воду з висоти 45 м. Його висота над водою (у м) змінюється за законом $h(t)=45-5t^2$, де t — час (у с), що пройшов із моменту стрибка $(t=0)$.

1) Визначте, через скільки секунд після стрибка каскадер опиниться у воді.

2) Укажіть проміжок часу (у с), протягом якого каскадер залишався на висоті, більшій за 25 м.

10 Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} x^2-10x-11>0, \\ |x|\leqslant 12. \end{cases}$$

Бонусне завдання

Розв'яжіть нерівність $|x^2-4x|<3$.

§ 14 СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

ВЧОРА — Ви розв'язували лінійні, раціональні, квадратні рівняння та системи лінійних рівнянь із двома змінними

СЬОГОДНІ — Ви ознайомитеся з графічним та аналітичним способами розв'язування систем двох рівнянь із двома змінними, з яких хоча б одне рівняння — другого степеня

ЗАВЖДИ — Ви зможете розробляти схеми туристичних маршрутів, визначати місцезнаходження людей, розташування на місцевості будь-яких об'єктів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

На рис. 1 зображено схему двох ліній метрополітену, які планують побудувати в місті. Ці лінії у введеній прямокутній системі координат описуються рівняннями $2x-3y=0$ і $4x^2+7y^2=64$. У точках перетину ліній будуть побудовані станції переходу між лініями. Визначте координати цих станцій.

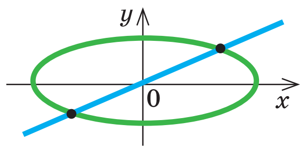


Рис. 1

Коментар до розв'язання

Координати точок перетину ліній можна визначити безпосередньо за рисунком. Проте цей спосіб не є точним. Щоб знайти точні значення координат, застосовують аналітичні способи розв'язування систем рівнянь. Система $\begin{cases}2x-3y=0;\\4x^2+7y^2=64\end{cases}$ відрізняється від систем лінійних рівнянь тим, що друге рівняння не є лінійним.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Організувати роботу метрополітену допомагають математичні моделі формування вхідного пасажиропотоку станцій. Ці моделі дозволяють не тільки керувати потоками, а й прогнозувати їх.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ПРИГАДАЙТЕ!

- **Розв'язок системи рівнянь із двома змінними** x і y — пара чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком *кожного з рівнянь системи*, тобто перетворює кожне з них у правильну числову рівність.
- **Розв'язати систему рівнянь** означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

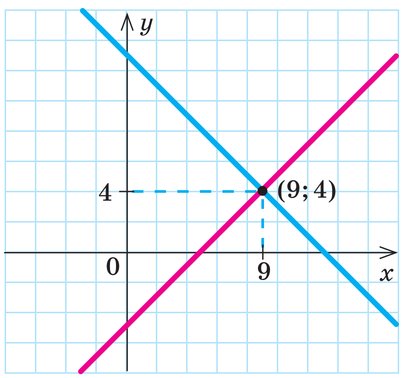
- система рівнянь
- розв'язок системи рівнянь
- графічний спосіб
- спосіб підстановки
- спосіб алгебраїчного додавання
- метод заміни змінних

РОЗМИНКА 1

Визначте, чи є наведені пари чисел розв'язками заданої системи рівнянь:

1) $(-2;1)$, $(2;-4)$; $\begin{cases}2x+y=-3,\\x^2+y^2=5.\end{cases}$ 2) $(2;1)$, $(-1;1)$; $\begin{cases}y=x^2,\\x^2-y^2=0.\end{cases}$

У 7 класі ви розв'язували системи лінійних рівнянь із двома змінними різними способами — графічним та аналітичними (способи підстановки та додавання). Пригадаємо їх і розв'яжемо трьома способами систему рівнянь $\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=13. \end{cases}$

Графічний спосіб	Спосіб підстановки (аналітичний)	Спосіб додавання (аналітичний)
1. Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи $\begin{cases} y=x-5, \\ y=13-x. \end{cases}$ 2. Знайдемо координати точок перетину графіків.  3. Запишемо відповідь: координати точки перетину графіків $(9;4)$ є розв'язком заданої системи рівнянь.	1. Виразимо з одного рівняння системи змінну y через змінну x (або навпаки). 2. Підставимо цю змінну в інше рівняння системи: $\begin{cases} y=x-5, \\ x+(x-5)=13. \end{cases}$ 3. Розв'яжемо отримане рівняння з однією змінною: $2x-5=13$; $x=9$. 4. Підставимо отримане значення x в перше рівняння системи: $y=x-5=9-5=4$. 5. Запишемо відповідь: $(9;4)$.	1. Додамо обидва рівняння системи почленно (окремо ліві та праві частини). Отримаємо: $+\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=13 \end{cases}$ $2x=18,$ $x=9.$ 2. Підставимо отримане значення x в будь-яке рівняння системи: $y=x-5=9-5=4$; $y=4$. 3. Запишемо відповідь: $(9;4)$.

Розв'язуючи рівняння, ви здійснюєте їх рівносильні перетворення. Поняття рівносильності використовують і для перетворення систем рівнянь.

СЛІД ЗНАТИ!

Дві системи рівнянь називають **рівносильними**, якщо ці системи мають одні й ті самі розв'язки або не мають розв'язків.

ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

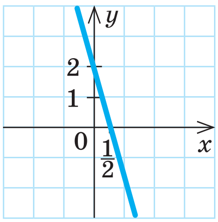
Пригадайте, щоб розв'язати систему рівнянь графічно, слід:

- побудувати в одній системі координат графіки рівнянь системи;
- знайти спільні точки графіків (координати цих точок і є розв'язками системи рівнянь).

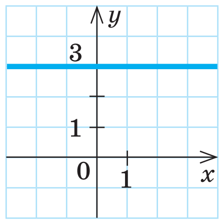
Зауважимо, що часто для побудови графіків рівнянь зручно звести їх до класичного вигляду відомого рівняння або функції.

Розглянемо приклади запису рівнянь у вигляді, зручному для побудови їх графіків (див. таблицю).

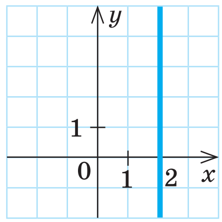
1) $2x+\frac{1}{2}y-1=0 \to$ $\to y=-4x+2$



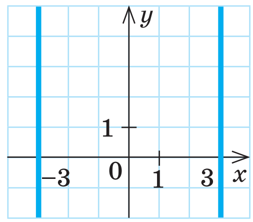
2) $y-3=0 \to$ $\to y=3$



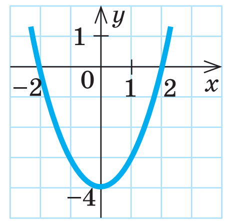
3) $2-x=0 \to$ $\to x=2$



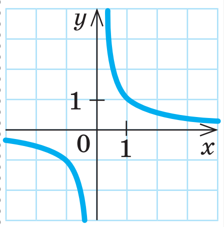
4) $|x|-3=0 \to$ $\to |x|=3,\ x=\pm3$



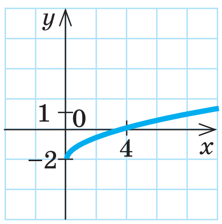
5) $x^2-y=4 \to$ $\to y=x^2-4$



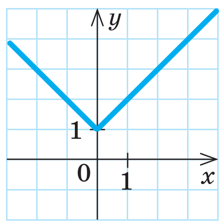
6) $xy=1 \to$ $\to y=\frac{1}{x}$



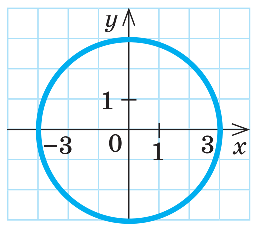
7) $y+2=\sqrt{x} \to$ $\to y=\sqrt{x}-2$



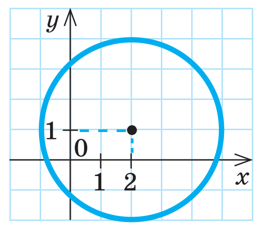
8) $y-1=|x| \to$ $\to y=|x|+1$



9) $x^2=9-y^2 \to$ $\to x^2+y^2=3^2$



10) $(x-2)^2=9-(y-1)^2 \to$ $\to (x-2)^2+(y-1)^2=3^2$



Ми вже говорили про те, що перевагою графічного способу порівняно з іншими є наочність, а недоліком — неточність. Через цей недолік графічний спосіб не завжди є зручним для визначення розв'язків систем рівнянь. Але за допомогою графічного способу зручно визначати кількість розв'язків систем рівнянь.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Методи розв'язування систем рівнянь залежать від того, які рівняння входять у систему.

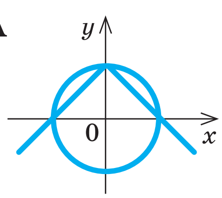
- Системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язують методами Крамера, Гауса, ітерацій тощо.
- Для систем нелінійних рівнянь загального аналітичного розв'язання не знайдено.

РОЗМИНКА 2

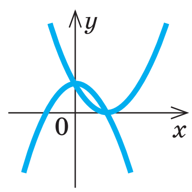
З'ясуйте кількість розв'язків систем рівнянь, установивши відповідність між системами рівнянь (1–4) та їх графічними інтерпретаціями (А–Д).

1 $\begin{cases} xy=2, \\ x-y=3 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} \sqrt{x}+y=0, \\ y-x-7=0 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} |x|+y=2, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ **4** $\begin{cases} y=(x-2)^2 \\ y=4-x^2 \end{cases}$

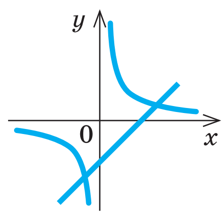
А



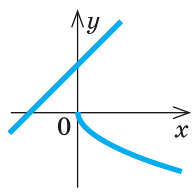
Б



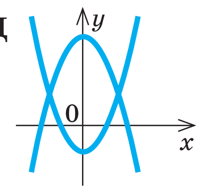
В



Г



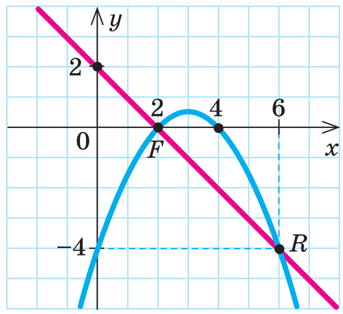
Д



ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} 3x-4=y+\frac{1}{2}x^2; \\ y+x=2. \end{cases}$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зведемо кожне рівняння системи до вигляду функції $y=f(x)$.	$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ — квадратична функція; $y=2-x$ — лінійна функція
КРОК 2	Проаналізуємо отримані функції, визначимо «зручні» точки для побудови графіків цих функцій.	1) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$, графік — парабола з вершиною в точці $(3;0{,}5)$, вітки напрямлені вниз, $y(0)=-4$; нулі функції: $x=2$, $x=4$. 2) $y=2-x$, графік — пряма
КРОК 3	Побудуємо в одній системі координат графіки обох функцій та визначимо точки їх перетину. Зробимо висновок.	 $F(2;0)$, $R(6;-4)$ Пари чисел $(2;0)$ і $(6;-4)$ є наближеними розв'язками заданої системи
КРОК 4	Перевіримо, чи є отримані розв'язки точними. Для цього здійснимо їх безпосередню підстановку в кожне рівняння системи.	$\begin{cases} 3\cdot2-4=0+2, \\ 0+2=2 \end{cases}$ (правильно); $\begin{cases} 3\cdot6-4=-4+\frac{1}{2}\cdot36, \\ -4+6=2 \end{cases}$ (правильно)

Відповідь: $(2;0)$; $(6;-4)$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь є зручним через свою наочність. Проте розв'язки, отримані внаслідок його застосування, можуть бути неточними. Перевірку розв'язків на точність виконують їх безпосередньою підстановкою в початкову систему рівнянь.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2y-x=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2y+x=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=1-(x-2)^2, \\ y=x-3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=-1+(x+1)^2, \\ y=x+2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy=2, \\ y=x^2-2x+1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy=-3, \\ y=3x^2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y-4=x(x-4), \\ \sqrt{x-2}-y=0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} y-9=x(x+6), \\ \sqrt{x+3}-y=0. \end{cases}$

АНАЛІТИЧНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Ви вже вмієте розв'язувати системи лінійних рівнянь *способом підстановки* та *способом алгебраїчного додавання*. Ці способи справедливі й для систем рівнянь, у яких одне або обидва рівняння не є лінійними.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Дії, описані в п. 1 цього алгоритму, зазвичай виконують із тим рівнянням системи, для якого це простіше зробити.

Алгоритм розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними способом підстановки

АЛГОРИТМ

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння системи.
2. Підставити отриманий вираз замість відповідної змінної в друге рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною — знайти один або декілька коренів (залежно від рівняння).
4. Підставити почергово кожний зі знайдених коренів рівняння у вираз, отриманий у п. 1.
5. Записати відповідь у вигляді пар значень змінних, знайдених у п. 3, 4.

Метод заміни змінної для розв'язування систем рівнянь можна застосувати таким чином.

1) Або ввести **одну** нову змінну і використати заміну тільки в **одному** рівнянні системи.

Наприклад: для розв'язання системи $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5, \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ вводимо одну змінну $t=\dfrac{x}{y}$. Перше рівняння матиме вигляд: $t+\dfrac{1}{t}=2{,}5$.

2) Або ввести **дві** нові змінні і використати їх одночасно в **обох** рівняннях системи.

Наприклад: для розв'язання системи $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y}+\dfrac{3}{2x+y}=2, \\ \dfrac{8}{x-3y}-\dfrac{9}{2x+y}=1 \end{cases}$ вводимо дві змінні: $a=\dfrac{2}{x-3y}$, $b=\dfrac{3}{2x+y}$. Ураховуючи, що $\dfrac{8}{x-3y}=4a$, $\dfrac{9}{2x+y}=3b$, записуємо систему у вигляді: $\begin{cases} a+b=2, \\ 4a-3b=1. \end{cases}$

ПОМІРКУЙТЕ!

Розв'яжіть систему рівнянь одним або кількома (якщо це можливо) аналітичними способами:

1) $\begin{cases} 3(x-4)=9, \\ 2y^2-x=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=x+4, \\ x^2+8y=20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 3y+7=x^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-y=-5, \\ 2x+y^2=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3(x+y)-xy=-1, \\ -6(x+y)-2xy=10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-5, \\ \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}=6. \end{cases}$

Алгоритм розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними способом алгебраїчного додавання

АЛГОРИТМ

1. Прирівняти коефіцієнти при одній зі змінних шляхом почленного множення обох рівнянь на підібрані відповідним чином множники.
2. Додати (або відняти) почленно два рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння.
4. Підставити знайдене значення змінної у будь-яке із заданих рівнянь.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Під час розв'язування систем рівнянь часто застосовують комбінацію кількох способів.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+xy=24, \\ y^2+xy=40. \end{cases}$

Розв'язання

Спосіб 1

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Використаємо спосіб додавання — додамо почленно обидва рівняння системи.	$+\begin{cases} x^2+xy=24, \\ y^2+xy=40 \end{cases}$ $x^2+2xy+y^2=64,\ (x+y)^2=64$
КРОК 2	Добудемо квадратний корінь з обох частин рівняння, отриманого на кроці 1, ураховуючи, що $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	$\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{64}$; $\lvert x+y\rvert=8$; $x+y=8$ або $x+y=-8$
КРОК 3	До кожного з отриманих рівнянь допишемо одне з рівнянь початкової системи, наприклад перше. Отримаємо дві незалежні системи рівнянь.	$\begin{cases} x+y=8, \\ x^2+xy=24 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+y=-8, \\ x^2+xy=24 \end{cases}$
КРОК 4	Розв'яжемо кожну систему способом підстановки. Розкладемо на множники ліву частину другого рівняння та підставимо в нього значення $x+y$ з першого рівняння.	$\begin{cases} x+y=8, \\ x(x+y)=24 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+y=-8, \\ x(x+y)=24; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=8, \\ x\cdot 8=24 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+y=-8, \\ x\cdot(-8)=24; \end{cases}$ $\begin{cases} y=5, \\ x=3 \end{cases}$ або $\begin{cases} y=-5, \\ x=-3 \end{cases}$

Спосіб 2

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо на множники ліву частину кожного рівняння. Розділимо почленно перше рівняння на друге, $y(y+x)\neq 0$.	$\begin{cases} x(x+y)=24, \\ y(y+x)=40; \end{cases}$ $\frac{x(x+y)}{y(y+x)}=\frac{24}{40}$; $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$
КРОК 2	Допишемо до одного з рівнянь початкової системи отримане рівняння.	$\begin{cases} x(x+y)=24, \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{5} \end{cases}$
КРОК 3	Розв'яжемо отриману систему способом підстановки. Виразимо з другого рівняння системи змінну y через змінну x та підставимо отримане значення y в друге рівняння.	$\begin{cases} y=\frac{5}{3}x, \\ x(x+y)=24; \end{cases}$ $x\left(x+\frac{5}{3}x\right)=24$; $x\cdot\frac{8}{3}x=24$; $\frac{8}{3}x^2=24$; $x^2=9$; $x_1=3$ або $x_2=-3$
КРОК 4	Для кожного значення x знайдемо відповідне значення y.	$y_1=\frac{5}{3}\cdot 3=5$; $y_2=\frac{5}{3}\cdot(-3)=-5$. Отже: $x_1=3$, $y_1=5$; $x_2=-3$, $y_2=-5$

Відповідь: $(-3;-5)$; $(3;5)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+2xy=55, \\ x^2-2xy=-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2+xy=1, \\ 4y-xy+4=0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 9x^2-5xy=-6, \\ y^2-xy=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2-3xy=4, \\ y^2+3xy=28; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+xy=5, \\ y^2+xy=20; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x^2-xy=8, \\ y^2-3xy=-8. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+xy=9, \\ 2x-xy+1=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-xy=35, \\ y^2-xy=14; \end{cases}$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=25, \\ x^2-2xy+y^2=16; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^2=25, \\ (x-y)^2=16; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=4; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=9, \\ 2y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4{,}5, \\ y=0{,}5. \end{cases}$

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{m-n}{n}+\dfrac{n}{m-n}=2, \\ (m+2)(n-3)=-6. \end{cases}$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо ОДЗ системи рівнянь, визначивши ОДЗ змінних кожного рівняння.	ОДЗ: $\begin{cases} n\neq 0, \\ m\neq n \end{cases}$
КРОК 2	Розглянемо перше рівняння системи. Введемо нову змінну та розв'яжемо відносно неї отримане рівняння, враховуючи ОДЗ нової змінної.	Заміна: $\dfrac{m-n}{n}=t$, тоді $\dfrac{n}{m-n}=\dfrac{1}{t}$; $t+\dfrac{1}{t}=2$; $\begin{cases} t^2-2t+1=0, \\ t\neq 0; \end{cases}$ $t=1$
КРОК 3	Повернемося до початкових змінних. Утворимо систему з отриманого рівняння та другого рівняння початкової системи.	$\dfrac{m-n}{n}=1$; $m-n=n$, отже, $m=2n$; $\begin{cases} m=2n, \\ (m+2)(n-3)=-6 \end{cases}$
КРОК 4	Розв'яжемо отриману систему способом підстановки — підставимо в друге рівняння системи $m=2n$ і розв'яжемо отримане квадратне рівняння.	$(2n+2)(n-3)=-6$; $2n^2-6n+2n-6=-6$; $2n^2-4n=0$; $2n(n-2)=0$; $n_1=0$ або $n_2=2$
КРОК 5	Проаналізуємо отримані значення n. Обчислимо значення m, яке відповідає знайденому значенню n.	$n=0$ не задовольняє ОДЗ, отже, $n=2$, $m=2n=4$

Відповідь: (4; 2).

СЛІД ЗНАТИ!

До системи рівнянь можуть входити дробово-раціональні рівняння. У такому випадку обов'язково треба враховувати область допустимих значень усіх змінних, що входять до кожного рівняння.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2, \\ x+y=-8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+2=-\dfrac{y}{x}, \\ x-y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{y}+\dfrac{y}{x-2y}=2, \\ xy=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{4x+y}{y}+2=-\dfrac{y}{4x+y}, \\ xy=-18; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{y}+\dfrac{y}{x+2y}=-2, \\ (x+1)(y-2)=-8; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x}+\dfrac{4x}{x+y}=4, \\ (x-4)(y+3)=8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+4\cdot\dfrac{x-y}{x+y}=-4, \\ y^2-x^2=72; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x-2y}+9\cdot\dfrac{x-2y}{2x+y}=6, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$

Готуємося до ДПА і ЗНО

ДОСЛІДЖЕННЯ КІЛЬКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Для розв'язання таких завдань доцільно використовувати графічний спосіб, тобто будувати графіки рівнянь і знаходити кількість точок їх перетину або координати цих точок.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Завдання на дослідження кількості розв'язків системи рівнянь пропонують на ДПА і ЗНО.

ПОМІРКУЙТЕ

- Скільки розв'язків мають системи рівнянь, графіки яких зображено на рис. 2–5?
- Як змінюється кількість розв'язків системи рівнянь залежно від розташування вершини параболи?

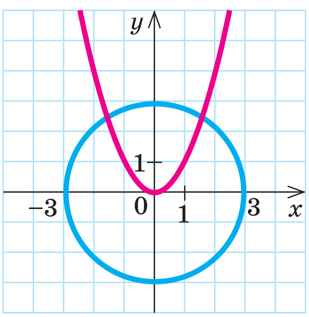


Рис. 2

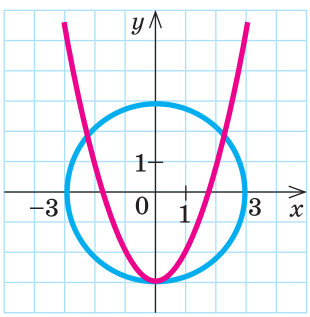


Рис. 3

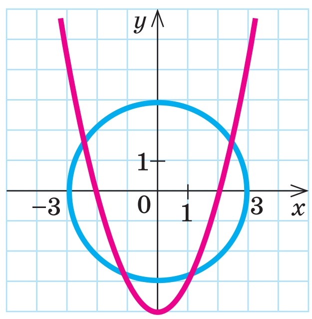


Рис. 4

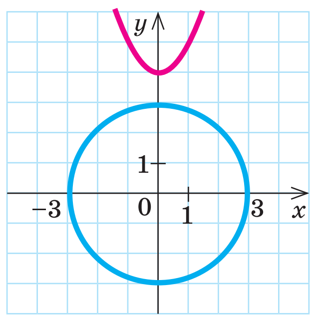


Рис. 5

У 7 класі ви розв'язували системи лінійних рівнянь і знаходили кількість їх розв'язків аналітичним способом — за умовою взаємного розташування графіків двох лінійних функцій. Тобто знаходили *відношення коефіцієнтів* рівнянь та порівнювали їх.

СЛІД ЗНАТИ!

Кількість розв'язків системи лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ залежить від рівності або нерівності відношень їх коефіцієнтів.

Система лінійних рівнянь із двома змінними:

1) **має єдиний розв'язок**, якщо коефіцієнти при змінних не є пропорційними: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тобто графіки рівнянь (прямі) перетинаються (рис. 6, *а*);
2) **не має розв'язків**, якщо коефіцієнти при змінних пропорційні, проте не пропорційні вільним членам: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі паралельні (рис. 6, *б*);
3) **має безліч розв'язків**, якщо всі коефіцієнти рівнянь пропорційні: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі збігаються (рис. 6, *в*).

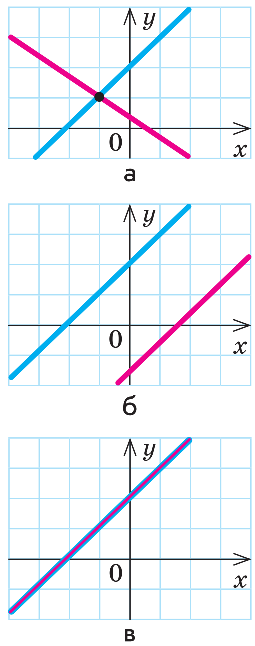


Рис. 6

ПРИКЛАД 4

Знайдіть значення m, при яких система рівнянь
$$\begin{cases}(m+1)x - y = m,\\(m-3)x + my = -9:\end{cases}$$

1) має єдиний розв'язок;
2) не має розв'язків;
3) має безліч розв'язків.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Знайдемо значення m, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок. Для цього складемо відношення коефіцієнтів при змінних і використаємо умову $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.	$\frac{m+1}{m-3} \neq -\frac{1}{m}$; $m^2 + m \neq -m + 3$; $m^2 + 2m - 3 \neq 0$
КРОК 2	Розв'яжемо рівняння $m^2 + 2m - 3 = 0$ і зробимо висновок.	$m^2 + 2m - 3 = 0$; $m_1 = -3$ або $m_2 = 1$. Отже, при $m \neq -3$, $m \neq 1$ система рівнянь має єдиний розв'язок.
2) КРОК 1	Знайдемо значення m, при яких система не має розв'язків. Використаємо умову $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.	$\frac{m+1}{m-3} = -\frac{1}{m} \neq \frac{m}{-9}$
КРОК 2	Знайдемо значення m, при яких перші два відношення дорівнюють одне одному.	$m^2 + m = -m + 3$; $m^2 + 2m - 3 = 0$; $m_1 = -3$, $m_2 = 1$
КРОК 3	Перевіримо умову $-\frac{1}{m} \neq \frac{m}{-9}$ для кожного з отриманих значень m і зробимо висновок.	1) $m = -3$, $-\frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{-9}$; $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$ (неправильно). 2) $m = 1$, $-\frac{1}{1} \neq -\frac{1}{9}$ (правильно). При $m = 1$ система не має розв'язків

Крок	Зміст дії	Результат дії
3) КРОК 1	Знайдемо значення m, при яких система має безліч розв'язків. Використаємо умову $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.	$\frac{m+1}{m-3}=-\frac{1}{m}=\frac{m}{-9}$
КРОК 2	Знайдемо значення m із рівності будь-яких двох відношень, наприклад другого й третього.	$-\frac{1}{m}=\frac{m}{-9}$; $m^2=9$, отже, $m_1=-3$ або $m_2=3$
КРОК 3	Перевіримо, при якому з отриманих значень m перші два відношення (або перше й третє) дорівнюють одне одному.	1) При $m=3$ вираз $\frac{m+1}{m-3}$ не існує. 2) При $m=-3$ $\frac{m+1}{m-3}=-\frac{1}{m}$; $\frac{-2}{-6}=-\frac{1}{-3}$ (правильно). При $m=-3$ система має безліч розв'язків

Відповідь: 1) єдиний розв'язок при $m\neq-3$ та $m\neq1$; 2) немає розв'язків при $m=1$; 3) безліч розв'язків при $m=-3$.

- $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ — єдиний розв'язок;
- $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ — немає розв'язків;
- $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ — безліч розв'язків

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Знайдіть значення m, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

1) $\begin{cases}mx-3y=5,\\2x+3y=-5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=m,\\-x+y=3;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}mx+(2m-1)y=2,\\2x+(m+1)y=m+3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-4y=2,\\2x+my=-3;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}mx+18y=6,\\x-6y=m+1;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}mx+(2-m)y=-2,\\x+my=m.\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-6y=5,\\x+y=m;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}4x-my=m-1,\\2x+7y=1;\end{cases}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Системи квадратних рівнянь із багатьма змінними застосовують у сучасній асиметричній криптографії. Щоб обчислити ключ, слід розв'язати систему рівнянь. Зі співвідношення кількості змінних і кількості рівнянь роблять висновок щодо надійності системи.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases}y-4=x,\\x^2-2=y;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}xy=8,\\\sqrt{x^2}=y;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2+y+2=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\y-3=x;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+4=y-4x,\\x-y=-4;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}xy=-2,\\y+2x^2=0.\end{cases}$

2 Розв'яжіть аналітичним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(x+y)^2=16,\\x^2+xy+y^2=13;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\x-3y=10;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}4x^2-2y^2=-2,\\2x=\frac{1}{3}y+3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x+3)(y-1)=4,\\2x+y=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y-x^2=2x+1,\\y-x=1;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2-xy-y^2=5,\\x-4y-1=0.\end{cases}$

3 Розв'яжіть аналітичним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y-\dfrac{x}{y}=5, \\ \dfrac{x(x+y)}{y}=-6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ 6x-y^2=-3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-x=3, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2xy-\dfrac{3x}{y}=-20, \\ \dfrac{6x}{y}-xy=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-\dfrac{2x}{y}=3{,}5, \\ x^2-\dfrac{1}{4}y=2. \end{cases}$

4 Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x-y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3xy=-2, \\ x-3xy=8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=36, \\ 3y-x=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3+y^3=-19, \\ x+y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+3x=5, \\ 3y-xy=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 9x^2-1=6xy-y^2, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

5 Використовуючи графічний спосіб, знайдіть значення a, при яких система рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a \end{cases}$ має 1 розв'язок; 3) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2-3a \end{cases}$ має 3 розв'язки;

2) $\begin{cases} y=x^2-4, \\ y=-a \end{cases}$ має 2 розв'язки; 4) $\begin{cases} y=x^2+a, \\ |y|=5 \end{cases}$ має 4 розв'язки.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=-1, \\ x+y=1 \end{cases}$ не має розв'язків.

2) Система рівнянь $\begin{cases} y-x^2=3, \\ x^2=y-3 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

3) Якщо точка $(1;4)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то $(1;4)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+f(x)=5, \\ y-x=3. \end{cases}$

4) Якщо $x=2$ — нуль функції $y=f(x)$, то $(2;0)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+f(x)=2, \\ y^2-x=-2. \end{cases}$

5) Якщо графік функції $y=f(x)$ розташований лише в другій координатній чверті, то система рівнянь $\begin{cases} y=f(x), \\ xy=1 \end{cases}$ не має розв'язків.

ПРИГАДАЙТЕ!

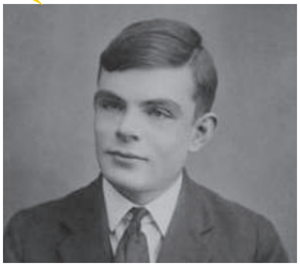
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ПРИГАДАЙТЕ!

- Кількість розв'язків системи рівнянь дорівнює кількості точок перетину графіків рівнянь.
- Система рівнянь не має розв'язків, якщо графіки рівнянь не перетинаються.
- Система рівнянь має безліч розв'язків, якщо графіки або частини графіків рівнянь збігаються.



Алан Матісон Тюрінг (англ. *Alan Mathison Turing*, 1912–1954) — англійський математик, логік, криптограф, якого вважають батьком інформатики, теорії штучного інтелекту. Під час Другої світової війни Тюрінг брав участь у зламуванні німецьких шифрів, що застосовувалися в шифрувальній машині «Енігма». Найпрестижніша нагорода в галузі інформатики має назву «Премія Тюрінга».

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

1 Яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=-4? \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(1;4)$	$(1;-4)$	$(-4;1)$	$(4;1)$

2 У рівнянні $\frac{x}{y}+\frac{3y}{x}=4$ зроблено заміну $\frac{x}{y}=t$. Яке рівняння одержали?

А	Б	В	Г
$t+\frac{3}{t}=4$	$t+\frac{1}{t}=4$	$t+3t=4$	$t+\frac{t}{3}=4$

3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y=2x, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(2;1)$, $(-2;-1)$	$(1;2)$, $(1;-2)$	$(1;2)$, $(-1;2)$	$(1;2)$, $(-1;-2)$

4 Знайдіть значення m, при якому система рівнянь $\begin{cases} mx+y=5, \\ 2x+y=5 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

А	Б	В	Г
Таких значень не існує	$m=1$	$m=2$	$m=5$

5 Знайдіть усі значення m, при яких система рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x+my=2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

А	Б	В	Г
$m\neq\frac{1}{2}$	$m\neq\frac{1}{3}$	$m\neq2$	$m\neq3$

6 Використовуючи графік рівняння $x^2+y^2=4$ (рис. 7), установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та кількістю її розв'язків (А–Г).

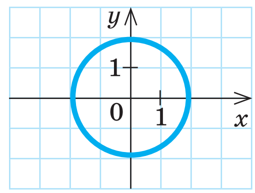


Рис. 7

1	$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x \end{cases}$	А	Жодного
2	$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+3 \end{cases}$	Б	Один
3	$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$	В	Два
		Г	Більше ніж два

7 На рис. 8 у прямокутній системі координат зображено схеми маршрутів двох круїзних океанських лайнерів. Маршрути є графіками рівнянь $x-y=2$ і $x^2-2x-y=2$. Визначте координати точок перетину цих маршрутів.

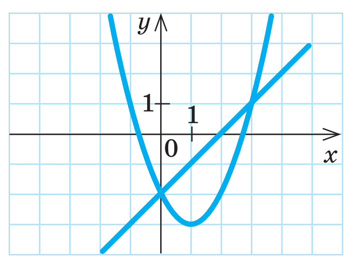


Рис. 8

8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+xy=-7, \\ y^2+xy=56. \end{cases}$

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТУРИСТСЬКІ МАРШРУТИ»

На рис. 9 зображено схеми двох туристських маршрутів у прямокутній системі координат. Маршрути описуються рівняннями $x+4y-y^2=3$ і $y-x=1$. Маршрут A має вигляд параболи, а маршрут B — прямої. У точках M і N перетину цих маршрутів заплановано відпочинок.

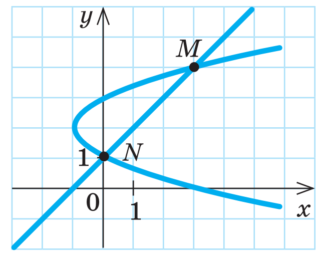


Рис. 9

1. Визначте координати точок M і N.
2. Який маршрут проходить через населений пункт, розташований в точці $(0;3)$?
3. Дві групи туристів, що рухаються за маршрутами A і B, зустрілися в точці N на відпочинку, а потім одночасно вирушили в напрямку точки M. За яким маршрутом рухається група, яка прийде в точку M раніше, якщо швидкості руху обох груп однакові? Відповідь поясніть.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 2014 р. лауреатами Нобелівської премії з фізіології або медицини стали нейрофізіолог Джон О'Кіф та психологи Едвард Мозер і Мей-Брітт Мозер, які відкрили просторові клітини мозку, що відповідають за систему орієнтування в просторі — так звану «внутрішню GPS».

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1. На рис. 10 зображено графік рівняння $x^2+y^2=2$. Скористайтеся цим графіком і розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x+y=0. \end{cases}$

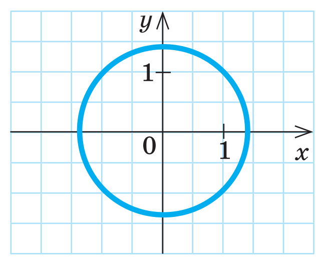


Рис. 10

2. Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y=1-(x+2)^2, \\ y=x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=-2, \\ y=x^2+2x+1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-9=x(x-6), \\ \sqrt{x-3}-y=0. \end{cases}$

Див. приклад 2

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ x^2-3xy=18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-xy=7, \\ y^2-xy=42; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-xy=4, \\ 6x+xy+9=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9x^2+2xy=3, \\ y^2+4xy=-3. \end{cases}$

Див. приклад 3

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2, \\ 2x-5y=18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{y}+\dfrac{9y}{x-3y}=6, \\ (x-1)(y+2)=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x}+\dfrac{x}{3x-y}=2, \\ 5xy=160; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{y-x}+9\cdot\dfrac{y-x}{2x+y}=-6, \\ 2x^2-7y^2=100. \end{cases}$

Див. приклад 4

5 Знайдіть значення m, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

1) $\begin{cases} 2x - my = 4, \\ x - 5y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ -x + 2y = m; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = m + 3, \\ mx - 6y = 14; \end{cases}$

4) $\begin{cases} mx + y = m + 6, \\ (m + 2)x + my = 16. \end{cases}$

Бонусні завдання

6 Знайдіть значення a, при яких система рівнянь має три розв'язки; два розв'язки; один розв'язок; чотири розв'язки:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ y - x^2 = a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ y = |x| + a. \end{cases}$

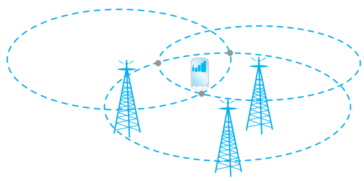
7 Зобразіть на числовій прямій множину розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} (7x - y)(2y - 5) = 0, \\ (2x - y + 5)(2y - 5) = 0. \end{cases}$

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть задачу.

1) Сума двох натуральних чисел x і y дорівнює 7, а їх добуток дорівнює 10. Знайдіть ці числа.
2) Довжина та ширина прямокутної ділянки дорівнюють x см та y см відповідно. Периметр цієї ділянки становить 16 см, а площа — 12 см^2. Знайдіть x і y.
3) Перша бригада виконує виробниче завдання за x год, а друга — за y год. Друга бригада, працюючи самостійно, виконує це завдання на 16 год довше, ніж перша. Працюючи разом, дві бригади виконують те саме завдання за 6 год. Знайдіть x і y.
4) Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному з міст A і B, відстань між якими становить 280 км. Швидкість першого автомобіля дорівнює x км/год, другого — y км/год. Через 2 год автомобілі зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух із тією самою швидкістю. Перший автомобіль прибув до міста B на 1 год 10 хв пізніше, ніж другий — до міста A. Знайдіть x і y.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Координати місцезнаходження людини можна визначити за її мобільним телефоном. Коли надходить такий запит, усі базові станції, на яких реєструється телефон, за певними алгоритмами визначають відстань між своєю антеною та антеною телефону, утворюючи круг або сектор круга, у якому може перебувати абонент. Перетин цих кругів (дуг) дає приблизні координати абонента.

TO BE SMART

Радимо прочитати

книжку Жуана Гомеса «Математики, шпигуни та хакери. Кодування та криптографія» (т. 2 багатотомного зібрання «Світ математики»).

Ця книжка допоможе поринути у світ кодування та шифрування, дізнатися історію секретних шифрів з точки зору математики.

«Ми можемо бачити тільки невеликий відрізок майбутнього шляху, але ми бачимо, як багато ще належить зробити.»

Алан Тюрінг

§ 15 СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

ВЧОРА — Ви розв'язували системи рівнянь із двома змінними, а також задачі за допомогою квадратних і дробово-раціональних рівнянь

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся розв'язувати задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами, на рух, сумісну роботу та інші за допомогою систем двох рівнянь із двома змінними

ЗАВЖДИ — Ви зможете складати математичні моделі реальних життєвих ситуацій

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Учні запитали вчителя математики: «Коли народився Льюїс Керролл?». На це запитання вчитель відповів так: «Льюїс Керролл, англійський письменник, математик, автор книжки «Аліса в Країні Див», народився в перший місяць 1832 року. День його народження виражається двоцифровим числом, у якого цифра десятків на 5 менша від цифри одиниць. Сума квадратів цифр цього числа дорівнює 53». У який день народився Льюїс Керролл?

Коментар до розв'язання

Нехай a — кількість десятків, b — кількість одиниць шуканого числа. Тоді за умовою маємо: $b-a=5$, $a^2+b^2=53$. Отже, задача зводиться до розв'язання системи двох рівнянь, одне з яких лінійне, а інше — рівняння другого степеня (найбільший степінь одночлена, що входить до рівняння, дорівнює 2). Розв'язання актуальної задачі див. на сайті interactive.ranok.com.ua.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

- «Твій учитель — це не той, хто тебе вчить, а той, у кого вчишся ти». Ці слова належать американському письменнику та філософу Річарду Баху.
- Згадку про вчителя ми знаходимо ще в давньокитайського філософа Конфуція, який говорив, що основним завданням учителя є вміння відкривати нові знання учневі.
- 5 жовтня — Всесвітній день учителів, який відзначають майже у 100 країнах світу.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У курсі алгебри 7–8 класів ви розв'язували текстові задачі за допомогою лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь та систем лінійних рівнянь. У 8 класі ви познайомилися з алгоритмом розв'язування текстової задачі за допомогою рівняння. Аналогічний алгоритм застосовують і для розв'язування текстових задач за допомогою системи рівнянь.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти систему рівнянь до задачі.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- математична модель задачі
- аналіз умови задачі
- аналіз розв'язків системи рівнянь
- алгоритм розв'язування задачі

АЛГОРИТМ

Алгоритм розв'язування задачі за допомогою системи рівнянь

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Система рівнянь
↓
Розв'язування системи рівнянь
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

ПРИКЛАД 1

Сума двох чисел дорівнює 24, а різниця їх квадратів — 48. Знайдіть ці числа.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: два числа, над якими виконуються певні дії.

Аналіз дій, які виконуються над числами: якщо позначити перше число через x, а друге — через y, то їх сума дорівнюватиме $x+y$, а різниця квадратів x^2-y^2.

2 Створюємо математичну модель задачі

За умовою $x+y=24$, $x^2-y^2=48$, причому обидві рівності виконуються одночасно. Тому потрібно скласти систему рівнянь.

3 Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=24, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$$

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо ліву частину другого рівняння на множники. У друге рівняння підставимо $x+y=24$ і запишемо рівносильну систему рівнянь.	$\begin{cases} x+y=24, \\ (x-y)(x+y)=48; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=24, \\ x-y=2 \end{cases}$
КРОК 2	Додамо почленно обидва рівняння системи і знайдемо значення x.	$2x=26$; $x=13$
КРОК 3	Знайдемо значення y, наприклад, із першого рівняння системи.	$y=24-x$; $y=24-13$; $y=11$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа можуть бути довільними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Відповідь: 11 і 13.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Число називають **числом Сміта**, якщо сума його цифр дорівнює сумі цифр розкладу цього числа на прості множники. Наприклад: $4\,937\,775=3\cdot5\cdot5\cdot65\,837$. Сума цифр числа і сума цифр розкладу становить 42. Числа Сміта: 4, 22, 27... Кількість чисел Сміта є нескінченною.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть задачу.

1) Сума двох чисел дорівнює 12, а їх добуток — 35. Складіть систему рівнянь для визначення цих чисел і знайдіть їх.
2) Різниця чисел x і y дорівнює 2, а їх добуток — 48. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y та розв'яжіть її.

3) Сума двох натуральних чисел дорівнює 9, а сума їх квадратів на 39 більша за їх добуток. Складіть систему рівнянь для визначення цих чисел і знайдіть їх.
4) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а довжина його гіпотенузи дорівнює 13 см.
   а) Складіть систему рівнянь для визначення довжин катетів трикутника та знайдіть їх.
   б) Знайдіть площу трикутника.

ПРИКЛАД 2

На двох фуршетних столах рядами викладено по 260 канапе (маленьких бутербродів). На другому столі кількість рядів на 3 менша, а кількість канапе у кожному ряді на 6 більша, ніж на першому столі. Визначте кількість рядів і кількість канапе в кожному ряді на першому столі.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: кількість канапе в одному ряді на кожному столі; кількість рядів канапе на кожному столі; загальна кількість канапе на кожному столі.

Аналіз кількості канапе в одному ряді: це невідомі величини, пов'язані певними умовами. Позначимо кількість канапе в одному ряді на першому столі через x. Тоді кількість канапе в одному ряді на другому столі $x+6$.

Аналіз кількості рядів канапе: це також невідомі величини, пов'язані певними умовами. Позначимо кількість рядів на першому столі через y. Тоді кількість рядів на другому столі $y-3$.

Аналіз загальної кількості канапе на кожному столі: щоб знайти цю величину, потрібно помножити кількість канапе в одному ряді на кількість рядів. За умовою цей добуток для кожного із столів дорівнює 260.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

Фуршетний стіл	Кількість канапе в одному ряді	Кількість рядів	Кількість канапе на столі
I	x	y	xy
II	$x+6$	$y-3$	$(x+6)(y-3)$

3 Складаємо систему рівнянь

За умовою кількість канапе на кожному столі дорівнює 260. Складемо рівняння: $xy=260$, $(x+6)(y-3)=260$. Утворимо систему рівнянь: $\begin{cases} xy=260, \\ (x+6)(y-3)=260. \end{cases}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У Середньовіччі школярі називали теорему Піфагора «pons asinorum», що означає «ослячий міст». Учнів, які запам'ятовували теорему, але не розуміли її, називали віслюками, адже вони не могли перейти через міст — теорему Піфагора.

ЗАДАЧА

на арифметичне співвідношення між об'єктами

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Кейтеринг (від англ. *cater* — «поставляти провізію») — галузь громадського харчування, пов'язана з наданням послуг на віддалених точках і обслуговуванням різноманітних заходів. Різновидами кейтерингу, зокрема, є фуршет, кава-брейк, пікнік, барбекю, банкет тощо.

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

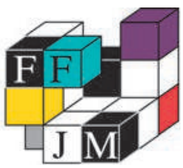
Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкриємо дужки в другому рівнянні, замінимо xy на 260 та спростимо друге рівняння.	$\begin{cases} xy = 260, \\ xy - 3x + 6y - 18 = 260; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 260, \\ 260 - 3x + 6y = 260 + 18; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 260, \\ 6y - 3x = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 260, \\ 2y - x = 6 \end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо отриману систему способом підстановки.	$\begin{cases} xy = 260, \\ x = 2y - 6; \end{cases}$ $(2y - 6)y = 260;$ $y^2 - 3y - 130 = 0;$ $y_1 = 13,$ $y_2 = -10$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Оскільки y — кількість рядів канапе, то від'ємний корінь $y_2 = -10$ не задовольняє умову задачі. Шукана кількість рядів канапе на першому столі $y_1 = 13$. Тоді кількість канапе у кожному ряді на першому столі $260 : 13 = 20$ (канапе).

Відповідь: 13 рядів по 20 канапе.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Міжнародний чемпіонат математичних і логічних ігор дуже популярний у світі. Його проводить Французька федерація математичних і логічних ігор (*La Federation Francaise des Jeux Mathematiques*, сайт www.ffjm.org).

Щороку в чемпіонаті беруть участь дорослі й діти більше ніж із 20 країн: учні 1–11 класів, студенти, аспіранти, спеціалісти будь-якого віку. Учасникам пропонують низку творчих нестандартних задач, за результатами розв'язання яких визначаються переможці.

У 2015 р. на чемпіонаті в Парижі 2-ге місце у своїй віковій групі посів учень 4 класу Харківського НВК № 45 «Академічна гімназія» Володимир Чуб.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть задачу.

1) Аудиторія містила x рядів по y місць у кожному. Під час реконструкції до кожного ряду додали по одному місцю, і загальна кількість місць в аудиторії збільшилася від 40 до 48. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y. Знайдіть x і y.
2) Площа прямокутника дорівнює 36 см^2. Якщо його ширину зменшити на 1 см, а довжину збільшити на 1 см, то його площа дорівнюватиме 30 см^2. Складіть систему рівнянь для визначення ширини і довжини прямокутника та знайдіть їх.
3) У першому будинку 36 квартир, а в другому — 50. У другому будинку поверхів на 2 менше, а квартир на кожному поверсі на 2 більше, ніж у першому будинку. Знайдіть кількість поверхів у кожному будинку та кількість квартир на кожному поверсі.
4) Для проведення відбіркового туру з розв'язання логічних задач підготували 400 аркушів паперу. Кожний учасник мав одержати однакову кількість аркушів для написання роботи. Оскільки 20 учасників не з'явилися, то кожному учаснику видали на 1 аркуш більше, ніж планувалося.
   а) Скільки учасників прийшли на відбірковий тур?
   б) Скільки аркушів планували видавати кожному учнику?

ПРИКЛАД 3

Протягом вихідних днів до інтернет-магазину надійшло 72 замовлення. Менеджери Андрій і Максим упродовж понеділка мають їх опрацювати. Відомо, що за той самий час Андрій опрацьовує 6 замовлень, а Максим — 5 замовлень. Скільки замовлень опрацьовує за 1 год кожний менеджер, якщо всі замовлення Андрій може опрацювати на 1,5 год швидше, ніж Максим?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини:

- швидкість опрацювання замовлень Андрієм (замовлень/год);
- швидкість опрацювання замовлень Максимом (замовлень/год).

Аналіз швидкості опрацювання замовлень (замовлень/год). Нехай v_1 — швидкість опрацювання замовлень Андрієм, а v_2 — Максимом. Тоді час, протягом якого одне замовлення виконує Андрій, дорівнює $\frac{1}{v_1}$ год, Максим — $\frac{1}{v_2}$ год.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

$$\text{час опрацювання замовлень} = \frac{\text{кількість замовлень}}{\text{швидкість опрацювання замовлень}}$$

	Швидкість опрацювання замовлень	Загальна кількість замовлень	Час опрацювання замовлень: 72 замовлення	Час опрацювання замовлень: n замовлень
Андрій	v_1	72	$\frac{72}{v_1}$	$n=6$, $\frac{6}{v_1}$
Максим	v_2	72	$\frac{72}{v_2}$, на 1,5 год більше, ніж	$n=5$, $\frac{5}{v_2}$

3 Складаємо систему рівнянь

За умовою задачі величина $\frac{72}{v_2}$ більша за величину $\frac{72}{v_1}$ на 1,5.

Складемо рівняння: $\frac{72}{v_2}-\frac{72}{v_1}=1{,}5$. За умовою задачі величини $\frac{6}{v_1}$ і $\frac{5}{v_2}$ дорівнюють одна одній. Складемо рівняння: $\frac{6}{v_1}=\frac{5}{v_2}$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases}\frac{72}{v_2}-\frac{72}{v_1}=1{,}5,\\ \frac{6}{v_1}=\frac{5}{v_2}.\end{cases}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

amazon.com

Перший інтернет-магазин Amazon.com заснував бізнесмен Джеффрі Безос у 1994 р. Спочатку на сайті продавалися лише книжки, згодом — аудіо- та відеопродукція тощо.

Назва Amazon походить від назви найбільшої у світі річки — Амазонки, а Дж. Безос мріяв створити найбільший у світі магазин. Крім того, назва сайта, що починається літерою «А», потраплятиме у верхню частину алфавітного переліку ресурсів.

ПРИГАДАЙТЕ!

- графічний спосіб
- спосіб підстановки
- спосіб алгебраїчного додавання
- метод заміни змінних

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Використаємо спосіб підстановки. Виразимо з другого рівняння системи v_1 через v_2, підставимо отриманий вираз у перше рівняння.	$v_1 = \frac{6}{5}v_2$; $\frac{72}{v_2} - \frac{72 \cdot 5}{6 \cdot v_2} = 1{,}5$
КРОК 2	Винесемо $\frac{72}{v_2}$ за дужки та розв'яжемо отримане рівняння.	$\frac{72}{v_2}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = 1{,}5$; $\frac{72}{v_2} \cdot \frac{1}{6} = 1{,}5$; $\frac{72}{v_2} = 9$; $v_2 = 8$
КРОК 3	Знайдемо v_1.	$v_2 = 8$, $v_1 = \frac{6}{5}v_2$, $v_1 = \frac{6}{5} \cdot 8 = 9{,}6$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Відповідь: 9,6 і 8 замовлень за годину.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Втрати тепла в будинку

«Теплий дім» — ресурс, який містить інформацію щодо підвищення енергоефективності в наших житлових будинках. На цьому ресурсі можна:

- дізнатися про енергоефективні технології, обладнання;
- скористатися Калькулятором енергозбереження для обчислення обсягу заощаджень від енергоефективних заходів у своєму будинку: www.teplydim.com.ua/uk/energy_saving_calculator.htm

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть задачу.

1) Дві бригади, що здійснюють роботи з утеплення фасадів, працюючи разом, виконують усе завдання за 6 год. За скільки годин може виконати це завдання кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 5 год більше, ніж іншій бригаді?
2) Перший менеджер має оформити 80 замовлень, а другий — 56 таких самих замовлень. Перший менеджер оформлював щогодини на 2 замовлення більше, ніж другий, а закінчив свою роботу на 1 год пізніше, ніж другий. Скільки замовлень оформлював кожний менеджер щогодини?
3) Кожна з двох бригад має оновити інформацію на 24 бігбордах. Перша бригада щогодини оновлювала x бігбордів, друга бригада — y бігбордів. Відомо, що перша бригада щогодини встигала оновити на 1 бігборд більше, ніж друга, і закінчила роботу на 2 год раніше від неї. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y. Знайдіть x і y.
4) На першому друкарському верстаті можна виконати всю роботу на 3 год швидше, ніж на другому. Якщо на першому верстаті працювати лише 4 год, а потім виконувати завдання лише на другому верстаті, то знадобиться ще 3 год, щоб закінчити все завдання.
   а) Нехай усе завдання можна виконати на першому верстаті за x год, на другому — за y год. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y.
   б) Знайдіть x і y.

ПРИКЛАД 4

Відстань між ролердромом і тенісним кортом 700 м. Зоя вирушила з корту до ролердрому, а через 3 хв після цього з ролердрому до корту пішов Юрій, який зустрівся із Зоєю через 3 хв після свого виходу. Відстань між ролердромом і кортом Зоя долає на 2,1 хв швидше, ніж Юрій. Знайдіть швидкість Зої.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: швидкість руху Зої; швидкість руху Юрія.

Аналіз руху Зої та Юрія:

- час руху Юрія до зустрічі із Зоєю — 3 хв = $\frac{1}{20}$ год;
- час руху Зої до виходу Юрія — 3 хв;
- час руху Зої до зустрічі з Юрієм — 6 хв = $\frac{1}{10}$ год;
- відстань, яку Зоя та Юрій пройшли разом до зустрічі — 700 м = 0,7 км.

Оскільки швидкість руху Зої є невідомою і шуканою, то її доцільно позначити змінною x. Тоді швидкість руху Юрія позначимо змінною y.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

<table>
<tr><th></th><th>Відстань між ролердромом і кортом, км</th><th>Швидкість руху, км/год</th><th>Час подолання всієї дистанції, год</th><th colspan="2">Відстань, пройдена до зустрічі, км</th></tr>
<tr><td>Зоя</td><td>0,7</td><td>x</td><td>$\frac{0,7}{x}$, на 2,1 хв $\left(\frac{7}{200}\text{ год}\right)$ менше, ніж</td><td>$\frac{1}{10}x$</td><td rowspan="2">0,7</td></tr>
<tr><td>Юрій</td><td>0,7</td><td>y</td><td>$\frac{0,7}{y}$</td><td>$\frac{1}{20}y$</td></tr>
</table>

3 Складаємо систему рівнянь

Відстані, що пройшли Зоя та Юрій до зустрічі, складають разом усю відстань між кортом і ролердромом, яка за умовою дорівнює 0,7 км. Складемо рівняння: $\frac{1}{10}x+\frac{1}{20}y=0,7$. За умовою задачі величина $\frac{0,7}{x}$ менша від величини $\frac{0,7}{y}$ на $\frac{7}{200}$. Складемо рівняння: $\frac{0,7}{y}-\frac{0,7}{x}=\frac{7}{200}$. Маємо систему рівнянь: $\begin{cases}\frac{1}{10}x+\frac{1}{20}y=0,7,\\ \frac{0,7}{y}-\frac{0,7}{x}=\frac{7}{200}.\end{cases}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Ролердром — майданчик для катання на роликах, який має всі необхідні пристосування. На ролердромі кожен може продемонструвати свою майстерність, а також взяти участь у змаганнях із ролерного спорту.

Ролерспорт поділяється на групи за видом роликових ковзанів і складається з більше ніж десятка різних підвидів (фристайл, слалом, спідскейтинг, стріт тощо).

ПРИГАДАЙТЕ!

1) Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, ви маєте знайти не просто корені рівняння, а розв'язок задачі. Тому важливо пам'ятати, що саме є шуканим у задачі.
2) Значення коренів можуть задовольняти ОДЗ рівняння, але не задовольняти умову задачі.

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Спростимо кожне з рівнянь системи: обидві частини першого рівняння помножимо на 20, а другого — на 10.	$\begin{cases}2x+y=14,\\ \frac{7}{y}-\frac{7}{x}=\frac{7}{20}\end{cases}\Big\|:7;$ $\begin{cases}2x+y=14,\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{20}\end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо систему рівнянь способом підстановки.	$\begin{cases}y=14-2x,\\ \frac{1}{14-2x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{20}\end{cases}$
КРОК 3	Розв'яжемо друге рівняння системи $\frac{1}{14-2x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{20}=0$ як дробово-раціональне рівняння.	$\frac{20x-20(14-2x)-x(14-2x)}{20x(14-2x)}=0;$ $\begin{cases}x^2+23x-140=0,\\ x\neq 0,\\ x\neq 7;\end{cases}$ $x_1=5,\ x_2=-28$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Оскільки x — швидкість руху Зої, то від'ємний корінь $x_2=-28$ не задовольняє умову. Отже, $x=5$, шукана швидкість 5 км/год.

Відповідь: 5 км/год.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

1) Відстань від будинку Галини до школи дорівнює 5 км. Пішки Галина ходить зі швидкістю x км/год, а на велосипеді їде зі швидкістю y км/год. За 1 год дівчина проїжджає на велосипеді відстань на 10 км більшу, ніж коли йде пішки. Відомо, що на велосипеді дівчина доїжджає від дому до школи на 40 хв швидше, ніж коли йде пішки. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y. Знайдіть x і y.
2) Із міст A і B, відстань між якими 140 км, одночасно назустріч один одному вирушили два рейсові автобуси. Через 1 год вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рух, не змінюючи швидкості. Один автобус прибув до міста B на 35 хв раніше, ніж інший до міста A.
   а) Позначте швидкість першого автобуса, що рухався з міста A до міста B, через x км/год, а швидкість другого автобуса — через y км/год. Запишіть систему рівнянь для визначення x і y.
   б) Знайдіть x і y.
3) Моторний човен рибного патруля пройшов 24 км проти течії річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 5 год. Наступного дня цей човен пройшов 6 км проти течії річки, витративши 45 хв. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії річки.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У селі Путрівка Васильківського району Київської області 1 вересня 2016 р. відкрилася «Школа майбутнього», яка більше нагадує сучасний арт-простір.
- Найбільшу кількість учнів у школі було зафіксовано у 2003/2004 навчальному році в одному з міст Індії, у якому цього року до міської школи Монтессорі зарахували 27 911 учнів.
- Найдовший у світі урок тривав 54 години. Це була лекція з біології для 26 студентів однієї з вищих шкіл Австралії у квітні 2003 р.

4) Із міста A до міста B, відстань між якими 440 км, виїхав автобус. Через 3 год після цього з міста B до міста A виїхав мотоцикліст, який зустрівся з автобусом через 1 год після свого виїзду. Мотоцикліст долає відстань між містами A і B на 1 год 50 хв швидше, ніж автобус. Знайдіть швидкості руху автобуса та мотоцикліста, вважаючи, що їх швидкості були постійними.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть двоцифрове число, кількість одиниць якого на 3 більша за кількість десятків. Відомо, що добуток цього числа і суми його цифр, зменшеної на 2, дорівнює числу, яке в 4 рази більше за число, що складається з таких самих цифр, як і шукане, але записаних у зворотному порядку.

СЛІД ЗНАТИ!

$\overline{ab}$ — двоцифрове число, a — кількість десятків, b — кількість одиниць:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b.$$

$\overline{ba}$ — двоцифрове число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку:

$$\overline{ba} = b \cdot 10 + a.$$

2 Для заповнення термального басейну використовують дві труби різного діаметра. Першого дня дві труби працювали одночасно й подали 14 м³ води. Другого дня працювала тільки труба меншого діаметра, яка подала 14 м³ води за час на 5 год довший, ніж першого дня. Третього дня подання води тривало стільки ж часу, скільки й другого дня: спочатку працювали дві труби, які подали разом 21 м³ води, а потім працювала тільки труба більшого діаметра, яка подала ще 20 м³ води. Знайдіть пропускну здатність кожної труби (у м³/год).

До розв'язання

Основні величини:

- x м³/год — пропускна здатність першої труби;
- y м³/год — пропускна здатність другої труби;
- $(x+y)$ м³/год — спільна пропускна здатність обох труб.

$$\text{час} = \frac{\text{об'єм басейну (м}^3\text{)}}{\text{пропускна здатність труби (м}^3\text{/год)}}$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Пропускна здатність труби — об'єм води, що проходить через трубу за одиницю часу.

3 Для виготовлення столових приборів майстерня використовує сплав міді та нікелю. Перший сплав містить 10 % нікелю, а другий — 25 %. Скільки кілограмів другого сплаву слід змішати з 10 кг першого, щоб отримати сплав із 80 %-вим умістом міді?

До розв'язання

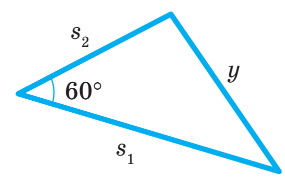
Основні величини:

- x кг — маса першого сплаву;
- y кг — маса суміші першого й другого сплавів;
- $0{,}1x$ кг — маса нікелю в першому сплаві.

СЛІД ЗНАТИ!

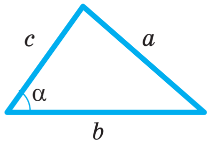
- Маса суміші сплавів дорівнює сумі мас обох складових.
- Сума мас нікелю в кожному зі сплавів дорівнює масі нікелю в утвореному сплаві.

4 Під час змагань дві команди почали одночасно рухатися прямими курсами (уздовж прямої), які перетинаються під кутом $\alpha = 60°$ (див. рисунок). Перша команда рухається на квадроциклах із постійною швидкістю 32 км/год, друга — на велосипедах із постійною швидкістю 20 км/год. Через t год команди



Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



опиняться на відстані y км одна від одної, причому ця відстань на 36 км менша, ніж сума відстаней, що подолали команди. Знайдіть y.

До розв'язання

Основні величини:

- y — відстань між командами через t год;
- s_1 — відстань, яку подолала перша команда за t год;
- s_2 — відстань, яку подолала друга команда за t год.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо велосипедист долає 15 м за кожні 3 с, то його швидкість дорівнює 18 км/год.
2) Якщо одна помпа відкачує воду з резервуару за 10 хв, то дві такі помпи відкачають цей об'єм води за 20 хв.
3) Якщо власна швидкість пароплава дорівнює 25 км/год, а швидкість течії річки — 5 км/год, то 30 км за течією річки пароплав пройде за 1 год.
4) Якщо ремонтна бригада до обіду оглянула 3 км трамвайної колії, а після обіду — 6 км, то після обіду бригада виконала на 100 % роботи більше, ніж до обіду.
5) Якщо в прямокутному трикутнику сума довжин його катетів дорівнює 34 см, а сума квадратів їх довжин — 676 см^2, то периметр цього трикутника дорівнює 60 см.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВСТУПНІ ІСПИТИ»

Викладачі кафедри математики в коледжі розробили вступний тест із 30 завдань. За кожну правильну відповідь абітурієнт отримує 5 балів, за кожну неправильну — втрачає 2 бали. А за кожне пропущене завдання бали ні нараховуються, ні знімаються. За результатами тестування Назар набрав 95 балів, при цьому хлопець принаймні один раз помилився. Нехай Назар дав правильну відповідь на x завдань, а неправильну відповідь — на y завдань.

1. Визначте, яку найбільшу та найменшу кількість балів може набрати абітурієнт за результатами такого тестування.
2. Виразіть через x і y: 1) кількість пропущених Назаром завдань; 2) кількість балів, які набрав Назар за результатами тестування.
3. Складіть рівняння для визначення x і y. Виразіть x через y.
4. Знайдіть: 1) x і y, пам'ятаючи, що x і y — натуральні числа; 2) кількість завдань, які Назар пропустив.

Давид Гільберт (нім. *David Hilbert*; 1862–1943) — німецький математик-універсал, визнаний світовий лідер математиків у 10–20-тих рр. XX ст., працював у багатьох галузях математики. Чимало вчених вважали себе учнями Гільберта, якого називали найчудовішим учителем математиків XX ст.

У 1900 р. на Міжнародному конгресі математиків Гільберт оголосив список із 23 проблем, які, на його думку, належало розв'язати у XX ст.

Сьогодні більшість цих проблем уже розв'язано. Останньою проблемою зі списку Гільберта, яку було розв'язано, стала теорема Ферма. Учені не могли довести її понад 350 років.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

1 У кінотеатрі x рядів, у кожному ряді 10 місць. Скільки всього місць у кінотеатрі?

А	Б	В	Г
$\frac{x}{10}$	$10x$	$\frac{10}{x}$	$x+10$

2 Величина x більша за величину y на 6. Виразіть x через y.

А	Б	В	Г
$x=y+6$	$x=y-6$	$x=6y$	$x=\frac{y}{6}$

3 Для фарбування x м² підлоги витрачається y л фарби. Скільки літрів фарби потрібно для фарбування підлоги площею $5x$ м²?

А	Б	В	Г
$5y$	$\frac{y}{5}$	$5xy$	$\frac{5x}{y}$

4 Катер рухався проти течії річки протягом 3 год. Яку відстань пройшов катер, якщо його власна швидкість дорівнює y км/год, а швидкість течії річки — x км/год?

А	Б	В	Г
$3xy$	$3(x+y)$	$3(y-x)$	$3(x-y)$

5 Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює 4 см, один із катетів на 1 см менший, ніж другий. Яка система рівнянь відповідає умові, якщо довжину меншого катета позначено через x см, а більшого — через y см?

А	Б	В	Г
$\begin{cases}x-y=1,\\x^2+y^2=4\end{cases}$	$\begin{cases}x-y=1,\\x^2+y^2=16\end{cases}$	$\begin{cases}y-x=1,\\x^2+y^2=4\end{cases}$	$\begin{cases}y-x=1,\\x^2+y^2=16\end{cases}$

6 Установіть відповідність між задачами (1–3) і виразами (А–Г), що є розв'язками задач.

1	Потяг проїхав x км зі швидкістю y км/год. Скільки годин потяг був у дорозі?
2	З басейну об'ємом y л викачали воду за x год. Скільки літрів води викачували з басейну щогодини?
3	Автобус за один рейс перевозить x пасажирів. Скільки пасажирів перевіз автобус, здійснивши y рейсів?

А	Б	В	Г
$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$x+y$	xy

7 Різниця чисел x і y дорівнює 5, а їх добуток дорівнює 14.

1) Запишіть систему рівнянь для визначення x та y.

2) Розв'яжіть систему.

8 Два дизайнери, працюючи разом, виконують завдання за $1\frac{1}{5}$ год. Одному дизайнеру на виконання цього завдання потрібно на 1 год більше, ніж іншому. За скільки годин може виконати завдання кожен дизайнер, працюючи самостійно?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

SAT Subject Test — тест із профільного предмета для вступу до вишів США. Такий тест із математики містить 50 запитань, на які слід відповісти за 1 год. Під час проходження цього тесту абітурієнтам не варто відгадувати відповіді, адже за неправильні відповіді знімаються бали.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

1) Сума двох чисел дорівнює 10, а їх добуток — 16. Знайдіть ці числа.
2) Різниця чисел x і y дорівнює 4, а їх добуток — 45. Знайдіть ці числа.
3) Різниця двох натуральних чисел дорівнює 8, а сума їх квадратів на 97 більша за їх добуток. Знайдіть ці числа.
4) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а довжина його гіпотенузи — 17 см. Знайдіть довжини катетів. Визначте площу трикутника.

2 Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

1) Зал для проведення конференцій містив x рядів по y місць у кожному. Під час реконструкції до кожного ряду додали 2 місця, і загальна кількість місць у залі збільшилася від 54 до 72. Знайдіть x і y.
2) Площа прямокутника дорівнює 40 см^2. Якщо його ширину зменшити на 2 см, а довжину збільшити на 2 см, то його площа дорівнюватиме 30 см^2. Знайдіть ширину й довжину прямокутника.
3) У першому будинку 128 квартир, а в другому — 120. У другому будинку поверхів на 4 більше, а квартир на кожному поверсі на 2 менше, ніж у першому будинку. Знайдіть кількість поверхів у кожному будинку та кількість квартир на кожному поверсі.
4) Для проведення колоквіуму з вищої математики підготували 120 аркушів паперу. Кожний студент мав одержати однакову кількість аркушів. Оскільки 6 студентів не з'явилися, то кожному видали на 1 аркуш більше, ніж планувалося. Скільки студентів взяли участь у колоквіумі? Скільки аркушів планували видати кожному студенту?

3 Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

1) Кожна з двох бригад ліфтерів має оглянути 30 ліфтів. Перша бригада щогодини оглядала x ліфтів, а друга — y ліфтів. Відомо, що перша бригада щогодини оглядала на 1 ліфт більше, ніж друга, та закінчила роботу на 1 год раніше від неї. Знайдіть x і y.
2) Перший пакувально-фасувальний автомат виконує всю роботу на 2 год швидше, ніж другий. Якщо перший автомат працюватиме лише 2 год, а потім працюватиме лише другий автомат, то знадобиться ще 3 год, щоб закінчити всю роботу. Нехай усю роботу перший автомат виконує за x год, а другий автомат — за y год. Знайдіть x і y.
3) Дві бригади монтажників вікон, працюючи разом, виконують усе завдання за 8 год. За скільки годин може виконати це завдання кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж іншій?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Математичне моделювання почали застосовувати у спорті ще в 50-х роках XX ст. Зараз у цій галузі працюють математики, інформатики й фізики різних спеціалізацій.

За даними спортсмена у стані спокою складають рівняння, за якими розраховують потрібні параметри при фізичному навантаженні. На основі цих моделей розробляють оптимальні стратегії тренувань.

Див. приклади 1, 2

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

У 2015 р. механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка відзначив свою 75-ту річницю. Факультет готує фахівців зі спеціальностей «математика», «статистика», «механіка» і щорічно проводить олімпіади для абітурієнтів.

Дізнайтеся більше: mechmat.univ.kiev.ua

4) Перший менеджер має надати 84 консультації по телефону, а другий — 96 таких консультацій. Другий менеджер надавав щогодини на 4 консультації більше, ніж перший, і закінчив свою роботу на 1 год раніше від першого. Скільки консультацій надавав кожний менеджер щогодини?

Див. приклад 3

4 Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

Див. приклад 4

1) Відстань від будинку Миколи до ставка дорівнює 6 км. Пішки Микола ходить зі швидкістю x км/год, а на велосипеді їде зі швидкістю y км/год. За 1 год хлопець долає на велосипеді відстань на 12 км більшу, ніж коли йде пішки. Відомо, що на велосипеді хлопець доїжджає від будинку до ставка на 40 хв швидше, ніж коли йде пішки. Знайдіть x і y.
2) З міст A і B, відстань між якими 440 км, одночасно назустріч один одному вирушили два потяги. Через 2 год вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рух, не змінюючи швидкості. Один потяг прибув до міста B на 44 хв раніше, ніж другий до міста A. Нехай швидкість першого потяга, що рухався з міста A до міста B, становить x км/год, а другого — y км/год. Знайдіть x і y.
3) Моторний човен пройшов 20 км проти течії річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 45 хв. Наступного дня цей човен за 30 хв пройшов 8 км за течією річки. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.
4) З міста A до міста B, відстань між якими 420 км, вирушив автомобіль. Через 2 год після цього з міста B до міста A вирушив мотоцикліст, який зустрівся з автомобілем через 1 год після свого виїзду. Мотоцикліст долає відстань між містами A і B на 1 год 52 хв швидше, ніж автомобіль. Знайдіть швидкості руху автомобіля та мотоцикліста, вважаючи, що їх швидкості були постійними.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте розв'язати задачу А. Ейнштейна.

1. Є 5 будинків, пофарбованих у різні кольори.
2. У кожному будинку мешкає одна людина певної національності (усі національності різні).
3. Кожна людина п'є певний напій, любить певну страву і має певну тварину.
4. Усі 5 осіб п'ють різні напої, люблять різні страви та мають різних тварин.

Питання: в кого є рибка?

Додаткові умови можна знайти на сайті interactive.ranok.com.ua

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть $f(1)$, $f(3)$, $f(n)$, $f(n+1)$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{9}{x}$;
2) $f(x)=-\dfrac{6}{x}$;
3) $f(x)=(x-3)^2$;
4) $f(x)=x^2-3$;
5) $f(x)=\sqrt{x-1}$;
6) $f(x)=\sqrt{x+6}$.

« *Математика не знає рас... Для математики весь культурний світ являє собою єдину країну.* »

Давид Гільберт

IQ

TO BE SMART

Задачі тисячоліття (*Millennium Prize Problems*) — це 7 математичних задач, розв'язання яких не знайдено протягом багатьох років. За розв'язання кожної з них Математичним інститутом Клея запропоновано винагороду в 1 млн доларів США. У 2002 р. Григорій Перельман розв'язав одну з цих задач — гіпотезу Пуанкаре, але відмовився від винагороди.

Онлайн-калькулятор Desmos: desmos.com/calculator

Онлайн-калькулятор має інтерактивні інструменти:

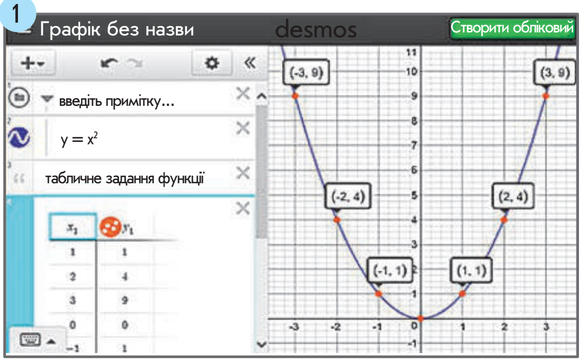
- Повзунок — зміна значень у ручному або автоматичному режимі;
- Масштабування — зменшення / збільшення зображення;
- Вибір точки — визначення координат точок графіка.

В ОДИН КЛІК

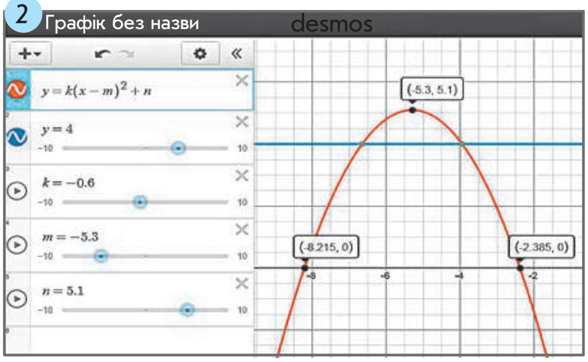
Онлайн-калькулятор Desmos можна використовувати для побудови графіків функцій, дослідження функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей графічним способом. Починаючи роботу з онлайн-калькулятором Desmos, пам'ятайте про таке.

- У лівій частині панелі розташовано поле для введення даних (множин точок, рівнянь, нерівностей), у правій частині — область побудов.
- Сервіс дозволяє будувати декілька графіків в одній координатній площині (якщо необхідно — різними кольорами).
- Вводити символи можна з клавіатури комп'ютера або вбудованої клавіатури, встановивши англійську мову введення. Режим введення «числа» — «літери» змінюється за допомогою клавіш «ABC» і «123» на екранній клавіатурі.

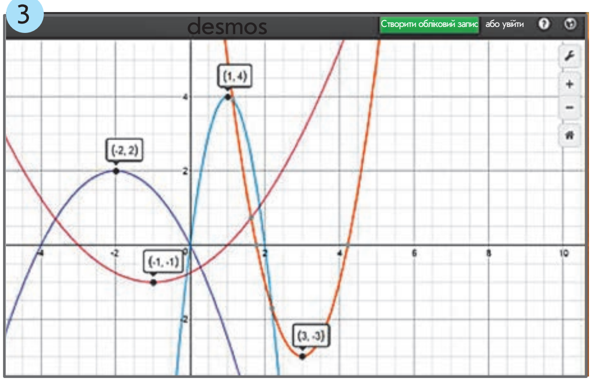
1



2



3



ПРИКЛАД 1

Побудуйте графік функції $y = x^2$.

Ви можете побудувати графік будь-якої функції, заданої за допомогою таблиці або формули. Якщо функцію задати таблично, отримаємо множину окремих точок. Якщо функцію задати формулою, отримаємо лінію.

Алгоритм

1. Запустіть сервіс Desmos.
2. Введіть в поле для введення даних формулу $y = x^2$. Перегляньте результат (рис. 1).
3. Натисніть кнопку «+» (Додати) та виберіть пункт Примітка. Введіть текст «табличне задання функції». Знов натисніть кнопку Додати та виберіть пункт Таблиця. Введіть у таблицю значення аргумента й функції. Перегляньте результат (рис. 1).

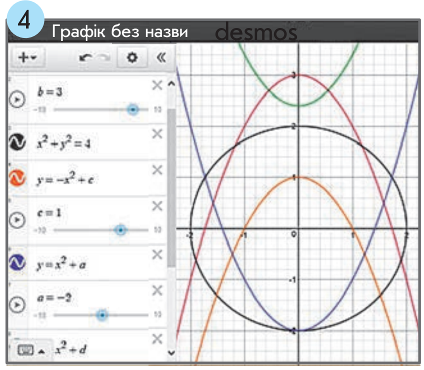
За допомогою сервісу Desmos можна будувати графіки функцій із довільними коефіцієнтами. Наприклад, для побудови графіка функції $y = k(x - m)^2 + n$ слід ввести значення k, m і n (рис. 2), інакше графік не буде побудований. Ці значення можна задавати і змінювати за допомогою Повзунка.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Визначте, графіки яких функцій зображено на рис. 3. Запишіть відповідні формули та самостійно побудуйте графіки функцій за допомогою сервісу Desmos. Запишіть властивості функцій, використовуючи їх графіки.

2 Розгляньте графіки, зображені на рис. 4.

1) Визначте кількість точок перетину кола з кожною із парабол.
2) З'ясуйте, як залежить кількість точок перетину кола з параболою від розташування вершини параболи.
3) У таблицю (праворуч) запишіть за допомогою нерівностей або рівнянь, яких значень може набувати ордината вершини параболи залежно від кількості точок її перетину з колом.



Кількість точок перетину	Значення $y_в$
2	
3	
4	
немає	

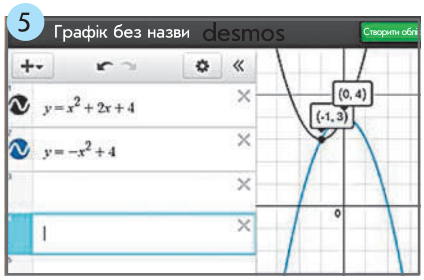
ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4, \\ y = -x^2 + 4. \end{cases}$

Алгоритм

1. Введіть у поле для введення даних рівняння $y = x^2 + 2x + 4$.
2. Натисніть кнопку **Додати** в лівому верхньому куті поля та введіть рівняння $y = -x^2 + 4$. Перегляньте результат (рис. 5).
3. Визначте координати двох спільних точок графіків. Система рівнянь має два розв'язки: $(-1; 3)$ і $(0; 4)$.

Відповідь: $(-1; 3)$; $(0; 4)$.



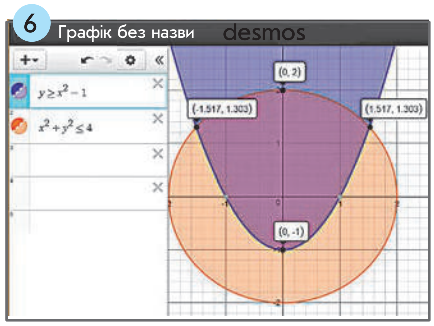
ПРИКЛАД 3

Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant x^2 - 1. \end{cases}$

Алгоритм

1. Введіть у поле для введення даних нерівність $x^2 + y^2 \leqslant 4$.
2. Натисніть кнопку **Додати** і введіть нерівність $y \geqslant x^2 - 1$. Перегляньте результат (рис. 6).

Перетин частин площин, обмежених параболою та колом, є зображенням множини розв'язків заданої системи нерівностей.



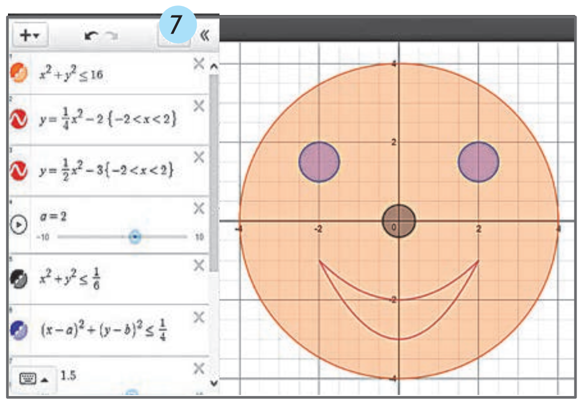
ТРЕНУЄМОСЯ

3 Перевірте за допомогою сервісу Desmos, чи правильно ви розв'язали завдання 2 «Інтелектуального фітнесу» в § 14 (с. 188).

4 Спробуйте «намалювати» веселе обличчя, користуючись підказками (рис. 7).

5 Створіть рисунок за допомогою графіків відомих вам функцій і нерівностей. Надішліть його своїм друзям.

6 За допомогою сервісу Desmos виконайте наведені на сайті interactive.ranok.com.ua тренувальні завдання на побудову графіків функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей.



ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 14–15

1 Ви ознайомилися з графічним та аналітичним способами розв'язування систем двох рівнянь із двома змінними, з яких хоча б одне рівняння — другого степеня.

Розв'язок системи рівнянь із двома змінними x і y — пара чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи, тобто перетворює кожне з них у правильну числову рівність.

Дві системи рівнянь називають **рівносильними**, якщо ці системи мають одні й ті самі розв'язки або не мають розв'язків.

Алгоритми розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними

Графічний спосіб

1. Побудувати в одній системі координат графіки рівнянь системи.
2. Знайти спільні точки графіків (якщо вони є).
3. Записати у відповідь координати точок перетину графіків, які і є розв'язками системи.

Спосіб алгебраїчного додавання (аналітичний спосіб)

1. Прирівняти коефіцієнти при одній зі змінних шляхом почленного множення обох рівнянь на підібрані відповідним чином множники.
2. Додати (або відняти) почленно два рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння.
4. Підставити знайдене значення змінної в будь-яке із заданих рівнянь.

Спосіб підстановки (аналітичний спосіб)

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння системи.
2. Підставити отриманий вираз замість відповідної змінної в друге рівняння.
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.
4. Підставити кожний знайдений корінь рівняння у вираз, отриманий у п. 1.
5. Записати відповідь у вигляді пар значень змінних, знайдених у п. 3, 4.

Метод заміни змінної (аналітичний спосіб)

Ввести **одну нову змінну** і використати заміну тільки в одному рівнянні системи або ввести **дві нові змінні** і використати їх одночасно в обох рівняннях системи.

2 Ви досліджували кількість розв'язків системи лінійних рівнянь із двома змінними.

Кількість розв'язків системи лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ залежить від рівності або нерівності відношень їх коефіцієнтів.

Система **має єдиний розв'язок**, якщо коефіцієнти при змінних не пропорційні: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тобто графіки рівнянь (прямі) перетинаються.

Система **не має розв'язків**, якщо коефіцієнти при змінних пропорційні, але не пропорційні вільним членам: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі паралельні.

Система **має безліч розв'язків**, якщо всі коефіцієнти рівнянь пропорційні: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі збігаються.

3 Ви навчилися розв'язувати задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами, рух, сумісну роботу тощо за допомогою систем двох рівнянь із двома змінними.

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Система рівнянь
↓
Розв'язування системи рівнянь
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти систему рівнянь до задачі.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

Задачі на роботу

Якщо V — обсяг роботи, p — продуктивність роботи, t — час, то:

$$V = pt, \quad p = \frac{V}{t}, \quad t = \frac{V}{p}.$$

- Якщо працюють декілька людей, то продуктивності їхньої роботи додаються.
- Якщо обсяг роботи не зазначений, то його приймають за одиницю.

Задачі на рух

Якщо s — відстань, v — швидкість, t — час, то:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}, \quad t = \frac{s}{v}.$$

Задачі на рух по воді

Якщо v — власна швидкість плавзасобу у стоячій воді, a — швидкість течії, то:

- $v + a$ — швидкість плавзасобу за течією;
- $v - a$ — швидкість плавзасобу проти течії.

Схема задачі на купівлю товарів

	Ціна	Кількість	Вартість
I товар	x	y	$A = xy$
II товар			

Схема задачі на запис числа

	Цифра десятків	Цифра одиниць	Значення числа
I число	x	y	$10x + y$
II число			

Схема задачі на співвідношення чисельників і знаменників дробу

	Чисельник	Знаменник	Значення дробу
I дріб	x	y	$\frac{x}{y}$
II дріб			

Схема задачі на продуктивність роботи

	Продуктивність роботи	Час роботи	Обсяг роботи
I працівник	p	t	$V = pt$
II працівник			

Схема задачі на рух

	Швидкість	Час	Відстань
I об'єкт	v	t	$s = vt$
II об'єкт			

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Величина x менша у 2 рази від величини y. Виразіть x через y.

А	Б	В	Г
$x=y+2$	$x=y-2$	$x=\frac{y}{2}$	$x=2y$

2 Яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases}x+y=3,\\x^2=4y?\end{cases}$

А	Б	В	Г
$(-1;4)$	$(4;-1)$	$(1;2)$	$(2;1)$

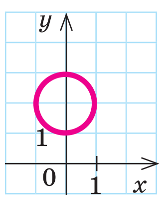
3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}y-x=0,\\xy=1.\end{cases}$

А	Б	В	Г
$(1;1)$, $(-1;-1)$	$(1;-1)$, $(1;1)$	$(-1;1)$, $(1;1)$	$(1;-1)$, $(-1;-1)$

4 У системі рівнянь $\begin{cases}3xy+x+y=-7,\\xy(x+y)=2\end{cases}$ здійснено заміни $a=xy$, $b=x+y$. Яку систему рівнянь отримали?

А	Б	В	Г
$\begin{cases}a+3b=-7,\\a+b=2\end{cases}$	$\begin{cases}a+3b=-7,\\ab=2\end{cases}$	$\begin{cases}3a+b=-7,\\a+b=2\end{cases}$	$\begin{cases}3a+b=-7,\\ab=2\end{cases}$

5 Користуючись графіком рівняння $x^2+(y-2)^2=1$ на рисунку, визначте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}x^2+(y-2)^2=1,\\y+x^2=0.\end{cases}$



А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Три

6 Партер театру містив x рядів по y місць у кожному. Під час реконструкції до кожного ряду додали 2 місця, і загальна кількість місць у партері збільшилася від 200 до 220. Укажіть систему рівнянь для визначення x і y.

А	В
$\begin{cases}xy=200,\\y(x+2)=220\end{cases}$	$\begin{cases}xy=220,\\x(y+2)=200\end{cases}$
Б	**Г**
$\begin{cases}xy=200,\\x(y+2)=220\end{cases}$	$\begin{cases}xy=220,\\y(x+2)=200\end{cases}$

7 Сума двох чисел дорівнює 11, а різниця їх квадратів дорівнює 55. Знайдіть ці числа.

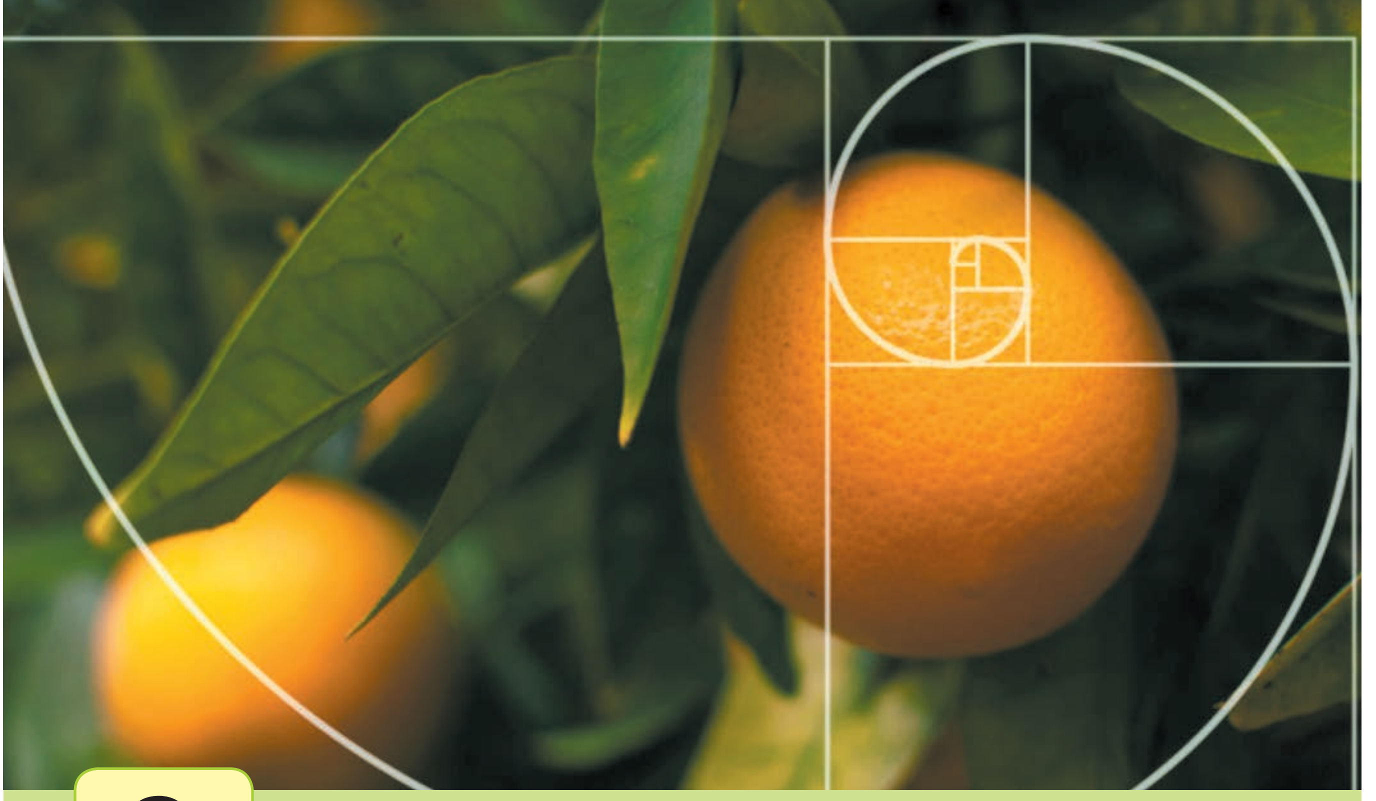
8 Моторний човен пройшов 20 км проти течії річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 2 год 15 хв. Наступного дня цей човен пройшов 8 км проти течії річки, витративши 30 хв. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

9 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2-xy=56,\\y^2-xy=-7.\end{cases}$

10 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x-1}=2,\\xy=12.\end{cases}$

Бонусне завдання

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=2,\\\sqrt{x-3}-y=0.\end{cases}$



3 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Безліч явищ реального життя відбуваються за законами прогресій. Опанувавши цей розділ, ви зможете:

- розраховувати відсотки за банківськими вкладами, планувати виплати за кредитами;
- укладати вигідні фінансові угоди, прогнозувати прибутки від бізнесу;
- розв'язувати задачі з біології та вірусології щодо визначення чисельності популяцій тварин, бактерій;
- прогнозувати швидкість розповсюдження інформації в соціальних мережах, змінення чисельності населення, кількості абітурієнтів тощо;
- планувати фізичні навантаження під час тренувань;
- отримати початкові знання за темою «Числові та степеневі ряди» із дисципліни «Вища математика» для навчання в майбутньому.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Послідовність простих чисел
- Числа та співвідношення Фібоначчі в природі, економіці, мистецтві, архітектурі, фотографії
- Формула Біне
- Золотий переріз
- Трикутник Паскаля
- Прогресії та банківські розрахунки
- Метод математичної індукції
- Формула Архімеда (сума квадратів усіх натуральних чисел)
- Фігурні числа та їх співвідношення

«Ніколи не втрачай терпіння — це останній ключ, який відчиняє двері.»

Антуан де Сент-Екзюпері

§ 16 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

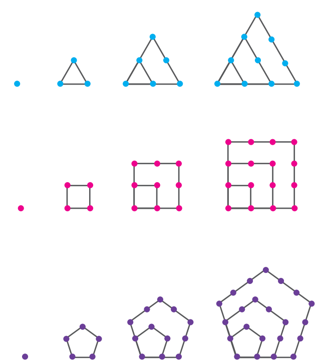
ВЧОРА — Ви оперували числовими множинами та застосовували слово «послідовність» у повсякденному житті

СЬОГОДНІ — Ви ознайомитеся з одним із основних понять математики — числовою послідовністю та способами її задання, навчитеся знаходити будь-який член послідовності за заданою формулою

ЗАВЖДИ — Ви зможете поділитися зі своїми друзями секретами найдивовижнішої числової послідовності — послідовності Фібоначчі

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Фігурні числа



Піфагор і його учні розглядали послідовності, пов'язані з геометричними фігурами, викладаючи з камінців трикутники, квадрати, п'ятикутники та підраховуючи в них кількість камінців. Було отримано послідовності фігурних чисел:

- трикутних (1, 3, 6, 10, 15, ...);
- квадратних (1, 4, 9, 16, 25, ...);
- п'ятикутних (1, 5, 12, 22, 35, ...).

Фігурні числа в різні часи досліджували такі математики, як Фібоначчі, П. Ферма, Л. Ейлер, К. Ф. Гаусс, О. Л. Коші та ін.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Плату за оренду апартаментів на період відпочинку нараховують таким чином: за першу добу орендар сплачує 50 г. о., за кожну наступну добу (повну чи неповну) — 30 г. о. Заповніть таблицю та запишіть формулу, за якою можна обчислити плату за оренду протягом n діб.

Кількість діб	1	2	3	4	5	6
Вартість оренди	50	$50+30\cdot1$	$50+30\cdot2$			

Розв'язання

Проаналізуємо вирази, за якими можна знайти вартість оренди (у г. о.) протягом певної кількості діб:

за 1 добу — 50;
за 2 доби — $50+30\cdot1$;
за 3 доби — $50+30\cdot2$;
за 4 доби — $50+30\cdot3$;
за 5 діб — $50+30\cdot4$;
за 6 діб — $50+30\cdot5$.

Отже, формула, за якою можна обчислити плату s за оренду протягом n діб, має вигляд:

$$s=50+30\cdot(n-1)$$

50 — стартовий внесок; 30 — щоденна оплата, починаючи з другої доби; $(n-1)$ — кількість діб, за винятком першої доби

Якщо замість n підставити натуральні числа, отримаємо «серію» чисел:

при $n=1 \to s=50$;

при $n=2 \to s=50+30=80$;

при $n=3 \to s=50+30\cdot2=110$ і т. д.

Говорять, що отримано **послідовність** чисел 50, 80, 110, ...

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

У повсякденному житті ми постійно маємо справу із послідовностями. *Наприклад:*

- послідовність годин у добі, днів у тижні або місяців у році;
- послідовність станцій метро або зупинок автобуса;
- послідовність кроків або вправ на тренуванні тощо.

У цьому параграфі ми розглянемо числові послідовності.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числові послідовності
- способи задання послідовностей
- види послідовностей
- формула n-го члена числової послідовності

Числова послідовність — це розміщені в певному порядку числа, або впорядкований набір чисел.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Наприклад:

- послідовність натуральних чисел: 1, 2, 3, ...;
- послідовність простих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...;
- послідовність парних чисел: 2, 4, 6, 8, ...

Числа, що утворюють послідовність, називають **членами послідовності**. Кожний член послідовності позначають літерою з індексом, що вказує його ***порядковий номер*** (можна використовувати різні букви).

Наприклад:

1) $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1000}, ...$; 2) $b_1, b_2, ..., b_{50}, ...$; 3) $x_1, x_2, ..., x_{200}, ...$.

Член послідовності, номер якого дорівнює n, називають **n-м членом послідовності** і записують символом n-го члена, *наприклад:* a_n.

Послідовність прийнято позначати символом n-го члена, взятим у дужки. *Наприклад,* послідовності (a_n), (b_n), (x_n):

(a_n): 1, 2, 3, 4, ...; отже, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 4$;

(b_n): −15, −5, 5, 15, 25, ...; отже, $b_1 = -15$, $b_5 = 25$;

(x_n): 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...; отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_6 = 2$.

СЛІД ЗНАТИ!

a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

- a_1 — перший член послідовності
- a_2 — другий член послідовності
- a_3 — третій член послідовності
- a_n — n-й член послідовності

РОЗМИНКА 1

Задано числову послідовність (a_n): −24, −16, −8, 0, 8, 16, 24.

1) Назвіть перший, четвертий і шостий члени послідовності.
2) Який за номером член послідовності дорівнює 0?
3) Які члени послідовності містяться між числами −16 і 16?
4) Який член послідовності є попереднім для числа −8?
5) Який член послідовності є наступним для числа 16?
6) Скільки членів містить ця послідовність?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Уже в V ст. до н. е. давньогрецькі математики знали послідовності натуральних, парних і непарних чисел, уміли знаходити їх суми.

? ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте навести приклади скінченних і нескінченних числових послідовностей.

У курсі математики розглядають скінченні послідовності, що містять скінченне число членів, і нескінченні послідовності, що містять нескінченне число членів.

Наприклад:

1) послідовність цифр 0, 1, 2, ..., 9 є скінченною і містить 10 членів;
2) послідовність додатних парних чисел є нескінченною;
3) послідовність, отримана в актуальній задачі, є скінченною, якщо відпочинок триває скінченну кількість днів.

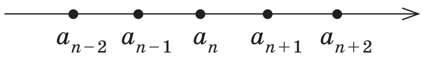


Рис. 1

Числову послідовність можна зобразити на числовій прямій (рис. 1), оскільки кожному числу відповідає певна точка числової прямої.

	Читаємо правильно	Що означає
a_n	Енний член послідовності	Член послідовності, порядковий номер якого дорівнює n
a_{n+1}	Ен плюс перший член послідовності	Наступний член послідовності для a_n
a_{n-1}	Ен мінус перший член послідовності	Попередній член послідовності для a_n
a_{n+2}	Ен плюс другий член послідовності	Наступний член послідовності для a_{n+1}
a_{n-2}	Ен мінус другий член послідовності	Попередній член послідовності для a_{n-1}

РОЗМИНКА 2

1 Назвіть усі члени послідовності, попередні для a_7.

2 Запишіть усі члени послідовності, що містяться між:

1) a_7 і a_{13}; 2) b_n і b_{n+3}; 3) c_{n-4} і c_{n+1}.

3 Для вказаного члена послідовності запишіть три попередні та три наступні члени:

1) a_{70}; 2) b_n; 3) c_{n-2}.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Види послідовностей:
- скінченні
- нескінченні
- зростаючі
- спадні
- стаціонарні

У наступних параграфах ви ознайомитеся зі зростаючими, спадними і стаціонарними послідовностями.

СЛІД ЗНАТИ!

Послідовність називають **зростаючою**, якщо кожен її наступний член більший за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n$.

Послідовність називають **спадною**, якщо кожен її наступний член менший від попереднього, тобто $a_{n+1} < a_n$.

Послідовність вигляду $x_n = c$, де $c = \text{const}$ (стале число), називають **стаціонарною**.

? ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте навести приклади зростаючих, спадних і стаціонарних послідовностей.

Наприклад:
1) −10, −7, −4, −1, ... — зростаюча послідовність;
2) 25, 19, 8, ... — спадна послідовність;
3) −5, 2, −1, 4, 5, 3, ... — послідовність, яка не є ні зростаючою, ні спадною;
4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, ... — стаціонарна послідовність.

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Числова послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який член послідовності.

Послідовність можна задати одним із таких способів.

Словесний спосіб. Послідовність можна задати словесно, тобто описом. *Наприклад:*
- послідовність простих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...;
- послідовність непарних чисел: 1, 3, 5, 7, 9, ...;
- послідовність натуральних чисел, кратних п'яти: 5, 10, 15, ...

Табличний спосіб. Після заповнення таблиці, у якій наведено номери та відповідні значення членів послідовності, отримаємо послідовність, задану таблично. *Наприклад,* розглянемо таблицю.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	0	−1	0	1	0

Отже, маємо скінченну послідовність (a_n): 1, 0, −1, 0, 1, 0.

Аналітичний спосіб. Якщо послідовність задано формулою, за якою можна знайти будь-який член послідовності, коли відомий його номер, говорять, що послідовність задано аналітично.

Таку формулу називають **формулою n-го члена послідовності.**

Запис $s_n = 50 + 30(n-1)$, отриманий під час розв'язування актуальної задачі, і є формулою n-го члена послідовності (s_n).

Наприклад, послідовність (a_n) задано аналітично — формулою n-го члена $a_n = 2n + 3$. Якщо підставити замість n натуральні числа (1, 2, 3, ...), отримаємо члени послідовності:

$$a_1 = 2\cdot 1 + 3 = 5,\ a_2 = 2\cdot 2 + 3 = 7,\ a_3 = 2\cdot 3 + 3 = 9,\ a_4 = 2\cdot 4 + 3 = 11,\ \ldots .$$

Отже, маємо послідовність (a_n): 5, 7, 9, 11, ...

Не існує формули, якою можна було б задати послідовність простих чисел.

Рекурентний спосіб — ще один спосіб задання послідовності, при якому задають:
1) перший або декілька перших членів послідовності;
2) формулу, за якою можна знайти будь-який член послідовності через попередні члени (рекурентну формулу).

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Способи задання послідовностей:
- словесний
- табличний
- аналітичний
- рекурентний
- графічний

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Найбільше просте число, відоме станом на 2016 р., дорівнює $(2^{74207281} - 1)$ і містить понад 22 млн десяткових цифр. Його, як і попереднє просте число, відкрив американський професор Кертіс Купер.

ПОМІРКУЙТЕ

Цікавим завданням є визначення закономірності, за якою створено послідовність.

Спробуйте записати формулу, якою задано послідовність:
1) 2, 4, 6, 8, 10, ...;
2) 1, 3, 5, 7, 9, ...;
3) 2, 5, 8, 11, 14, ...

СЛІД ЗНАТИ!

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

За допомогою послідовності Фібоначчі можна описати порядок розташування листочків рослин, насіння соняшників, лусочок шишок, пелюстків квітів, співвідношення довжин фаланг пальців на руках людини тощо.

Наприклад, найзагадковіша послідовність чисел — послідовність Фібоначчі має вигляд: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … .

У цій послідовності:

$$a_1=1;$$
$$a_2=1;$$
$$a_3=a_2+a_1=1+1=2;$$
$$a_4=a_3+a_2=2+1=3;$$
$$a_5=a_4+a_3=3+2=5;$$
$$\ldots$$

Отже, послідовність Фібоначчі можна задати рекурентним способом:

1) перший і другий члени послідовності дорівнюють по 1;
2) кожний наступний член послідовності, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх.

$$(a_n):\ a_1=1,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

Графічний спосіб. Члени послідовності можна зображати точками на координатній площині. Тоді говорять, що послідовність задано графічно.

Наприклад, послідовність (a_n) додатних чисел, кратних 3, задано графічно (рис. 2).

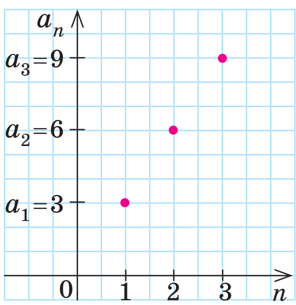


Рис. 2

У задачах, у тому числі практичного змісту, найчастіше використовують *аналітичний*, *словесний* і *рекурентний* способи задання числових послідовностей.

ПРИКЛАД 1

За формулою n-го члена послідовності $y_n=-4n^2+3$ знайдіть y_1, y_2, y_{13}, y_k, y_{m-3}.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Підставимо у формулу $n=1$.	$y_1=-4\cdot 1^2+3$; $y_1=-1$
КРОК 2	Підставимо у формулу $n=2$.	$y_2=-4\cdot 2^2+3$; $y_2=-13$
КРОК 3	Підставимо у формулу $n=13$.	$y_{13}=-4\cdot 13^2+3$; $y_{13}=-673$
КРОК 4	Підставимо у формулу $n=k$.	$y_k=-4k^2+3$
КРОК 5	Підставимо у формулу $n=m-3$.	$y_{m-3}=-4(m-3)^2+3$; $y_{m-3}=-4m^2+24m-33$

Відповідь: $y_1=-1$, $y_2=-13$, $y_{13}=-673$, $y_k=-4k^2+3$, $y_{m-3}=-4m^2+24m-33$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Визначте члени x_1, x_2, x_5 послідовності (x_n), заданої формулою n-го члена:

1) $x_n = 5n$; 2) $x_n = \frac{n}{3}$; 3) $x_n = 1 - 2n$; 4) $x_n = 5 + 3n$.

За формулою n-го члена послідовності:

5) $a_n = \frac{10}{n} + 4$ визначте a_1, a_2, a_{10}, a_p, a_{k+1};

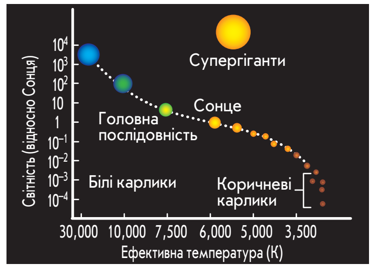
6) $a_n = 8 - \frac{18}{n}$ визначте a_1, a_2, a_9, a_p, a_{k+1};

7) $y_n = 2n^2 - 9$ визначте y_1, y_2, y_8, y_k, y_{m-2};

8) $y_n = 6 - 5n^2$ визначте y_1, y_2, y_{11}, y_k, y_{m-1}.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Послідовності в астрономії



В астрономії для класифікації зірок використовують діаграму Герцшпрунга — Расселла, на якій зірки утворюють окремі послідовності. Більшість зірок належать до так званої **головної послідовності**. Сонце теж є зіркою головної послідовності.

ПРИКЛАД 2

Запишіть перші три члени послідовності (x_n), заданої рекурентною формулою $x_{n+1} = 5x_n - 3$, якщо $x_1 = 4$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Приймемо $n = 1$ і підставимо в задану формулу значення x_1.	$x_2 = 5x_1 - 3$; $x_2 = 5 \cdot 4 - 3 = 17$
КРОК 2	Приймемо $n = 2$ і підставимо в задану формулу знайдене на кроці 1 значення x_2.	$x_3 = 5x_2 - 3$; $x_3 = 5 \cdot 17 - 3 = 82$

Відповідь: 4; 17; 82.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Запишіть перші три члени послідовності (y_n), яку задано рекурентно:

1) $y_1 = -2$, $y_{n+1} = y_n$;

2) $y_1 = 6$, $y_{n+1} = -y_n$;

3) $y_1 = 2$, $y_{n+1} = 5y_n$;

4) $y_1 = 18$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{3}$;

5) $y_1 = 3$, $y_{n+1} = 2y_n - 9$;

6) $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 10 - 3y_n$;

7) $y_1 = 0$, $y_{n+1} = 5y_n + 6 - n$;

8) $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 3y_n + n - 2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Термін «рекурентний» походить від латинського слова *recurrens* — той, який повертається. **Рекурентна формула** дозволяє обчислити значення будь-якого члена послідовності, знаючи значення кількох її попередніх членів.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте знайти закономірність і продовжити послідовність:

1) 77, 49, 36, 18, ...

2) 88, 64, 24, ...

ПРИКЛАД 3

Визначте, чи є число -1 членом послідовності, заданої формулою $a_n = \frac{21}{n+3} - 4$. Якщо так, знайдіть його порядковий номер.

Розв'язання

Задане число буде членом цієї послідовності, якщо знайдеться такий порядковий номер n, що $a_n = -1$. Тобто якщо рівняння $\frac{21}{n+3} - 4 = -1$ матиме натуральний розв'язок $(n \in N)$.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Складемо рівняння $a_n = -1$, використовуючи задану формулу.	$\frac{21}{n+3} - 4 = -1$
КРОК 2	Розв'яжемо отримане дробово-раціональне рівняння.	$\frac{21}{n+3} = 3 \,\big\vert :3$; $\frac{7}{n+3} = 1$; $n = 4$
КРОК 3	Проаналізуємо отримане значення n.	$n = 4$; $4 \in N$, тому $a_4 = -1$

Відповідь: так, $n = 4$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Визначте, чи є число x членом послідовності (a_n), заданої аналітично. Якщо так, то знайдіть його порядковий номер.

1) $x = 6$, $a_n = 2n$;

2) $x = 12$, $a_n = 3n$;

3) $x = 9$, $a_n = \frac{n}{4} + 3$;

4) $x = 4$, $a_n = 2 - \frac{n}{5}$;

5) $x = 8$, $a_n = \frac{16}{n+1} + 6$;

6) $x = 6$, $a_n = 10 - \frac{28}{n+2}$;

7) $x = 6$, $a_n = 0{,}1n^2 - 0{,}4$;

8) $x = 13$, $a_n = 0{,}5n^2 + 9$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Якщо на парковці місця для автомобілів розмічувати не перпендикулярно до полоси руху, а під кутом 45°, це збільшить кількість паркувальних місць. Адже в цьому випадку поворотна дуга автомобіля стає меншою, що дозволяє звузити смуги доступу для автомобілів. Ідея змінити кут розмітки належить британському математику Девіду Персі.

ПРИКЛАД 4

За умовами паркінгу оплату стоянки автомобіля розраховують так: початковий внесок складає 5 г. о. (до 1 год стоянки), за кожну наступну годину слід сплатити 4 г. о.

1) Складіть формулу для обчислення суми коштів, яку водій повинен сплатити за стоянку.
2) Визначте, яку суму має сплатити водій, якщо він залишив машину на парковці о 10:45, забрав її о 14:10, а умова оплати — лише погодинна.
3) Визначте, скільки повних годин машина перебувала на парковці, якщо водій сплатив 29 г. о.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Визначимо, яку суму має сплатити водій за парковку без урахування першої години стоянки.	$S=4n$, де n — кількість годин, упродовж яких автомобіль перебував на парковці
КРОК 2	Визначимо вартість оплати послуг парковки впродовж усього часу стоянки.	$S_n=5+4n$
2) КРОК 1	Знайдемо час стоянки автомобіля.	1 год — з 10:45 до 11:45; 3 год — з 11:45 до 14:45 (за умови погодинної оплати)
КРОК 2	Визначимо вартість стоянки, зважаючи на те, що у формулі для S_3 плату за першу годину стоянки вже враховано.	$S_3=5+4\cdot3=17$ (г. о.)
3) КРОК 1	Складемо рівняння для знаходження кількості повних годин стоянки автомобіля, прийнявши $S_n=29$.	$5+4n=29$
КРОК 2	Розв'яжемо отримане рівняння. Зробимо висновок.	$4n=24$; $n=6$, $n\in N$ — отже, час стоянки на парковці дорівнює 6 повних годин

Відповідь: 1) $S_n=5+4n$; 2) 17 г. о.; 3) 6 год.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

1) Майстер щодня ремонтує 12 велосипедів. Скільки велосипедів відремонтує майстер:
   а) за два дні; б) за три дні?
2) Роупджампінг — стрибок із високого об'єкта зі страховкою-мотузкою. Один такий стрибок коштує 15 г. о.
   а) Скільки коштуватиме стрибок для 4 осіб (кожен стрибає по одному разу)?
   б) Запишіть формулу, за якою можна обчислити вартість стрибків (у г. о.) для групи з n осіб (кожен стрибає по одному разу).
3) Відпочинок у розважальному центрі коштує 20 грн для однієї дитини протягом одного дня.
   а) Скільки коштуватиме відпочинок у центрі для 2 дітей протягом одного дня; для 3 дітей протягом одного дня?
   б) Запишіть формулу, за якою можна обчислити вартість (у грн) відпочинку в центрі для n дітей протягом одного дня.
   в) Скільки дітей відпочивали в центрі, якщо загальна сума, сплачена їхніми батьками за 1 день, становила 6000 грн?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Числа Фібоначчі безпосередньо пов'язані із золотим перерізом — пропорцією, у якій одна частина відноситься до іншої так само, як ціле відноситься до першої частини. Золотий переріз має широке застосування в живописі, архітектурі, кінематографі, фотографії, дизайні тощо. Із золотим перерізом також пов'язані золота спіраль і спіраль Фібоначчі.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Сьогодні дедалі більше людей замислюються над тим, щоб установити на даху свого будинку сонячні панелі.

Ілон Маск, співзасновник компанії Tesla Motors, презентував новинку, розроблену спільно з компанією SolarCity, — фотоелектричні панелі «Сонячний дах» (Solar Roof). Вони повністю вбудовані в дах і можуть замінити звичайні покрівельні матеріали. Ефективність «Соняшного даху» становить 98 % від ефективності звичайних сонячних панелей.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте знайти перевагу аналітичного способу задання послідовності над рекурентним.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і продовжте послідовність:

2

12

1112

3112

132112

....

4) Залежність кількості x_n зарядних пристроїв на сонячних батареях, проданих в інтернет-магазині протягом одного тижня, від кількості n продавців-консультантів можна виразити формулою $x_n = 5n + 10$.
   а) Скільки зарядних пристроїв має бути продано протягом тижня, якщо в магазині працюють 8 продавців?
   б) Скільки продавців має працювати в магазині, щоб протягом тижня було продано 300 зарядних пристроїв?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Обчисліть чотири перші члени послідовності, яку задано формулою n-го члена:

1) $a_n = 5$; 3) $x_n = \dfrac{4}{n+3}$; 5) $z_n = -n^2 + \dfrac{1}{2}n - 3$;

2) $y_n = 2n + 3$; 4) $b_n = \dfrac{-2}{5n-1}$; 6) $c_n = -n^3 - n + 11$.

2 Визначте, яким за номером членом послідовності, заданої аналітично, є число M, якщо:

1) $x_n = -3n + 7$, $M = -14$; 4) $b_n = \dfrac{2n-4}{n+9}$, $M = \dfrac{3}{7}$;

2) $y_n = 2n^2 + 1 - n$, $M = 16$; 5) $z_n = (n-3)^4 - 2$, $M = 79$;

3) $a_n = -n^4 + 7$, $M = -9$; 6) $c_n = 2(n+4)^{-2}$, $M = \dfrac{1}{18}$.

3 Запишіть перші п'ять членів послідовності (a_n), яку задано рекурентно:

1) $a_1 = 2$, $a_n = 4a_{n-1} + 3$; 4) $a_1 = 81$, $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1}$;

2) $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 1}{2}$; 5) $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{4a_{n-1} + 16}{0{,}2}$;

3) $a_1 = -1$, $a_n = 2n \cdot a_{n-1}$; 6) $a_1 = 3$, $a_n = 2n \cdot a_{n-1}^2 + 1$.

4 Обчисліть перші чотири члени послідовності, номери яких є парними числами, якщо послідовність задано аналітично:

1) $a_n = 3^n$; 3) $c_n = (-1)^n + 4$; 5) $x_n = (-3)^n + 5n$;

2) $b_n = -2^n$; 4) $y_n = (-2)^n + (-1)^n$; 6) $z_n = -(-1)^n - 16$.

5 Послідовність (y_n) задано формулою $y_n = 6n + 17$. Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени цієї послідовності є більшими за 90.

6 Послідовність (y_n) задано формулою $y_n = -8n + 291$. Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени цієї послідовності є меншими від 11.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $c_n = \dfrac{1}{n+5}$, то $c_n < c_{n+1}$.

2) Якщо $a_n = 3$, то $10 + a_{10} = 13$.

3) Число 2018 є членом послідовності (x_n), заданої формулою $x_n = (-1)^n \cdot n$.

4) Якщо послідовність задано формулою $y_n = (-1)^n$, то сума перших її 60 членів дорівнює 0.

5) Якщо послідовність (b_n) задано формулою $b_n = 20 - n$, то добуток перших її 20 членів дорівнює 0.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТРЕЙЛЕР ДО НОВОГО ФІЛЬМУ»

Напередодні виходу кінофільму на екрани був випущений трейлер до цього фільму. На другий день після виходу трейлера його переглянула половина всіх учнів школи. Частину учнів школи, що переглянули трейлер на n-й день після його виходу, можна визначити за формулою $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

1 Яка частина учнів школи переглянула трейлер на третій день після його виходу?

2 Скільки відсотків усіх учнів школи переглянули трейлер на четвертий день після його виходу?

3 Скільки відсотків усіх учнів школи ще не переглянули трейлер на п'ятий день після його виходу?

4 Запишіть формулу (послідовність (y_n)), за якою можна знайти частину учнів школи, які не переглянули трейлер на n-й день після його виходу.

5 Знайдіть n — найменший номер дня прокату трейлера, коли його переглянули не менше ніж 90 % усіх учнів школи.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 За заданою формулою n-го члена послідовності:

1) $x_n = \dfrac{n}{4}$ визначте x_1, x_2, x_3;

2) $c_n = 7 - 2n$ визначте c_1, c_2, c_4;

3) $a_n = \dfrac{12}{n} + 3$ визначте a_1, a_2, a_6, a_p, a_{k+1};

4) $y_n = 3n^2 - 14$ визначте y_1, y_2, y_{12}, y_k, y_{m-3}.

Ральф Нельсон Елліотт (англ. *Ralph Nelson Elliott*; 1871–1948) — американський фінансист, творець теорії хвиль, яка носить його ім'я та якою користуються дотепер на фінансових біржах. Елліотт помітив закономірність у моделях поведінки людського суспільства й зіставив їх зі співвідношенням чисел Фібоначчі — золотою пропорцією.

IQ

TO BE SMART

Побачити, як математичні закономірності проявляються в навколишньому світі, можна, переглянувши мультфільм «Природа в числах» (Nature by numbers, Іспанія).

Послідовність Фібоначчі, золотий переріз і багато іншого — усе це присутнє в природі та знаходить своє застосування в роботі художників, архітекторів, інженерів, дизайнерів.

Див. приклад 1

Див. приклади 2–4

2 Знайдіть перші три члени послідовності (y_n), заданої рекурентною формулою:

1) $y_{n+1}=y_n$, якщо $y_1=3$;
2) $y_{n+1}=\frac{y_n}{4}$, якщо $y_1=32$;
3) $y_{n+1}=6y_n-12$, якщо $y_1=2$;
4) $y_{n+1}=3y_n+8-n$, якщо $y_1=1$.

3 Визначте, чи є число x членом послідовності (a_n). Якщо так, знайдіть його порядковий номер.

1) $x=20$, $a_n=4n$;
2) $x=-1$, $a_n=\frac{n}{3}-5$;
3) $x=10$, $a_n=14-\frac{35}{n+3}$;
4) $x=39$, $a_n=0{,}5n^2-11$.

4 Розв'яжіть задачу.

1) Порт щодоби приймає 3 танкери. Скільки танкерів порт прийме:
   а) за 2 доби; б) за 3 доби?
2) Оренда бульдозера протягом 1 год становить 800 грн.
   а) Скільки коштуватиме оренда бульдозера протягом 4 год?
   б) Запишіть формулу, за якою можна обчислити вартість (у грн) оренди бульдозера протягом n год роботи.
3) У готелі є сімейні 4-місні номери, до яких заселяють лише сім'ї з 4 осіб.
   а) Скільки осіб проживають у двох; у трьох таких номерах?
   б) Запишіть формулу, за якою можна обчислити кількість осіб, що проживають в n таких номерах.
   в) Скільки 4-місних номерів зайнято, якщо зараз у них проживають 108 осіб?
4) Залежність кількості y_n відвідувачів зоопарку протягом дня від кількості n рідкісних та екзотичних тварин, що мешкають у ньому, можна виразити формулою $y_n=3n+150$.
   а) Скільки людей відвідають протягом дня зоопарк, у якому мешкають 120 таких тварин?
   б) Скільки таких тварин має бути в зоопарку, щоб протягом дня кількість відвідувачів становила 1500 осіб?

Бонусне завдання

5 Знайдіть за формулою n-го члена $x_n=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot\sqrt{5}}$ п'ятий член послідовності Фібоначчі.

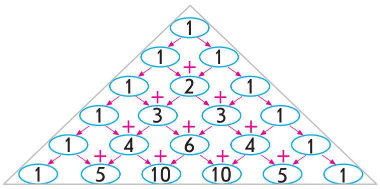
ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть закономірність у послідовності та вставте замість знака питання пропущене число:

1) 4; 6; 8; ?;
2) 3; 5; 7; ?;
3) 75; 70; 65; ?;
4) 83; 73; 63; ?;
5) −15; −12; −9; ?;
6) −6; −10; −14; ?;
7) 120; 114; ?; 102;
8) 132; ?; 138; 141.
9) −2; 2; −2; 2; ?; 2.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Трикутник Паскаля



Числовий трикутник Паскаля — невичерпне джерело різноманітних математичних загадок.

Спробуйте знайти закономірність побудови кожного нового рядка трикутника Паскаля.

Знайдіть відповідну інформацію і дослідіть, як трикутник Паскаля пов'язаний із простими числами, трикутними числами, числами Фібоначчі, трикутником Серпінського, шахами.

«Будь-якій людській діяльності притаманні три відмінних риси: форма, час і відношення, — і всі вони підпорядковані сумаційній послідовності Фібоначчі.»

Ральф Нельсон Еллiотт

§ 17 АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ФОРМУЛА *n*-ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

ВЧОРА	Ви систематизували свої знання про числові послідовності та способи їх задання
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся про особливу числову послідовність — арифметичну прогресію, її елементи, основні властивості
ЗАВЖДИ	Ви зможете будувати математичні моделі прогнозування та застосовувати їх у повсякденному житті, майбутньому бізнесі

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

На шоу талантів після виступу всіх учасників глядачі протягом 30 хв могли взяти участь в смс-голосуванні за улюбленого учасника. Протягом першої хвилини від початку голосування свою думку висловили 4800 глядачів. Протягом кожної наступної хвилини голосувало на 160 глядачів менше, ніж попередньої хвилини.

1) Скільки глядачів проголосували протягом другої хвилини від початку голосування?
2) Скільки глядачів проголосували протягом третьої хвилини від початку голосування?
3) Складіть формулу, за якою обчислюється кількість глядачів, які проголосували протягом n-ї хвилини від початку голосування $(1 \leqslant n \leqslant 30)$.

Коментар до розв'язання

Позначимо послідовність чисел, кожне з яких виражає кількість глядачів, що взяли участь у голосуванні, через (a_n). Кількість глядачів, які проголосували протягом другої хвилини, дорівнює $a_2 = 4800 - 160 = 4640$, протягом третьої хвилини — $a_3 = 4800 - 160 - 160 = 4800 - 2 \cdot 160$.

За умовою задачі така тенденція голосування зберігалася протягом 30 хв. Бачимо, що кожне з чисел послідовності (a_n), починаючи з другого, дорівнює попередньому, зменшеному на одне й те саме число 160. Отримана послідовність має спеціальну назву — **арифметична прогресія**.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Означення 1. **Арифметичною прогресією** називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У пісенному конкурсі Євробачення Україна перемагала у 2004 та 2016 рр.
- Перше шоу Євробачення (1956) тривало 100 хв.
- Протягом історії Євробачення діяло 6 різних систем визначення переможця.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- арифметична прогресія
- різниця арифметичної прогресії
- *n*-й член, формула *n*-го члена арифметичної прогресії
- характеристична властивість арифметичної прогресії
- зростаючі й спадні арифметичні прогресії

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$d = a_{n+1} - a_n$

Означення 2. Число, яке є різницею між певним членом послідовності (починаючи з другого) та попереднім її членом, називають **різницею арифметичної прогресії** і позначають літерою d.

Введемо позначення:

(a_n) — арифметична прогресія;
d — різниця арифметичної прогресії;
n — номер члена арифметичної прогресії;
a_1 — перший член прогресії;
a_n — n-й член прогресії;
a_{n+1} — наступний за n-м член прогресії;
a_{n-1} — попередній для n-го член прогресії.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Слово «прогресія» походить від латинського *progressio* — рух уперед, збільшення;

«арифметичний» — від грецького слова αριθμός — число.

d — перша літера латинського слова *differentia* — різниця.

Таким чином, в арифметичній прогресії (a_n) маємо: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$ і т. д., тобто для будь-якого натурального числа n виконується умова $a_{n+1} = a_n + d$. Звідси $d = a_{n+1} - a_n$.

Арифметичну прогресію можна записати за допомогою рекурентної формули: $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Твердження, обернене до означення

Якщо в деякій послідовності різниця між будь-яким її членом і попереднім є сталою (дорівнює одному й тому самому числу), то така послідовність є **арифметичною прогресією**.

Наведемо приклади арифметичної прогресії.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте навести приклади зростаючої, спадної та стаціонарної арифметичних прогресій. Як різниця d впливає на властивості прогресії?

Арифметична прогресія (a_n)	Перший член a_1	Різниця d	Знак d	Властивість послідовності
1; 4; 7; 10; 13; ...	1	3	$d > 0$	зростаюча
45; 40; 35; 30; ...	45	–5	$d < 0$	спадна
–1; –1; –1; –1; ...	–1	0	$d = 0$	**стаціонарна**

СЛІД ЗНАТИ!

Арифметичну прогресію, кожний член якої більший за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n$, називають **зростаючою**.

Арифметичну прогресію, кожний член якої менший від попереднього, тобто $a_{n+1} < a_n$, називають **спадною**.

РОЗМИНКА 1

1 Визначте, чи є арифметичною прогресією послідовність:

1) 2; 7; 12; 17; ...; 3) 5; 0; 5; 0; ...;
2) 2; −2; −8; −12; ...; 4) 17; 17; 17; 17; ... .

2 Укажіть перший і другий члени та знайдіть різницю арифметичної прогресії:

1) 99; 89; 79; 69; ...; 3) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; ...;
2) −2; −9; −16; −23; ...; 4) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, ...

3 Запишіть перші п'ять членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 3,\ d = 7$; 3) $a_1 = -25,\ d = 4$;
2) $a_1 = 2,\ d = -1{,}5$; 4) $a_1 = -8{,}5,\ d = -2{,}5$.

При рекурентному способі задання прогресії необхідно знати її попередній член, що не завжди є зручним під час розв'язування задач. Цього можна уникнути, якщо вивести формулу n-го члена арифметичної прогресії.

Розглянемо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d:

a_1 — її перший член;

$a_2 = a_1 + d$ — другий член;

$a_3 = \underbrace{a_2}_{} + d = \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + d = a_1 + 2d$ — третій член;

$a_4 = a_3 + d = \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} + d = a_1 + 3d$ — четвертий член і т. д.

Якщо проаналізувати отриманий ряд членів послідовності (a_n) і їх запис, помітимо, що кожний член послідовності a_n дорівнює сумі a_1 і різниці арифметичної прогресії, помноженій на число, що на 1 менше, ніж порядковий номер a_n:

$a_1 = a_1 + d \cdot 0$, $a_2 = a_1 + d \cdot 1$, $a_3 = a_1 + d \cdot 2$, $a_4 = a_1 + d \cdot 3$ і т. д.

Отже, n-й член арифметичної прогресії можна знайти за формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$.

РОЗМИНКА 2

1 Дано арифметичну прогресію (a_n). Знайдіть:

1) a_5, якщо $a_1 = 2,\ d = 5$; 3) a_6, якщо $a_1 = -18,\ d = 3$;
2) a_7, якщо $a_1 = 3,\ d = -2$; 4) a_{11}, якщо $a_1 = -10{,}5,\ d = -5{,}5$.

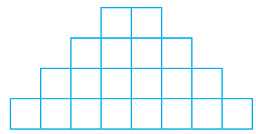
2 Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

1) 2; 11; 20; 29; ...; 3) 7; 7; 7; 7; ...;
2) −1; −4; −7; −10; ...; 4) $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; ... .

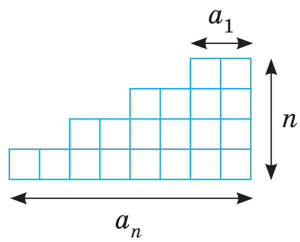
ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Арифметичну прогресію можна зобразити на площині у вигляді піраміди або сходів: кожний наступний ряд (рахуючи зверху вниз) — це наступний член прогресії.

Наприклад, арифметична прогресія 2; 4; 6; 8; 10; ... може мати вигляд



або



Спробуйте зобразити арифметичну прогресію, у якій $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 4$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Формула n-го члена арифметичної прогресії має вигляд:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Щоб задати арифметичну прогресію, досить знати її перший член та різницю.

Розглянемо деякі **властивості арифметичної прогресії.**

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Характеристична властивість арифметичної прогресії

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх із ним членів.

Якщо (a_n) — арифметична прогресія, то $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Півсуму двох чисел $b = \dfrac{a+c}{2}$ називають **середнім арифметичним** двох чисел.

Доведення

Запишемо формули для a_{n-1} і a_{n+1} через a_n: $a_{n-1} = a_n - d$; $a_{n+1} = a_n + d$. Тоді $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \dfrac{a_n - d + a_n + d}{2} = \dfrac{2 \cdot a_n}{2} = a_n$, що й треба було довести.

Справедливим є також **обернене твердження.**

Якщо будь-який член послідовності, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів, то ця послідовність є арифметичною прогресією.

Якщо $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$ $(n \geqslant 2)$, то послідовність (a_n) є арифметичною прогресією.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У стародавніх греків поняття арифметичної прогресії було логічним продовженням поняття арифметичної пропорції: $a - b = b - c$. Числа a, b і c створювали арифметичну прогресію з різницею $\dfrac{c-a}{2}$. Арифметичну прогресію тоді позначали символом $\div$.

Цю властивість використовують, якщо потрібно довести, що послідовність є арифметичною прогресією.

Зауважимо: якщо арифметична прогресія скінченна, то характеристична властивість справедлива *для всіх її членів, окрім першого та останнього*.

Узагальнена характеристична властивість арифметичної прогресії

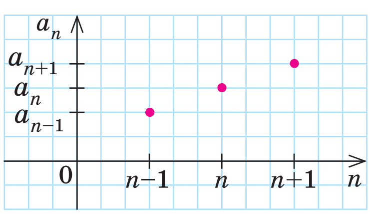
Кожний середній член арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному рівновіддалених від нього членів:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (n - k \geqslant 1).$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (n - k \geqslant 1)$$

Члени арифметичної прогресії можна зображати точками на координатній площині (див. рисунок), причому всі точки лежатимуть на одній прямій.



Послідовність, яку задано формулою $a_n = kn + b$, де k і b — числа, є арифметичною прогресією.

Дійсно, розглянемо формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$. Розкриємо дужки та запишемо її у вигляді $a_n = a_1 + dn - d$, або $a_n = dn + (a_1 - d)$. Якщо ввести позначення: $d = k$ і $a_1 - d = b$, то остання формула матиме вигляд $a_n = kn + b$.

Правильним є також **обернене твердження.**

Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою вигляду $a_n = kn + b$, де k і b — числа.

ПРИКЛАД 1

Знайдіть різницю і тринадцятий член арифметичної прогресії (a_n): -2; $-0,8$; … .

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо різницю d арифметичної прогресії (a_n) як різницю двох сусідніх членів прогресії.	$a_1=-2$; $a_2=-0,8$; $d=a_2-a_1=1,2$
КРОК 2	Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) для a_{13} та обчислимо його значення.	$a_{13}=a_1+12d$; $a_{13}=-2+12\cdot 1,2$; $a_{13}=12,4$

Відповідь: 1,2; 12,4.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Визначте різницю арифметичної прогресії:

1) (a_n): 3; 5; … і знайдіть її третій член;
2) (x_n): 1; 6; … і знайдіть її четвертий член;
3) (c_n): 49; 45; … і знайдіть її п'ятий член;
4) (y_n): 38; 35; … і знайдіть її шостий член;
5) (a_n): -3; $-2,6$; … і знайдіть її десятий член;
6) (a_n): -5; $-3,9$; … і знайдіть її одинадцятий член;
7) (x_n): $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-5$; … і знайдіть її двадцять перший член;
8) (c_n): 6; $6-\sqrt{3}$; … і знайдіть її двадцять третій член.

Якщо відомі два несусідні члени арифметичної прогресії, її різницю можна знайти за формулою $d=\dfrac{a_n-a_k}{n-k}$ $(n\neq k)$.

Наприклад, якщо в арифметичній прогресії (x_n) $x_{18}=11,2$; $x_{24}=-2,6$, то $d=\dfrac{x_{24}-x_{18}}{24-18}$; $d=\dfrac{-2,6-11,2}{6}=-2,3$.

ПОМІРКУЙТЕ

Доведіть самостійно:

- $d=\dfrac{a_n-a_k}{n-k}$, якщо $n\neq k$ (формула різниці);
- $a_n=a_k+(n-k)d$ (формула n-го члена);
- $a_n=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$;
- $a_n+a_m=a_k+a_p$, якщо $n+m=k+p$.

Перевірити правильність доведення ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 2

Визначте, чи є число 42 членом арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює -8, а різниця 4. Якщо так, то вкажіть його порядковий номер.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо позначення арифметичної прогресії та її елементів для зручності запису розв'язання.	(x_n) — задана арифметична прогресія; $x_1=-8$; $d=4$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії та підставимо в неї число 42. Розв'яжемо отримане рівняння відносно n і перевіримо, чи виконується умова $n \in \boldsymbol{N}$.	$x_n = x_1 + d(n-1)$; $42 = -8 + 4(n-1)$; $n = 13{,}5$; $13{,}5 \notin \boldsymbol{N}$
КРОК 3	Зробимо висновок, проаналізувавши отримане значення.	$13{,}5 \notin \boldsymbol{N}$, тому число 42 не є членом заданої арифметичної прогресії

Відповідь: число 42 не є членом заданої арифметичної прогресії.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Для того щоб визначити, чи є деяке число членом прогресії, потрібно:

1) припустити, що дане число є n-м членом прогресії;
2) знайти його порядковий номер n;
3) перевірити, чи виконується умова $n \in \boldsymbol{N}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Визначте, чи є число a членом арифметичної прогресії (x_n). Якщо так, то вкажіть його порядковий номер.

1) $a = 8$; (x_n): 0; 2; 4; 6; ...;
2) $a = 7$; (x_n): 1; 3; 5; ...;
3) $a = 9$; (x_n): 5; 4; 3; 2; ...;
4) $a = \frac{1}{2}$; (x_n): 3; 2; 1; ... .

Визначте, чи є число a членом арифметичної прогресії (x_n), якщо задано її перший член x_1 і різницю d. Якщо так, то вкажіть порядковий номер числа a.

5) $a = 49$; $x_1 = -6$; $d = 5$;
6) $a = 33$; $x_1 = -10$; $d = 3$;
7) $a = 27{,}8$; $x_1 = 1{,}8$; $d = 1{,}3$;
8) $a = -9{,}7$; $x_1 = 4{,}3$; $d = -1{,}4$.

ПРИКЛАД 3

Між числами -4 і $6{,}8$ вставте два числа, щоб усі чотири числа утворили зростаючу арифметичну прогресію. Які це числа?

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо позначення арифметичної прогресії. Визначимо послідовність членів прогресії, враховуючи те, що -4 і $6{,}8$ є деякими з них. Оскільки арифметична прогресія зростаюча, член -4 матиме менший номер, ніж член $6{,}8$. Для зручності приймемо, що -4 є першим членом прогресії, $6{,}8$ — четвертим.	(x_n) — арифметична прогресія $-4 \to x_1$ x_2; x_3 $\to$ шукані члени (x_n) $6{,}8 \to x_4$
КРОК 2	$x_4 = 6{,}8$ — відомий член прогресії, запишемо для нього формулу n-го члена і знайдемо d.	$x_4 = x_1 + 3d$; $6{,}8 = -4 + 3d$; $3d = 10{,}8$; $d = 3{,}6$
КРОК 3	Знайдемо x_2 і x_3 за рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n + d$.	$x_2 = x_1 + d$, $x_2 = -4 + 3{,}6 = -0{,}4$; $x_3 = x_2 + d$, $x_3 = -0{,}4 + 3{,}6 = 3{,}2$

Відповідь: $-0{,}4$; $3{,}2$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Перші чотири члени арифметичної прогресії мають вигляд: x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$. Знайдіть x і y, якщо:

1) перший і третій члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 6 і 20;
2) перший і третій члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 4 і 26;
3) перший і четвертий члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 5 і -43;
4) перший і четвертий члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 3 і -54.

Між числами a і b вставте два числа так, щоб усі чотири числа утворили зростаючу арифметичну прогресію. Знайдіть n-й член цієї прогресії, якщо:

5) $a=-9$, $b=27$, $n=16$;
6) $a=-15$, $b=6$, $n=23$;
7) $a=-1{,}2$, $b=0{,}3$, $n=9$;
8) $a=-5$, $b=4{,}6$, $n=21$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Послідовності в літературі

Згадаємо віршові розміри: ямб, хорей, дактиль, амфібрахій, анапест. У ямбі номери наголошених складів утворюють арифметичну прогресію, у якій і перший член, і різниця дорівнюють 2:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots .$$

Спробуйте описати арифметичну прогресію в інших віршових розмірах, наведіть приклади віршів.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n): 7,3; 5,9; ... .

Розв'язання

Для знаходження першого від'ємного члена арифметичної прогресії розв'яжемо нерівність $a_n<0$ відносно n і знайдемо її найменший натуральний розв'язок.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо d — різницю арифметичної прогресії (a_n).	$a_1=7{,}3$; $a_2=5{,}9$; $d=a_2-a_1=5{,}9-7{,}3=-1{,}4$
КРОК 2	Запишемо формулу n-го члена в загальному вигляді та підставимо в неї значення a_1 і d.	$a_n=a_1+d(n-1)$; $a_n=7{,}3-1{,}4(n-1)$; $a_n=-1{,}4n+8{,}7$
КРОК 3	Розв'яжемо нерівність $a_n<0$.	$-1{,}4n+8{,}7<0$; $n>6\frac{3}{14}$
КРОК 4	Знайдемо найменший натуральний розв'язок отриманої нерівності та зробимо висновок щодо шуканого a_n.	$n=7$ — найменший натуральний розв'язок, отже, шукане $a_n=a_7$
КРОК 5	Знайдемо a_7 за формулою n-го члена.	$a_7=a_1+6d$; $a_7=-1{,}1$

Відповідь: $-1{,}1$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Визначте перший від'ємний член арифметичної прогресії:

1) (a_n): 7; 3; ...;
3) (a_n): 15; 8; ...;
2) (a_n): 8; 2; ...;
4) (a_n): 12; 7; ... .

Використовуючи формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії:

5) (a_n): 93; 84; ...;
7) (a_n): 8,3; 7,7; ...;
6) (a_n): 106; 95; ...;
8) (a_n): 10,2; 9,5; ... .

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Задачі, пов'язані з арифметичною прогресією, зустрічаються вже в давньоєгипетських папірусах.

ПРИКЛАД 5

Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $y_n = 9 - 3n$, є арифметичною прогресією.

Доведення

Щоб довести, що послідовність (y_n) є арифметичною прогресією, перевіримо, чи виконується рівність $y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2}$.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо формули для y_{n-1} і y_{n+1}.	$y_{n-1} = 9 - 3(n-1)$; $y_{n+1} = 9 - 3(n+1)$
КРОК 2	Знайдемо суму $y_{n-1} + y_{n+1}$.	$y_{n-1} + y_{n+1} = 9 - 3(n-1) + 9 - 3(n+1) =$ $= 18 - 6n = 6(3-n)$
КРОК 3	Перевіримо, чи виконується рівність $y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2}$. Зробимо висновок.	$9 - 3n = \frac{6(3-n)}{2}$; маємо: $3(3-n) = 3(3-n)$. Отже, послідовність (y_n), задана формулою $y_n = 9 - 3n$, є арифметичною прогресією

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Знайдіть $y_{n-1} + y_{n+1}$, якщо:

1) $y_n = n + 7$; 2) $y_n = n - 4$; 3) $y_n = \frac{2n}{5}$; 4) $y_n = \frac{3n}{8}$.

Доведіть, що послідовність (y_n) є арифметичною прогресією, якщо:

5) $y_n = 2 - 5n$; 6) $y_n = 3n + 7$; 7) $y_n = \frac{1-5n}{4}$; 8) $y_n = \frac{9n-4}{2}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2} \quad (n \geqslant 2)$$

ПРИКЛАД 6

У магазині «Fruttis» яблука викладено в чотирикутну піраміду (див. рисунок). Сторона першого (нижнього) шару складається з 12 яблук, сторона кожного наступного шару містить на одне яблуко менше, ніж сторона попереднього. Скільки яблук містить сторона шостого шару піраміди?

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Проаналізуємо умову задачі «сторона кожного наступного шару містить на одне яблуко менше, ніж сторона попереднього».	Послідовність чисел, що виражають кількість яблук на стороні кожного шару, є арифметичною прогресією
КРОК 2	Введемо позначення елементів отриманої арифметичної прогресії (x_n).	$x_1 = 12$, $d = -1$, шуканий член прогресії x_6
КРОК 3	Знайдемо x_6, використовуючи формулу n-го члена $x_n = x_1 + d(n-1)$.	$x_6 = x_1 + 5d$; $x_6 = 12 - 5 = 7$

Відповідь: 7.

ТРЕНУЄМОСЯ

6 Розв'яжіть задачу.

1) У 2017 р. в країні побудували один сучасний сміттєпереробний комплекс. У кожному наступному році планується будувати на три таких комплекси більше, ніж у попередньому. Скільки комплексів планується побудувати у 2018 р.; у 2019 р.?
2) За перший рік із моменту відкриття приватна ветеринарна клініка виділила на благодійні проекти 60 тис. г. о. Кожного наступного року власник клініки планує виділяти на такі проекти на 15 тис. г. о. більше, ніж попереднього. Яку суму (у г. о.) буде виділено на благодійні проекти протягом 6-го року з моменту відкриття клініки?
3) Протягом місяця радіостанція проводила щоденний конкурс серед своїх слухачів. Першого дня призовий фонд склав 6000 грн. Кожного наступного дня призовий фонд був на 200 грн меншим, ніж попереднього.
   а) Скільки гривень складав призовий фонд у четвертий день конкурсу?
   б) Складіть формулу, за якою можна обчислити суму грошей a_n (у грн) призового фонду в n-й день конкурсу $(1 \leqslant n \leqslant 30)$.
4) Автомобіль, виїхавши на автостраду, почав розганятися і за першу секунду подолав 10 м, а за кожну наступну секунду долав на 5 м більше, ніж за попередню, поки не досягнув швидкості 126 км/год. Далі автомобіль рухався з цією самою швидкістю.
   а) Скільки метрів подолав автомобіль за третю секунду від моменту виїзду на автостраду?
   б) На якій секунді автомобіль досягнув швидкості 126 км/год?
   в) Складіть формулу, за якою можна обчислити кількість a_n метрів, які автомобіль долав автострадою за n-ну секунду від початку розгону.

IQ

TO BE SMART

Задача про найщільніше пакування куль, поставлена в 1611 р. Йоганном Кеплером, виникла із запитань: «Як дізнатися, скільки ядер у купі на палубі корабля, не рахуючи їх? Як скласти в трюм найбільшу кількість ядер?». Кеплер припустив, що найбільш щільним укладанням є пірамідальне.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Словацька компанія AeroMobil у 2017 р. планує запустити у продаж автомобіль, що літає, — автоліт. У повітрі він може розганятися до 200 км/год, а по землі — до 160 км/год. Максимальна дальність його польоту становить 700 км.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 (x_n) — арифметична прогресія, $x_1 = 9$, $d = -2$. Знайдіть:

1) x_9;
2) x_{24};
3) $x_3 - x_{21}$;
4) $2x_5 + \frac{1}{3}x_1^2 - 4x_6$;
5) x_{k+7};
6) x_{3k-2}.

2 В арифметичній прогресії:

1) (a_n): $a_{28} = 76$, $d = -3$. Знайдіть a_1.
2) (x_n): $x_1 = -4$, $x_{65} = 120$. Знайдіть d.
3) (a_n): $a_n = 208$, $a_1 = -12$, $d = 11$. Знайдіть n.
4) (x_n): $x_n = -21\frac{2}{5}$, $x_1 = 3\frac{3}{5}$, $d = -0{,}05$. Знайдіть n.
5) (y_n): $y_{12} = 32$, $y_{53} = 114$. Знайдіть d, y_{10}.
6) (c_n): $c_{24} = -53$, $c_{116} = -329$. Знайдіть d, c_1.

3 Визначте, чи містить число m арифметична прогресія:

1) (x_n): 9; 16; ..., якщо $m = 295$;
2) (a_n): $a_1 = 31{,}5$; $d = -1{,}5$, якщо $m = 0$;
3) (x_n): $x_2 = -100$; $d = 6{,}2$, якщо $m = 55$;
4) (y_n): $y_5 = 19$; $y_6 = 17$, якщо $m = -23$;
5) (a_n): $a_{20} = 0$; $a_{66} = -92$, якщо $m = 44$;
6) (c_n): $c_{16} = -7$; $c_{36} = 200$, якщо $m = 112$.

4 Визначте, чи є арифметичною прогресією послідовність (a_n), яку задано формулою n-го члена:

1) $a_n = 6n - 4$;
2) $a_n = n^2 + 2n$;
3) $a_n = 15 - \frac{1}{3}n$;
4) $a_n = \frac{2}{n+3}$;
5) $a_n = 1{,}8n$;
6) $a_n = \frac{4}{n} - 2$.

5 Знайдіть невідомі елементи арифметичної прогресії.

1) Сума другого та четвертого членів арифметичної прогресії дорівнює 6, а сума п'ятого і сьомого членів дорівнює 18. Знайдіть перший член і різницю цієї прогресії.
2) В арифметичній прогресії (x_n) $x_7 = 2{,}3$; $x_{14} = 7{,}2$. Визначте, скільки від'ємних членів містить ця прогресія.
3) Шість чисел утворюють арифметичну прогресію. Сума перших трьох чисел дорівнює $-2{,}7$, а сума трьох останніх дорівнює 0. Знайдіть ці числа.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Із кожних дев'яти послідовних членів будь-якої арифметичної прогресії, що складається з натуральних чисел, можна скласти магічний квадрат.
- Із простих чисел, що є членами арифметичної прогресії, також можна скласти магічний квадрат. Різниця такої прогресії має бути кратною 6.

Спробуйте самостійно побудувати магічні квадрати з простих чисел — членів арифметичної прогресії.

TO BE SMART

Зображення магічного квадрата на гравюрі Альбрехта Дюрера «Меланхолія» вважають першим у європейському мистецтві. Про цікаві властивості магічних квадратів ви можете прочитати в книзі Мартіна Ґарднера «Математичні головоломки й розваги».

4) Арифметичну прогресію задано формулою $c_n = \frac{6}{7}n - 4$.
Знайдіть порядковий номер першого члена прогресії (c_n), який задовольняє умову $c_n \geqslant 12$.

5) (a_n) — арифметична прогресія; $a_7 - a_3 = 8$, $a_2 \cdot a_7 = 75$.
Визначте $a_{24} + a_{17}$.

6) (x_n) — арифметична прогресія; $x_4 : x_6 = -1$, $x_2 \cdot x_8 = -1$.
Визначте $\frac{x_{11}}{x_5}$.

6 Розв'яжіть задачі, використовуючи характеристичну властивість арифметичної прогресії.

1) Три числа a, b і c утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть b, якщо потроєна сума a і c дорівнює −54.
2) Три числа m, n і k утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть n, якщо добуток чисел m і k дорівнює 144, а сума їх квадратів становить 180.
3) Знайдіть усі значення x, при яких числа $x - 12$; x; $7x$ утворюють скінченну арифметичну прогресію.
4) Знайдіть усі значення m, при яких числа $m^2 + 11$; $4m$ і $m + 1$ у поданому порядку утворюють скінченну арифметичну прогресію.
5) Знайдіть натуральні значення n, при яких числа $27 - n^2$; $89 - 2n^2$; $\frac{1}{7}n^2 - 3$ у поданому порядку утворюють арифметичну прогресію.
6) Знайдіть цілі значення a, при яких числа $a - 4$; $\sqrt{42 - 3a}$; $2a + 7$ у поданому порядку утворюють скінченну арифметичну прогресію.

7 Розв'яжіть задачу.

1) Цифри трицифрового числа, що записані послідовно, утворюють арифметичну прогресію. Сума цих цифр дорівнює 21, а сума їх квадратів дорівнює 19. Знайдіть ці числа.
2) Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть довжини його сторін, якщо добуток чисел, що їх виражають, дорівнює 80, а периметр трикутника становить 15 см.
3) Амфітеатр цирку містить 10 рядів, причому в кожному наступному ряду на 18 місць більше, ніж у попередньому. Визначте, в якому ряду рівно 170 місць, якщо десятий ряд налічує 242 місця.
4) Плавець під час першого тренування подолав дистанцію 150 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату — 800 м за одне тренування. Після цього під час кожного тренування плавець пропливав 800 м.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Слово «прогресія» вперше зустрічається в роботах італійського вченого Аніція Манлія Северина Боеція (бл. 480–524), римського державного діяча, філософа, математика.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Українські паралімпійці здобули 117 медалей на Паралімпійських іграх 2016 р. у Ріо-де-Жанейро. У загальнокомандному заліку збірна України з цією кількістю нагород посіла третю сходинку.

Українські плавці Максим Крипак, Євгеній Богодайко і Денис Дубров одержали по вісім нагород, а найбільшу кількість золотих медалей (5) виборов Максим Крипак.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і замініть знаки питання числами.

3	−4	?	2	19
?	7	−1	15	?

а) Які дистанції плавець подолав під час другого та третього тренувань?

б) Під час якого за номером тренування плавець уперше досягнув результату 800 м?

в) Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі на тиждень?

г) Складіть формулу, за якою можна обчислити відстань a_n (у м), яку подолав плавець під час n-го тренування.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 12

1 Послідовність (x_n) задано рекурентною формулою $x_{n+1}=3x_n$, а $x_1=-1$. Знайдіть x_2.

А	Б	В	Г
−3	−1	2	3

2 Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n): 2; 7; ... .

А	Б	В	Г
$\frac{2}{7}$	−5	5	$\frac{7}{2}$

3 Послідовність (c_n) задано формулою n-го члена $c_n=\frac{3n}{5}$. Визначте c_{n+1}.

А	Б	В	Г
$\frac{4n}{5}$	$\frac{3n+3}{5}$	$\frac{3n+1}{5}$	$\frac{3n}{5}+1$

4 Визначте шостий член a_6 арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_5=2$, а різниця дорівнює 10.

А	Б	В	Г
20	0,2	−8	12

5 Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n): 26; 16; ... .

А	Б	В	Г
−1	−2	−4	−6

6 Установіть відповідність між послідовністю, яку задано формулою n-го члена (1–3), та значенням її третього члена (А–Г).

1	$x_n=3-n$	А	3
2	$y_n=\frac{3}{n}$	Б	2
3	$z_n=n^2-6$	В	1
		Г	0

7 Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени послідовності (b_n) будуть більші за 19, якщо $b_n=-54+6n$.

8 Вадим на першому тренуванні виконав 10 віджимань. Кожного наступного тренування він виконував на 3 віджимання більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату — 40 віджимань за одне тренування.

1) Скільки віджимань виконав Вадим під час третього тренування?

2) Під час якого за номером тренування Вадим уперше досягнув результату 40 віджимань?

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо різниця арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 0, то $a_{n+1} = a_n$.
2) Якщо перший і третій члени арифметичної прогресії дорівнюють 4 і −4 відповідно, то другий її член дорівнює 0.
3) Усі члени арифметичної прогресії, яку задано формулою $x_n = 10n - 9$, додатні.
4) Якщо різниця арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 3, то $a_{n+2} - a_n = 6$.
5) Якщо різниця і десятий член арифметичної прогресії додатні, то всі перші дев'ять членів цієї прогресії також додатні.

Леонардо Пізанський (італ. *Leonardo Pisano*, бл. 1170– бл. 1250), більш відомий як Фібоначчі (*Fibonacci*), — перший значний математик середньовічної Європи.

У 1202 р. з'явилася його знаменита «Книга абака», що містила майже всі арифметичні та алгебраїчні відомості того часу. У ній розглядалися, у тому числі, властивості пропорції, арифметична і геометрична прогресії тощо.

Цікаво, що числова послідовність Фібоначчі була ним відкрита в ході розв'язування задачі про розмноження кроликів, яку також було викладено в «Книзі абака».

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ДЗВІНКИ У РОУМІНГУ»

Компанією «Київстар» тарифікація дзвінків у роумінгу здійснюється похвилинно, плата за з'єднання не стягується. У таблиці наведено тарифи на телекомунікаційні послуги для контрактних абонентів цієї компанії (інформація станом на 2016 р.).

Тарифна зона	1	2	3	4
Вартість вхідного дзвінка, грн/хв	9	12	16	25
Вартість вихідного дзвінка, грн/хв	9	12	16	35
Вартість смс-повідомлення, грн/шт.	3,5	3,5	3,5	3,5

1 Ліліані, яка зараз відпочиває в Хорватії (тарифна зона 2), подзвонила подруга з України. Скільки гривень коштувала Ліліані ця розмова, якщо вона тривала 10 хв?

2 Юрій, який зараз відпочиває в Єгипті (тарифна зона 4), подзвонив другові в Україну. Скільки гривень коштувала Юрію ця розмова, якщо вона тривала 5 хв?

3 Працівник компанії «Київстар» склав рекурентну формулу, за якою обчислюється вартість a_n (у грн) передавання n-го смс-повідомлення для всіх тарифних зон: $a_{n+1} = a_n$, $a_1 = 3{,}5$. Чи правильну формулу склав працівник?

4 Складіть рекурентну формулу, за якою можна обчислити вартість a_n (у грн) вхідного дзвінка для тарифної зони 3 за n-ну хвилину розмови.

5 Складіть формулу, за якою можна обчислити вартість a_n (у грн) вхідного дзвінка для тарифної зони 3 за n хв розмови.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Оператор телекомунікаційних послуг

Сьогодні надання послуг зв'язку є однією з найважливіших сфер бізнесу і посідає друге місце у світі після фінансово-банківської. Телекомунікаційні послуги: інтернет-послуги, послуги колцентрів, відео- та конференцзв'язок, інтерактивні медіа тощо.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Визначте різницю арифметичної прогресії:

1) (a_n): 2; 5; ... і знайдіть її третій член;

2) (x_n): 54; 39; ... і знайдіть її четвертий член;

3) (a_n): −4; −2,7; ... і знайдіть її дванадцятий член;

4) (c_n): $\sqrt{5}$; $\sqrt{5}-9$; ... і знайдіть її двадцять шостий член.

Див. приклад 2

2 Визначте, чи є число a членом арифметичної прогресії (x_n). Якщо так, то вкажіть його порядковий номер.

1) $a=4$, (x_n): −4; −2; 0; 2; ...;   2) $a=5$, (x_n): 2; 1; 0; −1; ... .

Визначте, чи є число a членом арифметичної прогресії (x_n), якщо задано її перший член x_1 і різницю d. Якщо так, то вкажіть порядковий номер числа a.

3) $a=50$, $x_1=-12$, $d=4$;

4) $a=-26{,}2$, $x_1=5{,}8$, $d=-1{,}6$.

Див. приклад 3

3 Перші чотири члени арифметичної прогресії мають вигляд: x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$. Знайдіть x і y, якщо:

1) перший і третій члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 3 і 19;
2) перший і четвертий члени цієї прогресії дорівнюють відповідно 5 і −46.

Між числами a і b вставте два числа так, щоб усі чотири числа утворили зростаючу арифметичну прогресію. Знайдіть n-й член цієї прогресії, якщо:

3) $a=-4$, $b=23$, $n=14$;   4) $a=-6$, $b=8{,}1$, $n=16$.

Див. приклад 4

4 Визначте перший від'ємний член арифметичної прогресії:

1) (a_n): 6; 1; ...;   2) (a_n): 23; 13; ... .

Використовуючи формулу $a_n=a_1+d(n-1)$, знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії:

3) (a_n): 127; 119; ...;   4) (a_n): 12,3; 11,7; ... .

Див. приклад 5

5 Знайдіть $y_{n-1}+y_{n+1}$, якщо:

1) $y_n=n+3$;   2) $y_n=\dfrac{5n}{2}$.

Доведіть, що послідовність (y_n) є арифметичною прогресією, якщо:

3) $y_n=6-2n$;   4) $y_n=\dfrac{5n-2}{3}$.

6 Розв'яжіть задачу.

1) У 2017 р. за сприяння місцевої влади Національну оперу України відвідали 50 учнів певного міста. Заплановано, що в подальшому цю акцію буде подовжено й кожного наступного року оперу відвідають на 20 учнів більше, ніж попереднього. Скільки учнів цього міста відвідають Національну оперу України у 2018 р.; у 2019 р.?

2) Протягом першого року з моменту реєстрації туристична фірма відкрила 8 своїх філіалів. Кожного наступного року планується відкривати на 4 філіали більше, ніж попереднього. Скільки філіалів буде відкрито турфірмою протягом сьомого року з моменту її реєстрації?

3) Протягом двох тижнів видавництво проводило щоденний конкурс серед своїх читачів. Першого дня призовий фонд склав 4200 грн. Кожного наступного дня призовий фонд був на 300 грн меншим, ніж попереднього.
   а) Скільки гривень становив призовий фонд у третій день конкурсу?
   б) Складіть формулу, за якою можна обчислити суму грошей (у грн) призового фонду в n-й день конкурсу.

4) Микола під час першого тренування виконав 14 присідань зі штангою. Кожного наступного тренування він виконував на 2 присідання більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату — 42 присідання за одне тренування. Після цього Микола виконував 42 присідання зі штангою під час кожного тренування.
   а) Скільки присідань виконав Микола під час третього тренування?
   б) Під час якого за номером тренування Микола вперше досягнув результату 42 присідання?
   в) Складіть формулу, за якою можна обчислити кількість присідань, які виконав Микола під час n-го тренування.

Бонусні завдання

7 Знайдіть різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 28, якщо добуток другого та восьмого членів прогресії є найменшим серед можливих.

8 Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть площу цього трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 5.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Послідовність (S_n) задано аналітично формулою n-го члена $S_n = \frac{(7+3n)n}{2}$. Знайдіть:

1) S_1; 2) S_2; 3) S_{10}; 4) S_k; 5) S_{n+1}; 6) S_{n-1}.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- 27 березня відзначають Міжнародний день театру.
- Найстаріший в Україні театр було побудовано в Харкові (1789), згодом — у Києві (1806), Одесі (1810). Найбільш «театральне» місто в Україні — Київ, у ньому 25 театрів.

Див. приклад 6

“Дев'ять індуських знаків суть такі: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. За допомогою цих знаків і знака 0, який називається по-арабськи «сифр», можна написати яке завгодно число.”

Фібоначчі

§ 18 СУМА ПЕРШИХ n ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

ВЧОРА — Ви навчилися визначати, яка послідовність є арифметичною прогресією, та знаходити невідомі елементи арифметичної прогресії

СЬОГОДНІ — Ви ознайомитеся із двома формулами для знаходження суми перших n членів арифметичної прогресії, дізнаєтеся, коли зручно використовувати кожну з них

ЗАВЖДИ — Ви зможете розраховувати час тренувань, прогулянок, подорожей, планувати витрати й прибутки своєї родини

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Клейтон Джейкобсон, прихильник мотоциклетних перегонів, вирішив перенести їх на воду і розробив новий різновид мотоцикла — аквабайк. Перший прототип аквабайка був створений у 1965 р., а в 1968 р. у продаж надійшов промисловий аквабайк Sea-Doo. Дізнайтеся більше: http://aquabike.in.ua/

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Організаторами спортивних змагань з аквабайку було створено призовий фонд. Сума найбільшої винагороди становила 12 000 грн, кожна нижча за рейтингом винагорода була на 1000 грн меншою. Визначте загальну суму призового фонду (у грн), якщо за результатами змагань було визначено 6 призерів.

Коментар до розв'язання

Можна безпосередньо обчислити суму винагороди, отриману кожним із призерів, і додати шість чисел, які є членами арифметичної прогресії. Цей математичний запис має вигляд: $12\,000+$ $+11\,000+10\,000+9000+8000+7000$. Для зручності обчислень згрупуємо доданки: перший з останнім, другий із передостаннім і два середні: $(12\,000+7000)+(11\,000+8000)+(10\,000+9000)=$ $=19\,000\cdot 3=57\,000$ (грн). Якби кількість доданків була значно більшою, такий спосіб був би обтяжливим і незручним.

Виникає запитання: чи можна знайти суму n членів арифметичної прогресії за деякою формулою?

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- арифметична прогресія
- різниця арифметичної прогресії
- n-й член арифметичної прогресії
- формули суми перших n членів арифметичної прогресії

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розглянемо арифметичну прогресію a_1, a_2, a_3, ..., a_n, яка містить скінченну кількість членів. Запишемо їх суму, позначивши її через S_n:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n. \quad (1)$$

Якщо ми запишемо суму цих доданків у порядку спадання їх номерів — з a_n до a_1, то її значення не зміниться:

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_3+a_2+a_1. \quad (2)$$

Додамо почленно рівняння (1) і (2):

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1). \quad (3)$$

Проаналізуємо суми в дужках, скориставшись рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n + d$:

- $a_1 + a_n$;
- $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$;
- $a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$ і т. д.

Легко помітити, що кожна сума, записана в дужках у рівності (3), дорівнює $a_1 + a_n$, а кількість дужок — n. Тобто формула (3) набуватиме вигляду $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$, звідки:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Якщо перетворити одержану формулу, використовуючи формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$, отримаємо:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Одержані формули називають **формулами суми перших n членів арифметичної прогресії.**

Формули для обчислення суми перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

ПРИКЛАД 1

Складіть формулу для знаходження суми перших n членів арифметичної прогресії (a_n), якщо її перший член дорівнює $-4{,}5$, а різниця d дорівнює $0{,}2$. Обчисліть суму перших 100 членів цієї прогресії.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо формулу для знаходження суми перших n членів заданої арифметичної прогресії, спростимо отриманий вираз. Використаємо формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Підставимо в неї значення a_1 і d.	$S_n = \frac{2 \cdot (-4{,}5) + 0{,}2(n-1)}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{\cancel{2} \cdot ((-4{,}5) + 0{,}1(n-1))}{\cancel{2}} \cdot n$; $S_n = 0{,}1n^2 - 4{,}6n$
КРОК 2	Обчислимо суму перших 100 членів прогресії, тобто S_n, при $n = 100$.	$S_{100} = 0{,}1 \cdot 100^2 - 4{,}6 \cdot 100$; $S_{100} = 1000 - 460 = 540$

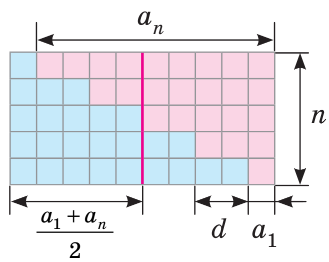
Відповідь: 540.

ПОМІРКУЙТЕ

У який спосіб юний Фрідріх Гаусс миттєво порахував суму чисел від 1 до 100?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + + 96 + 97 + 98 + 99 + 100

Графічна інтерпретація формули суми арифметичної прогресії $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$



ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

За яких умов зручно застосовувати кожну з отриманих формул суми?

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо:

1) $S_n=(5+n)n,\ n=10;$
2) $S_n=(4+n)n,\ n=8;$
3) $S_n=\dfrac{(6,1-2n)n}{2},\ n=20;$
4) $S_n=\dfrac{(3,8+5n)n}{2},\ n=30.$

Складіть формулу для знаходження суми перших n членів арифметичної прогресії, якщо відомі її перший член a_1 та різниця d. Обчисліть суму перших 100 членів прогресії, якщо:

5) $a_1=-32,\ d=4;$
6) $a_1=65,\ d=-5;$
7) $a_1=-12,3,\ d=0,6;$
8) $a_1=18,1,\ d=-0,3.$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

ПРИКЛАД 2

Знайдіть суму перших 12 членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_4=-3;\ x_9=25.$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо формулу $S_n=\dfrac{2x_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ для знаходження суми перших 12 членів прогресії і спростимо отриманий вираз.	$S_{12}=\dfrac{2x_1+11d}{2}\cdot 12;$ $S_{12}=6\cdot(2x_1+11d)$
КРОК 2	Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії для x_4 і x_9.	$x_4=x_1+3d;$ $x_9=x_1+8d$
КРОК 3	Додамо почленно отримані рівності. Знайдемо значення виразу $2x_1+11d$, підставивши значення x_4 і x_9.	$x_4+x_9=2x_1+11d;$ $2x_1+11d=-3+25=22$
КРОК 4	Зауважимо, що вираз $2x_1+11d$ є складовою формули для знаходження S_{12}, одержаної на кроці 1. Обчислимо значення S_{12}.	$S_{12}=6\cdot 22=132$

Відповідь: 132.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

У деяких випадках для того, щоб скористатися формулою

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n,$$

необов'язково знаходити значення a_1 і d, а досить знати n і значення виразу $2a_1+d(n-1)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії (x_n), якщо:

1) $n=16,\ 2x_1+15d=10;$
2) $n=14,\ 2x_1+13d=-6;$
3) $n=8,\ x_2+x_7=15;$
4) $n=17,\ x_4+x_{14}=-24;$
5) $n=18,\ x_5=-21,\ x_{14}=49;$
6) $n=20,\ x_3=-54,\ x_{18}=82;$
7) $n=33,\ x_{17}=28;$
8) $n=45,\ x_{23}=-13.$

ПРИКЛАД 3

Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних парних чисел.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Створимо математичну модель задачі. Запишемо послідовність (a_n) двоцифрових натуральних парних чисел і проаналізуємо її.	10, 12, 14, ..., 98 — арифметична прогресія, у якій $d=2$, $a_1=10$, $a_n=98$
КРОК 2	Знайдемо кількість членів цієї послідовності, тобто знайдемо порядковий номер члена $a_n=98$.	$a_n=a_1+d(n-1)$; $98=10+2(n-1)$; $n=45$
КРОК 3	Обчислимо шукану суму за формулою $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.	$S_{45}=\frac{a_1+a_{45}}{2}\cdot 45$; $S_{45}=\frac{10+98}{2}\cdot 45$; $S_{45}=2430$

Відповідь: 2430.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Обчисліть наведену суму:

1) $1+2+3+\ldots+20$;
2) $1+2+3+\ldots+15$;
3) $-1-2-3-\ldots-40$;
4) $-1-2-3-\ldots-56$.

Обчисліть суму:

5) усіх двоцифрових натуральних чисел, кратних 5;
6) усіх двоцифрових натуральних чисел, кратних 4;
7) усіх трицифрових натуральних чисел, кратних 6 і менших від 700;
8) усіх трицифрових натуральних чисел, кратних 8 і менших від 600.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Кількість членів прогресії 10, 12, ..., 98 можна було знайти інакше. Кількість двоцифрових чисел дорівнює $99-9=90$, з них рівно половина — парні числа. Отже, кількість парних натуральних двоцифрових чисел дорівнює 45.

СЛІД ЗНАТИ!

Будь-яка послідовність членів арифметичної прогресії, починаючи з певного номера і до будь-якого іншого її номера (взятих підряд зліва направо), також є арифметичною прогресією з тією самою різницею:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \underbrace{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m, a_{m+1}}_{\text{арифметична прогресія}}, \ldots, a_n, \ldots .$$

ПРИКЛАД 4

Під час літніх канікул студент влаштувався на роботу. Оплата була такою: першого дня йому заплатили 10 г. о., кожного наступного дня — на 2 г. о. більше. Якою була зарплатня студента за останній тиждень (7 днів) роботи, якщо він працював упродовж місяця (30 днів)?

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Створимо математичну модель задачі. Розглянемо послідовність чисел, що виражають щоденну оплату протягом тижня, і проаналізуємо отриману послідовність (x_n).	10, 12, 14, ...; (x_n): 10, 12, 14, ... — арифметична прогресія, $x_1 = 10$, $d = 2$
КРОК 2	Визначимо кількість n членів цієї прогресії.	Період роботи — 30 днів, тому $n = 30$
КРОК 3	Визначимо, сума яких членів прогресії (x_n) є шуканою.	Заданий період — останні 7 днів із 30, тобто шукана сума: $x_{24} + \ldots + x_{29} + x_{30}$
КРОК 4	Знайдемо суму членів арифметичної прогресії (x_n) з 24-го по 30-й член включно. Позначимо шукану суму через M: $\underbrace{\underbrace{x_1 + x_2 + \ldots + x_{23}}_{S_{23}} + \underbrace{x_{24} + \ldots + x_{30}}_{\text{шукана сума } M}}_{S_{30}}$	$M = S_{30} - S_{23}$, де S_{30} — сума перших 30 членів арифметичної прогресії, S_{23} — сума перших 23 членів арифметичної прогресії
КРОК 5	Обчислимо S_{23} і M.	$S_{23} = \frac{2x_1 + 22d}{2} \cdot 23$; $S_{23} = 736$; $S_{30} = \frac{2x_1 + 29d}{2} \cdot 30$; $S_{30} = 1170$; $M = 1170 - 736 = 434$

Відповідь: 434 г. о.

У прикладі 4 шукану суму M можна знайти також як суму всіх семи членів арифметичної прогресії (b_n), перший член якої a_{24}, а сьомий — a_{30}, $d = 2$: $a_{24} \to b_1$; $a_{25} \to b_2$; $a_{26} \to b_3$; ...; $a_{30} \to b_7$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

1) За перший рік із моменту створення музичний гурт дав 3 благодійні концерти. Кожного наступного року гурт проводив на 5 таких концертів більше, ніж попереднього. Скільки благодійних концертів дав гурт за 10 років свого існування?

2) 2014 р. в місті відкрили 2 точки безкоштовного доступу до Wi-Fi. Кожного наступного року відкривали на 3 таких точки більше, ніж попереднього. Скільки всього таких точок доступу до Wi-Fi відкрили в місті за 3 роки (2014–2016)?

3) У змаганні зі стрільби за кожен промах у серії із 30 пострілів стрілець отримує штрафні бали: за перший промах — 1 бал, а за кожний наступний промах — на 0,5 бала більше, ніж за попередній.
   а) Скільки штрафних балів отримає стрілець за 3 промахи?
   б) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальну кількість S_n штрафних балів, отриманих стрільцем за n промахів $(1 \leqslant n \leqslant 30)$.

4) Тривалість прогулянки з немовлям першого дня становила 20 хв. Кожного наступного дня тривалість прогулянки збільшувалася на 10 хв, поки не досягла 2 год.
   а) Скільки часу (у хв) тривала прогулянка у третій день?
   б) Знайдіть загальний час (у хв), який немовля перебувало на вулиці в перші 3 дні.
   в) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальний час S_n (у хв) прогулянки з немовлям за n перших днів.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії (a_n) за такими даними:

1) $a_6 = 13$, $d = -4$, $n = 7$;
2) $a_{10} = 1{,}5$, $d = 0{,}5$, $n = 21$;
3) $a_6 = 1{,}3$, $a_{13} = 0{,}5$, $n = 10$;
4) $a_{12} = 12\frac{1}{4}$, $a_{20} = 19\frac{3}{4}$; $n = 9$;
5) $a_n = \frac{6}{7}n - 4$; $n = 11$;
6) $a_n = 15 - 3n$; $n = 24$.

2 Знайдіть невідомі елементи арифметичної прогресії.

1) (x_n) — арифметична прогресія; $x_1 = 24$, $d = -6$, $S_n = -570$. Знайдіть n.
2) (c_n) — арифметична прогресія; $c_{16} = 18$, $d = 4$, $S_n = -400$. Знайдіть n.
3) (y_n) — арифметична прогресія; $\begin{cases} y_{10} - y_6 = 24, \\ y_4 \cdot y_2 = 28. \end{cases}$ Знайдіть S_9.
4) (c_n) — арифметична прогресія; $\begin{cases} c_4^2 + c_7^2 = 584, \\ c_{11} - c_5 = -24. \end{cases}$ Знайдіть S_7.
5) $S_n = 6n^2 - 2n$ — формула, якою виражається сума перших n членів арифметичної прогресії (a_n). Знайдіть a_9.
6) (a_n) — арифметична прогресія; $a_n = 4 - \frac{2}{3}n$ — формула n-го члена, $S_n = 4$. Знайдіть n.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Незабаром з вулиць Лондона почнуть зникати загальновідомі червоні телефонні будки — один із символів міста. Їхнє місце займуть сучасні цифрові стенди, які забезпечать безкоштовний бездротовий доступ до Інтернету за технологією Wi-Fi, дозволять здійснювати безкоштовні телефонні дзвінки і заряджати гаджети.
- Термін «Wi-Fi» спочатку був придуманий як гра слів, щоб привернути увагу споживачів «натяком» на Hi-Fi (англ. *High Fidelity* — висока точність). Зараз термін «Wi-Fi» ніяк не розшифровується.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і вставте замість знаків питань число і вирази.

1	3	5	7
2	6	10	14
3	9	15	21
4	12	20	?
...	...	...	...
n	?	?	?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Говерла — найвища вершина України, її висота сягає 2061 м над рівнем моря. Назва походить від угорського Hóvár (снігова гора). Раніше гора мала назву «Говирла», але під час складання австрійської військової карти припустилися орфографічної помилки. На Говерлі стоїть мармурова плита, в яку вмуровано двадцять п'ять капсул із землею з усіх регіонів України.

3 Розв'яжіть задачу, використовуючи формулу суми перших n членів арифметичної прогресії.

1) Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, кратних 5, але не кратних 10.
2) Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, що не діляться націло ні на 5, ні на 10.
3) Знайдіть суму всіх непарних трицифрових чисел, кратних 3, не менших від 333 і не більших за 500.
4) Різниця шостого і третього членів арифметичної прогресії дорівнює 468, а четвертий її член більше, ніж перший, на 52. Знайдіть суму членів цієї прогресії.
5) Під час сходження на Говерлу група спортсменів подолала маршрут за 5 год. За першу годину було пройдено 1300 м, кожної наступної години — на 100 м менше, ніж за попередню. Визначте довжину маршруту.
6) Для організації фуршету було закуплено товари за переліком із 27 найменувань. За умовами акції, купуючи продукти харчування, покупець отримує за перше найменування 2 бонуси, за кожне наступне — на 1,5 бонуса більше. За всю покупку було нараховано 32 бонуси. Визначте кількість найменувань товарів, які не є продуктами харчування.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Податковий інспектор стежить за дотриманням податкового законодавства, контролює надходження платежів у бюджет, перевіряє фінансові документи платників податків.

Необхідні особисті якості: аналітичне мислення; уважність; чесність; відповідальність; хороша пам'ять. Державний податковий інспектор повинен мати вищу освіту в юридичній, економічній або фінансовій галузі.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ПОДАТОК НА ПРИБУТОК»

Оподатковуваний прибуток текстильного підприємства у січні становив 1 000 000 грн. Кожного наступного місяця цей прибуток був на 30 000 грн більшим, ніж попереднього місяця. Місячна ставка податку на прибуток становить 15 %.

1 Знайдіть прибуток (у грн), що підлягає оподаткуванню, одержаний у другому місяці (лютому).

2 Складіть формулу, за якою визначається прибуток y_n (у грн), що підлягає оподаткуванню, одержаний в n-му місяці $(1 \leqslant n \leqslant 12)$.

3 Знайдіть загальний оподатковуваний прибуток цього підприємства за рік (у грн).

4 Розрахуйте суму (у грн) податку на прибуток, яку має сплатити підприємство за перший місяць (січень).

5 Розрахуйте суму (у грн) податку на прибуток, яку має сплатити підприємство за весь рік.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 13

1 Суму перших n членів арифметичної прогресії задано формулою $S_n=(6+n)n$. Знайдіть S_4.

А	Б	В	Г
4	10	24	40

2 Обчисліть суму арифметичної прогресії: $1+2+3+\ldots+11$.

А	Б	В	Г
132	66	55	50

3 Укажіть формулу для знаходження суми перших n членів арифметичної прогресії, якщо $a_1=1$, $d=5$.

А	В
$S_n=\dfrac{5n-3}{2}n$	$S_n=5n-4$
Б	**Г**
$S_n=\dfrac{5n+2}{2}n$	$S_n=5n+1$

4 Якщо $S_3=-6$ і $a_4=10$, то $S_4=$

А	Б	В	Г
−16	2	4	16

5 Знайдіть суму перших 10 членів арифметичної прогресії, якщо $a_1=4$, $a_{10}=40$.

А	Б	В	Г
180	220	360	440

6 Установіть відповідність між арифметичною прогресією, яку задано формулою n-го члена (1–3), та формулою суми перших n членів (А–Г) цієї прогресії.

1	$a_n=n$	А	$S_n=n(n+1)$
2	$a_n=2n$	Б	$S_n=n(n+3)$
3	$a_n=n+1$	В	$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
		Г	$S_n=\dfrac{n(n+3)}{2}$

7 Знайдіть:
1) кількість усіх двоцифрових натуральних чисел, кратних 6;
2) суму всіх двоцифрових натуральних чисел, кратних 6.

8 2011 р. одна з кіностудій випустила 12 мультиплікаційних фільмів. Кожного наступного року ця студія випускала на 3 таких фільми більше, ніж попереднього.
1) Скільки мультиплікаційних фільмів випустила ця студія у 2016 р.?
2) Скільки всього мультиплікаційних фільмів випустила ця студія за 6 років (2011–2016)?

IQ

TO BE SMART

Радимо прочитати
книжку Саймона Сінгха «Сімпсони та їхні математичні секрети». Ви дізнаєтеся, як найважливіші математичні ідеї (число π, нескінченність, історія виникнення чисел тощо) утілено в епізодах популярного мультсеріалу «Сімпсони». До речі, відомо, що всі сценаристи серіалу мають учену ступінь з математики, фізики або інших наук.

Йоганн Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) (нім. *Johann Carl Friedrich Gauß*) — німецький математик, механік, астроном, фізик, геодезист.

Гаусс був настільки відомим, що коли в 1807 р. французькі війська підійшли до Геттінгена, Наполеон наказав поберегти місто, в якому живе «найвидатніший математик усіх часів».

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $S_9 = 980$ і $S_{10} = 1000$, то $a_{10} = 20$.

2) Якщо $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 40$, то $S_3 = 120$.

3) Якщо $a_6 = 7$, то $S_{11} = 77$.

4) Якщо $a_1 = a_2 = 1$, то $S_{15} = 15$.

5) Якщо $d = 4$, то $S_3 - S_2 = 4$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо:

1) $S_n = (3+n)n$, $n = 15$; 2) $S_n = \frac{(7{,}5 - 3n)n}{2}$, $n = 40$.

Складіть формулу для знаходження суми перших n членів арифметичної прогресії, якщо відомі її перший член a_1 та різниця d. Обчисліть суму перших 100 членів цієї прогресії.

3) $a_1 = -78$, $d = 6$; 4) $a_1 = 19{,}4$, $d = -0{,}5$.

Див. приклад 2

2 Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії (x_n), якщо:

1) $n = 18$, $2x_1 + 17d = -11$; 3) $n = 24$, $x_5 = -34$, $x_{20} = 92$;

2) $n = 10$, $x_2 + x_9 = 25$; 4) $n = 51$, $x_{26} = 100$.

Див. приклад 3

3 Обчисліть суму:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + 38$;

2) $-1 - 2 - 3 - \ldots - 51$;

3) усіх двоцифрових натуральних непарних чисел;

4) усіх трицифрових натуральних чисел, кратних 9 і менших від 800.

Див. приклад 4

4 Розв'яжіть задачу.

1) 2014 р. авторка бестселерів провела 4 зустрічі з читачами. Кожного наступного року вона проводила на 2 такі зустрічі більше, ніж попереднього. Скільки всього зустрічей авторки з читачами відбулося за 3 роки (2014–2016)?

2) Протягом першого року з моменту виходу на європейський ринок українські фермери продали 5 тис. л соняшникової олії. Кожного наступного року вони продавали на 2 тис. л олії більше, ніж попереднього. Скільки всього літрів соняшникової олії продали українські фермери за 12 років з моменту виходу на ринок Європи?

3) Альпіністи в перший день сходження піднялися на висоту 800 м. Продовжуючи підйом, кожного наступного дня вони проходили на 50 м менше, ніж попереднього.

а) На яку висоту піднялись альпіністи за 2 дні сходження?

б) Складіть формулу, за якою можна обчислити висоту S_n (у м), яку подолали альпіністи за n днів сходження, $1 \leqslant n \leqslant 7$.

4) Швидкісний потяг, відходячи від станції, за першу секунду пройшов 10 м, а за кожну наступну секунду проходив на 5 м більше, ніж за попередню, поки не досягнув швидкості 144 км/год. Після цього потяг рухався рівномірно з цією швидкістю.

а) Скільки метрів пройшов потяг за четверту секунду від початку руху?

б) Скільки всього метрів пройшов потяг за чотири секунди від початку руху?

в) Складіть формулу, за якою можна обчислити відстань S_n (у м), яку пройшов потяг за n секунд від початку руху.

Бонусне завдання

5 Довжини сторін многокутника утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює 2 см. Знайдіть кількість сторін многокутника, якщо його периметр 217 см, а довжина найбільшої сторони 37 см.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть закономірність та вставте замість знака питання пропущене число:

1) 1; 3; 9; ?;

2) 1; 2; 4; ?;

3) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; ?;

4) $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{20}$; ?;

5) $\frac{1}{2}$; 2; 8; ?;

6) $\frac{1}{3}$; 2; 12; ?;

7) 64; −32; ?; −8;

8) 81; ?; 9; −3.

IQ

TO BE SMART

Прочитайте влітку

5 книжок, які радить Білл Ґейтс:

- Джордан Еленберг «Як не помилятися. Сила математичного мислення»
- Ніл Стівенсон «Сім Єв»
- Нік Лейн «Життєво важливе питання: Енергія, еволюція та походження життя»
- Рьокі й Хіроші Мікітані «Сила конкурувати»
- Ювал Ной Харарі «Sapiens: Коротка історія людства»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У Японії створили найдовший і найшвидший потяг на магнітній подушці, здатний розвивати швидкість до 500 км/год.
- Майже всі надшвидкісні пасажирські експреси мають довгий гострий ніс, схожий на дзьоб зимородка, що дозволяє їм безшумно виїжджати з тунелів.

«Мої результати мені давно відомі, я тільки не знаю, як я до них дійду.»

Карл Фрідріх Гаусс

§ 19 ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

ВЧОРА Ви дізналися, що таке арифметична прогресія, вивели формули, за допомогою яких можна розв'язувати прикладні задачі, пов'язані з арифметичною прогресією

СЬОГОДНІ Ви ознайомитеся з новою числовою послідовністю — геометричною прогресією, її елементами і властивостями

ЗАВЖДИ Ви зможете усвідомлено вживати вислів «зростає в геометричній прогресії»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Завдяки соціальним мережам ми отримали необмежені можливості для спілкування.

- Щосекунди 8 осіб на планеті приєднуються до будь-якої з існуючих соціальних мереж.
- Facebook за чисельністю — третя «країна» у світі, після Китаю та Індії, з населенням близько мільярда чоловік.
- Кожний користувач соцмереж має в друзях у середньому 195 осіб.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Протягом першого тижня статтю, що з'явилася в соціальній мережі, прокоментували 20 користувачів. Кожного наступного тижня до існуючих коментарів додавалося в 3 рази більше коментарів, ніж їх було попереднього тижня. Така тенденція тривала лише 3 тижні. Скільки коментарів до статті було залишено протягом третього тижня від її появи?

Розв'язання

Складемо таблицю за умовою задачі.

Номер тижня n	1	2	3
Кількість коментарів (b_n)	20	$20\cdot 3=60$	$(20\cdot 3)\cdot 3=60\cdot 3=180$

Щотижня кількість коментарів, що з'являлися, збільшувалася втричі порівняно з попереднім тижнем. Отже, протягом другого тижня з'явилося 60 коментарів, а протягом третього — 180.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У цьому параграфі ми розглянемо послідовності, у яких кожний наступний член отриманий із попереднього шляхом множення на одне й те саме число, відмінне від нуля. Вважають, що перший член таких послідовностей також відмінний від нуля.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення 1. **Геометричною прогресією** називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Означення 2. Число, на яке множаться члени прогресії, називають **знаменником** геометричної прогресії і позначають літерою q.

Введемо позначення:

(b_n) — геометрична прогресія;

q — знаменник геометричної прогресії;

n — номер члена геометричної прогресії;

b_1 — перший член прогресії;

b_n — n-й член прогресії;

b_{n+1} — наступний за n-м член прогресії;

b_{n-1} — попередній для n-го член прогресії.

Знаючи q, можна задати геометричну прогресію рекурентною формулою:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (n \in \boldsymbol{N},\ b_n \neq 0,\ q \neq 0).$$

Цю формулу можна записати ще й так: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тобто в геометричній прогресії відношення кожного члена, починаючи з другого, до попереднього є сталим числом, яке дорівнює знаменнику геометричної прогресії q.

Наведемо приклади геометричної прогресії.

Геометрична прогресія (b_n)	Перший член b_1	Знаменник q	Знак і величина q	Властивість послідовності
1; 2; 4; 8; 16; ...	1	2	$q > 0$	зростаюча
27; 9; 3; 1; ...	27	$\frac{1}{3}$	$0 < q < 1$	спадна
3; –6; 12; –24; ...	3	–2	$q < 0$	**знакозмінна**

Зауважимо, що перші члени прогресії в наведених прикладах є додатними числами.

РОЗМИНКА 1

1 Визначте, чи є геометричною прогресією послідовність:

1) 2; 6; 18; 54; ...;
2) –3; –9; –27; –81; ...;
3) 3; –3; 3; –3; ...;
4) 2; 4; 6; 8; ... .

2 Укажіть перший і другий члени та знайдіть знаменник геометричної прогресії:

1) 5; 10; 20; 40; ...;
2) –2; 8; –32; 128; ...;
3) 3^{11}; 3^{13}; 3^{15}; 3^{17}; ...;
4) $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; ... .

3 Запишіть перші чотири члени геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 1$; $q = 5$;
2) $b_1 = 2$; $q = -1{,}5$;
3) $b_1 = -5$; $q = 4$;
4) $b_1 = -8$; $q = -0{,}5$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- геометрична прогресія
- знаменник геометричної прогресії
- n-й член, формула n-го члена геометричної прогресії
- характеристична властивість геометричної прогресії

СЛІД ЗНАТИ!

- $b_{n+1} = b_n \cdot q$ $(n \in \boldsymbol{N},\ b_n \neq 0,\ q \neq 0)$;
- $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Спадною вважають геометричну прогресію (b_n), у якій $b_1 > 0$ і $0 < q < 1$.
- Зростаючою вважають геометричну прогресію (b_n), у якій $b_1 > 0$ і $q > 1$.

ПОМІРКУЙТЕ

- Чим відрізняються рекурентні формули для арифметичної і геометричної прогресій?
- Наведіть приклади зростаючої, спадної та знакозмінної геометричних прогресій. Як знак і величина знаменника q впливають на властивості прогресії?

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Формула n-го члена геометричної прогресії має вигляд:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Геометричну прогресію, як і арифметичну, можна задати як рекурентною формулою, так і формулою її n-го члена.

Розглянемо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q:

b_1 — її перший член;

$b_2 = b_1 \cdot q$ — другий член;

$b_3 = b_2 \cdot q = \underbrace{b_1 \cdot q}_{b_2} \cdot q = b_1 \cdot q^2$ — третій член;

$b_4 = b_3 \cdot q = \underbrace{b_1 \cdot q^2}_{b_3} \cdot q = b_1 \cdot q^3$ — четвертий член і т. д.

Маємо:

$b_1 = b_1 \cdot q^0$, $b_2 = b_1 \cdot q^1$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$, $b_4 = b_1 \cdot q^3$ і т. д.

Отже, для будь-якого номера n справедливою є рівність $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У стародавніх греків поняття геометричної прогресії було логічним продовженням поняття геометричної пропорції: $a : b = b : c$. Квадратний корінь із двох додатних чисел $b = \sqrt{ac}$ називали **середнім геометричним** (або **середнім пропорційним**) двох чисел. Звідси й назва геометричної прогресії. Тоді її позначали символом $\div\div$.

РОЗМИНКА 2

1 Дано геометричну прогресію (b_n). Знайдіть:

1) b_5, якщо $b_1 = 2$, $q = 3$;
2) b_4, якщо $b_1 = 3$, $q = -2$;
3) b_6, якщо $b_1 = -18$, $q = -1$;
4) b_{10}, якщо $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$.

2 Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:

1) 2; −4; 8; −16; ...;
2) −1; −3; −9; −27; ...;
3) 0,3; 0,3; 0,3; 0,3; ...;
4) $-\sqrt{3}$; 3; $-3\sqrt{3}$; 9; ... .

Розглянемо **властивості геометричної прогресії**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Характеристична властивість геометричної прогресії

Квадрат довільного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку попереднього і наступного її членів.

Якщо (b_n) — геометрична прогресія, то $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Доведення

Запишемо формули для b_{n-1} і b_{n+1} через b_n:

$$b_{n-1} = \frac{b_n}{q}, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Тоді $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \frac{b_n}{q} \cdot b_n \cdot q = b_n^2$, що й треба було довести.

ПОМІРКУЙТЕ

Чим відрізняються формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій?

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо $b = \sqrt{ac}$, де a, b, c — дійсні числа, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то b є середнім геометричним чисел a і c.

Справедливим є також **обернене твердження:**

Якщо кожний член послідовності, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх із ним, то ця послідовність є геометричною прогресією.

Якщо $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$, то послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Тоді $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Інше формулювання характеристичної властивості геометричної прогресії

Модуль кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх із ним.

ПОМІРКУЙТЕ

Побудуйте на одній координатній площині точки, ординати яких утворюють арифметичну і геометричну прогресії з однаковим першим членом і рівними знаменником та різницею. Зробіть висновки.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

ПРИКЛАД 1

Відомо, що в геометричній прогресії (b_n) $b_5 = -12$, $b_6 = 24$. Знайдіть b_{11}.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо формулу для знаходження знаменника q та обчислимо його значення.	$q = \frac{b_6}{b_5}$; $q = -2$
КРОК 2	Запишемо формулу n-го члена для одного з відомих членів прогресії, наприклад для b_5, та обчислимо значення b_1.	$b_5 = b_1 \cdot q^4$; $-12 = b_1 \cdot (-2)^4$; $b_1 = -\frac{12}{2^4} = -\frac{4 \cdot 3}{2^4}$; $b_1 = -\frac{3}{4}$
КРОК 3	Запишемо формулу n-го члена для шуканого b_{11} та обчислимо його значення.	$b_{11} = b_1 \cdot q^{10}$; $b_{11} = -\frac{3}{4} \cdot (-2)^{10}$; $b_{11} = -\frac{3}{2^2} \cdot 2^2 \cdot 2^8$; $b_{11} = -768$

Зауважимо, що на третьому кроці розв'язання можна було знайти b_{11} через b_5 або через b_6, тобто: $b_{11} = b_5 \cdot q^6$ або $b_{11} = b_6 \cdot q^5$.

Відповідь: -768.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У геометричній прогресії (b_n) знайдіть член b_n, якщо:

1) $b_1 = 2$, $b_2 = 10$, $n = 3$;
2) $b_1 = 3$, $b_2 = 12$, $n = 3$;
3) $b_1 = \frac{5}{8}$, $b_2 = \frac{5}{4}$, $n = 5$;
4) $b_1 = \frac{7}{27}$, $b_2 = \frac{7}{9}$, $n = 6$;
5) $b_3 = -\frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{2}$, $n = 11$;
6) $b_2 = \frac{1}{27}$, $b_3 = -\frac{1}{9}$, $n = 9$;
7) $b_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b_6 = 2$, $n = 12$;
8) $b_8 = \frac{3}{5}$, $b_9 = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $n = 14$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Позначення знаменника геометричної прогресії q походить від французького слова *quotient* — частка.

ПРИКЛАД 2

Визначте чотири числа, що утворюють спадну геометричну прогресію, у якій сума крайніх членів дорівнює 65, а сума середніх членів дорівнює 20.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Введемо позначення членів геометричної прогресії.	x_1, x_2, x_3, x_4 — геометрична прогресія, тоді: $x_1+x_4=65$ (1) $x_2+x_3=20$ (2)
КРОК 2	Виразимо всі члени геометричної прогресії через x_1 і q.	$x_2=x_1q$; $x_3=x_1q^2$; $x_4=x_1q^3$
КРОК 3	Запишемо систему рівнянь (1) і (2), враховуючи результат кроку 2.	$\begin{cases} x_1+x_1q^3=65, \\ x_1q+x_1q^2=20 \end{cases}$
КРОК 4	Розв'яжемо отриману систему рівнянь. Для цього розкладемо ліву частину кожного рівняння на множники, поділимо почленно перше рівняння на друге і скоротимо дроби в лівій та правій частинах рівняння ($q\neq-1$, $q\neq0$, $x_1\neq0$).	$\begin{cases} x_1\left(1+q^3\right)=65, \\ x_1q(1+q)=20; \end{cases}$ $\dfrac{x_1(1+q)\left(1-q+q^2\right)}{x_1q(1+q)}=\dfrac{65}{20}$; $\dfrac{1-q+q^2}{q}=\dfrac{13}{4}$
КРОК 5	Застосуємо основну властивість пропорції, отримаємо квадратне рівняння.	$4-4q+4q^2=13q$; $4q^2-17q+4=0$
КРОК 6	Розв'яжемо отримане квадратне рівняння — знайдемо його корені q_1 і q_2.	$q_1=4$ або $q_2=\dfrac{1}{4}$
КРОК 7	Проаналізуємо отримані значення q.	Оскільки за умовою прогресія спадна, то $0<q<1$, тому $q=\dfrac{1}{4}$
КРОК 8	Знайдемо x_1 із будь-якого рівняння системи, наприклад із рівняння (2).	$x_1q+x_1q^2=20$; $x_1\left(q+q^2\right)=20$; $x_1=\dfrac{20}{q+q^2}$; $x_1=\dfrac{20}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\dfrac{20}{\frac{5}{16}}=64$
КРОК 9	Визначимо решту чисел, які є членами прогресії.	$x_2=x_1q=64\cdot\dfrac{1}{4}=16$; $x_3=x_2q=16\cdot\dfrac{1}{4}=4$; $x_4=x_3q=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$

Відповідь: 64; 16; 4; 1.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Визначте чотири числа x_1, x_2, x_3, x_4, що утворюють:

1) зростаючу геометричну прогресію зі знаменником $q=2$, якщо їх сума дорівнює 195;
2) спадну геометричну прогресію, якщо $x_1+x_3=25$, $x_2+x_4=12{,}5$;
3) зростаючу геометричну прогресію, якщо сума перших двох чисел дорівнює 6,25, а сума останніх двох дорівнює 100;
4) спадну геометричну прогресію, якщо сума її крайніх членів дорівнює 9, а сума середніх членів дорівнює 6.

ПОМІРКУЙТЕ

Спробуйте довести:

- $q^{n-k}=\frac{b_n}{b_k}$, якщо $n\neq k$ (формула знаменника);
- $b_n=b_k\cdot q^{n-k}$ (формула n-го члена);
- $b_n^2=b_{n-k}\cdot b_{n+k}$;
- $b_n\cdot b_m=b_k\cdot b_p$, якщо $n+m=k+p$.

Перевірте своє доведення: interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 3

Запишіть геометричну прогресію із шести членів, задану рекурентною формулою $b_{n+1}=-3b_n$, якщо $b_2=-27$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо b_3, підставивши $n=2$ у формулу $b_{n+1}=-3b_n$.	$b_3=-3b_2$; $b_3=-3\cdot(-27)$; $b_3=81$
КРОК 2	Знайдемо знаменник q прогресії (b_n).	$q=\frac{b_3}{b_2}$; $q=\frac{81}{-27}=-3$
КРОК 3	Обчислимо b_1, знаючи q і b_2.	$b_1=\frac{b_2}{q}$; $b_1=9$
КРОК 4	Обчислимо b_4, b_5, b_6.	$b_4=b_3\cdot q=-243$; $b_5=b_4\cdot q=729$; $b_6=b_5\cdot q=-2187$

Відповідь: 9; −27; 81; −243; 729; −2187.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Запишіть перші 4 члени геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1=\frac{2}{49}$, $b_{n+1}=7b_n$;
2) $b_1=128$, $b_{n+1}=\frac{b_n}{8}$;
3) $b_1=3\sqrt{3}$, $b_{n+1}=\frac{b_n}{\sqrt{3}}$;
4) $b_1=1$, $b_{n+1}=\sqrt{2}b_n$.

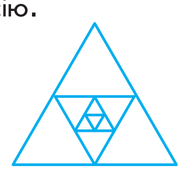
Запишіть перші 6 членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

5) $b_3=7$, $b_{n+1}=2b_n$;
6) $b_4=12$, $b_{n+1}=-3b_n$;
7) $b_3=12$, $b_{n+1}=-\sqrt{3}b_n$;
8) $b_5=12$, $b_{n+1}=-\sqrt{2}b_n$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Геометрична прогресія в геометрії

Довжини сторін вписаних один в одного правильних трикутників утворюють геометричну прогресію.



ПРИКЛАД 4

Сума трьох чисел, які утворюють зростаючу арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 1, друге залишити без змін, а до третього додати 6, то одержимо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Позначимо послідовність чисел, що утворюють арифметичну прогресію з різницею d, та запишемо її члени за формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$.	a_1, a_2, a_3 — арифметична прогресія; $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$
КРОК 2	Складемо рівняння, знаючи за умовою суму a_1, a_2 і a_3.	$a_1 + a_2 + a_3 = 30$; $a_1 + \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} = 30$; $3a_1 + 3d = 30 \mid :3$; $a_1 + d = 10$
КРОК 3	Зауважимо, що $a_1 + d = a_2$ — другий член арифметичної прогресії.	$a_2 = 10$
КРОК 4	Застосуємо другу частину умови задачі.	a_1, a_2, a_3 — арифметична прогресія; $a_1 - 1$, a_2, $a_3 + 6$ — геометрична прогресія
КРОК 5	Використаємо характеристичну властивість геометричної прогресії $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.	$a_2^2 = (a_1 - 1)(a_3 + 6)$
КРОК 6	Підставимо в отримане рівняння значення $a_2 = 10$ і застосуємо формулу $a_3 = a_1 + 2d$.	$100 = (a_1 - 1)(a_1 + 2d + 6)$
КРОК 7	Складемо систему рівнянь, одержаних на кроках 2 і 6. Виразимо a_1 через d і підставимо у друге рівняння системи.	$\begin{cases} a_1 + d = 10, \\ (a_1 - 1)(a_1 + 2d + 6) = 100; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ (9 - d)(16 + d) = 100 \end{cases}$
КРОК 8	Розв'яжемо квадратне рівняння відносно d.	$d^2 + 7d - 44 = 0$; $d = 4$ або $d = -11$
КРОК 9	Проаналізуємо отримані значення d.	Оскільки за умовою арифметична прогресія зростаюча, то $d > 0$, тобто $d = 4$
КРОК 10	Знайдемо шукані числа.	$a_1 = a_2 - 4 = 6$; $a_3 = a_2 + 4 = 14$

Відповідь: 6; 10; 14.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

1) Три числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює 2. Якщо до першого числа додати 6, до другого додати 3, а третє залишити без змін, то отримаємо геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 1. Знайдіть ці числа.
2) Три числа утворюють арифметичну прогресію, другий член якої дорівнює 6. Якщо від першого числа відняти 2, до третього додати 5, а друге залишити без змін, то отримаємо геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 2. Знайдіть ці числа.
3) Сума трьох чисел, які утворюють зростаючу арифметичну прогресію, дорівнює 60. Якщо від першого числа відняти 5, друге залишити без змін, а до третього додати 50, то отримаємо геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 4. Знайдіть ці числа.
4) Сума трьох чисел, які утворюють зростаючу арифметичну прогресію, дорівнює 24. Якщо до першого числа додати 2, друге залишити без змін, а до третього додати 2, то отримаємо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

ПРИГАДАЙТЕ!

Характеристична властивість арифметичної прогресії:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Характеристична властивість геометричної прогресії:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

ПРИКЛАД 5

Розглянемо відому задачу про кульбабу.

Одна рослина кульбаби дає за рік 100 летючих насінин, які, розлітаючись, займають площу приблизно 10 м^2. Яку площу (у м^2) покриють усі «нащадки» однієї рослини кульбаби через 7 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У світі налічується понад 1000 видів кульбаб.
- Корінь кульбаби застосовують як лікарську сировину, листя використовують у косметиці.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Позначимо через S_0 початкову площу, тобто площу, яку займає потомство однієї рослини кульбаби.	$S_0 = 10$ м^2
КРОК 2	Знайдемо площу, зайняту кульбабами через 1 рік.	$S_1 = S_0 \cdot 100$ (м^2)
КРОК 3	Знайдемо площу, зайняту кульбабами через 2 роки.	$S_2 = S_1 \cdot 100 =$ $= S_0 \cdot 100^2 = S_0 \cdot 10^4$ (м^2)
КРОК 4	Аналогічно міркуючи, зробимо висновок про те, яку площу потомство рослини займе через n років.	$S_n = S_0 \cdot 10^{2n}$ (м^2)
КРОК 5	Знайдемо площу, яку покриють усі потомки однієї рослини кульбаби через 7 років.	$S_7 = 10 \cdot 10^{14} = 10^{15}$ (м^2)

Відповідь: 10^{15} м^2.

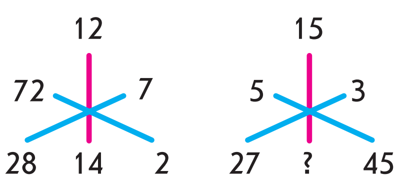
ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Найбільший у Європі плавучий світломузичний фонтан було відкрито у 2011 р. у Вінниці. Висота його центрального струменя досягає 65 м, фронтальний розліт води — близько 140 м, а розміри формованого бризками і водяним пилом проекційного екрана становлять близько 16 x 45 м.
- Під час світломузичного шоу можна почути й побачити українські композиції «Два кольори», «Щедрик-ведрик», «Мій рідний край» та інші у виконанні Ніни Матвієнко, Дмитра Гнатюка, Олега Скрипки.

Переглянути шоу ви можете за посиланням www.youtube.com/watch?v=juOjvWDipL0

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте знайти невідоме число.



ТРЕНУЄМОСЯ

5 Розв'яжіть задачу.

1) Час b_n (у с), який комп'ютер витрачає на розв'язування n-ї задачі, задається формулою $b_n = 3\cdot 2^n$. Скільки часу витратить комп'ютер на розв'язування третьої задачі?

2) Після вдалої рекламної кампанії кількість відвідувачів певного сайта щомісяця подвоювалась, і такий приріст тривав 3 місяці. Протягом першого місяця сайт відвідали 6000 користувачів. Скільки користувачів відвідало цей сайт протягом третього місяця?

3) Було подано електронну петицію на підтримку облаштування велопарковок навколо навчальних закладів. Першого дня петицію підписали 8 осіб, а кожного наступного дня кількість зареєстрованих підписів ставала удвічі більшою. Чи вистачить кількості підписів, набраних петицією протягом тижня голосування (7 повних днів), якщо для прийняття позитивного рішення достатньо 500 підписів?

4) Висота першого струменя води музичного фонтана становить 90 м, а висота кожного наступного струменя у 1,5 разу менша, ніж попереднього.

   а) Яка висота третього струменя води?

   б) Складіть формулу для визначення висоти b_n (у м) n-го струменя води музичного фонтана $(1 \leqslant n \leqslant 10)$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 У геометричній прогресії (x_n):

1) $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{2}$. Знайдіть q і x_6.

2) $x_2 = 6\sqrt{5}$, $x_4 = \dfrac{15\sqrt{5}}{2}$. Знайдіть q і x_9.

3) $x_4 = 3^{12}$, $x_8 = 3^8$. Знайдіть q і x_{20}.

4) $x_2 = 1$, $x_{16} = 5^{15}$. Знайдіть q і x_{2017}.

5) $x_1 = -2{,}5$, $q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Знайдіть x_6, x_n і x_{n+1}.

6) $x_1 = \sqrt{10}$, $q = \sqrt{2}$. Знайдіть x_6, x_n і x_{n-1}.

2 Визначте, чи є число K членом геометричної прогресії:

1) 4; 1; $\dfrac{1}{4}$; ..., якщо $K = -\dfrac{1}{64}$;

2) −3; 9; −27; ..., якщо $K = 82$;

3) (b_n), у якій $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$, якщо $K = \frac{1}{64}$;

4) (x_n), у якій $x_1 = -\sqrt{2}$, $q = 2\sqrt{2}$, якщо $K = -256$;

5) (b_n), заданої формулою n-го члена $b_n = \frac{1}{5} \cdot 0{,}1^{2n-5}$, якщо $K = \frac{1}{500}$;

6) (x_n), заданої формулою n-го члена $x_n = 24 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{3n+4}$, якщо $K = 24\sqrt{2}$.

3 Розв'яжіть задачу.

1) Між числами -6 і $0{,}75$ вставте такі два числа a і b, щоб послідовність -6; a; b; $0{,}75$ утворювала геометричну прогресію.

2) Знайдіть чотири числа, перші три з яких утворюють геометричну прогресію, друге дорівнює 6, четверте удвічі більше, ніж перше, а сума всіх чотирьох чисел дорівнює 30.

3) Визначте, при яких від'ємних значеннях m числа 6; $-2m$; 54 є послідовними членами геометричної прогресії.

4) Знайдіть такі значення t, при яких числа $t-3$; $\sqrt{2t-6}$, $3t+1$ є послідовними членами геометричної прогресії.

4 Розв'яжіть задачу.

1) Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени геометричної прогресії (x_n) більші за 28, якщо $x_n = 3{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

2) Укажіть усі номери членів геометричної прогресії (b_n), не більших за 500, якщо $b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$.

3) Складіть скінченну геометричну прогресію із шести членів, якщо сума перших трьох із них дорівнює 11, а сума трьох останніх дорівнює 168.

4) Знайдіть три числа, які утворюють скінченну геометричну прогресію, якщо сума їх квадратів дорівнює 99, а перший член у 3 рази менший, ніж знаменник прогресії.

5 Геометрична прогресія має цікаві властивості. Спробуйте довести їх самостійно.

1) Якщо послідовність b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... є геометричною прогресією зі знаменником q, то послідовність квадратів її членів b_1^2, b_2^2, b_3^2, ..., b_n^2, ... є геометричною прогресією зі знаменником q^2.

2) Добуток двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів: $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = b_4 \cdot b_{n-3} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 2016 р. випускниця Черкаського фізико-математичного ліцею Фіонг Ань Чан посіла 3 місце на Міжнародному науково-технічному конкурсі молодих вчених «Intel ISEF 2016» у категорії «Математика».

У своєму проекті «Одна задача про фігурні числа» Фіонг Ань Чан досліджувала властивості фігурних чисел. Дівчині вдалося вивести формулу для знаходження спільних елементів двох послідовностей.

Результати, отримані юною черкащанкою, можуть бути використані, наприклад, у криптографії, комп'ютерних науках, біоінженерії, нанофізиці.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Перевірити правильність свого доведення ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

Марк Цукерберг (англ. *Mark Zuckerberg*; нар. 1984) — американський програміст, підприємець, один із розробників і співзасновників соціальної мережі Facebook.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Три числа 4, 4, 4 утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q=1$.
2) Якщо в геометричній прогресії $0<b_1<b_2$, то $q>1$.
3) Якщо в геометричній прогресії $b_1=5$ і $q=-1$, то $b_{200}=-5$.
4) Якщо в геометричній прогресії $b_{10}=10$, то $b_{100}=100$.
5) Існує геометрична прогресія b_1, b_2, b_3, для якої $b_1 \cdot b_3<0$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 14

1 Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n): 2; 6; ... .

А	Б	В	Г
-4	$\frac{1}{3}$	3	4

2 Визначте п'ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_4=\frac{1}{5}$, $q=2$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{10}$	10

3 Знайдіть третій член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=12$, а $b_2=6$.

А	Б	В	Г
0	2	3	72

4 Знайдіть другий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=5\sqrt{5}$, $b_{n+1}=\frac{b_n}{\sqrt{5}}$.

А	Б	В	Г
25	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	5

5 У геометричній прогресії перший член додатний, а знаменник $q=-6$. Якому з поданих чисел *може* дорівнювати четвертий її член?

А	Б	В	Г
60	-90	$\sqrt{6}$	0

6 Установіть відповідність між формулою n-го члена (1–3) геометричної прогресії (b_n) та другим членом (А–Г) цієї прогресії.

1	$b_n=3^n$	А	$\frac{1}{3}$
2	$b_n=3^{n+1}$	Б	3
3	$b_n=3^{1-n}$	В	9
		Г	27

7 Три числа x_1, x_2 і x_3 утворюють зростаючу арифметичну прогресію.
1) Знайдіть x_2, якщо сума цієї прогресії дорівнює 9.
2) Якщо до x_1 додати 1, x_2 залишити без змін, а до x_3 додати 3, то отримаємо геометричну прогресію. Знайдіть x_1 і x_3.

8 Клієнт поклав у банк 100 000 г. о. під 10 % річних. Відсотки щороку нараховуються на суму, яка є на рахунку на початок року.
1) Яка сума буде на рахунку через 2 роки?
2) Складіть формулу для визначення суми b_n на рахунку клієнта (у г. о.) через n років.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «НАСЕЛЕННЯ МІСТА»

Щороку приріст населення у місті становить 3 %, тобто кожного наступного року кількість мешканців міста збільшується на 3 % від кількості мешканців на кінець попереднього року. Вважайте, що темпи приросту населення міста не змінюються. Зараз чисельність населення міста становить 160 тис. осіб.

1 Якою буде чисельність населення через 2 роки (у тис. осіб)?

2 Складіть формулу, за якою можна обчислити чисельність населення у місті (у тис. осіб) через n років.

3 За прогнозами через n років чисельність населення перевищить 200 тис. осіб. Запишіть нерівність для визначення n.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Статистика — наука, яка вивчає методи кількісного охоплення і дослідження масових явищ і процесів. Математична статистика вивчає математичні методи систематизації, обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 У геометричній прогресії (b_n) знайдіть член b_n, якщо:

1) $b_1 = 4$, $b_2 = 12$, $n = 3$;
2) $b_1 = \frac{5}{81}$, $b_2 = \frac{5}{27}$, $n = 7$;
3) $b_4 = 3$, $b_5 = -6$, $n = 10$;
4) $b_7 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $b_8 = 3$, $n = 16$.

Див. приклад 1

2 Визначте чотири числа:

1) x_1, x_2, x_3, x_4, що утворюють зростаючу геометричну прогресію зі знаменником $q = 2$, якщо їх сума дорівнює 210;
2) x_1, x_2, x_3, x_4, що утворюють спадну геометричну прогресію, якщо $x_1 + x_3 = 15$, $x_2 + x_4 = 7{,}5$;
3) що утворюють зростаючу геометричну прогресію, якщо сума перших двох чисел дорівнює 3,75, а сума останніх двох чисел дорівнює 60;
4) що утворюють спадну геометричну прогресію, якщо сума її крайніх членів дорівнює 126, а сума середніх членів дорівнює 30.

Див. приклад 2

3 Запишіть перші 4 члени геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 147$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{7}$;
2) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \sqrt{3}b_n$.

Запишіть перші 6 членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

3) $b_3 = -3$, $b_{n+1} = -2b_n$;
4) $b_5 = -16$, $b_{n+1} = -\sqrt{2}b_n$.

Див. приклад 3

4 Розв'яжіть задачу.

1) Три числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює 1. Якщо до першого числа додати 4, до другого додати 2, а третє залишити без змін, то отримаємо геометричну прогресію зі знаменником 1. Знайдіть ці числа.
2) Три числа утворюють арифметичну прогресію, другий член якої дорівнює 6. Якщо від першого числа відняти 1, до третього додати 9, а друге залишити без змін, то отримаємо геометричну прогресію зі знаменником 3. Знайдіть ці числа.

Див. приклад 4

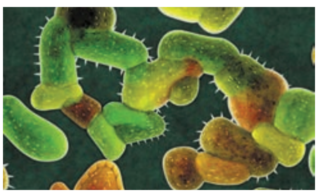
TO BE SMART

Фільм-головоломка «Пастка Ферма» (*La habitación de Fermat*, Іспанія) розповідає історію таємного змагання чотирьох математиків. Розв'язавши тестове завдання з числовою послідовністю, математики потрапляють до дивного будинку, який виявляється пасткою. Щоб вижити, вони повинні розв'язувати логічні завдання.

Див. приклад 5

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Геометрична прогресія в біології



Розмноження бактерій у геометричній прогресії застосовують, наприклад, у природоохоронних заходах: для очищення стічних вод, ліквідації нафтових плям тощо.

> «*Соціальні мережі — це не альтернатива дружбі, це її продовження.*»
>
> Марк Цукерберг

3) Сума трьох чисел, які утворюють зростаючу арифметичну прогресію, дорівнює 60. Якщо від першого числа відняти 5, друге залишити без змін, а до третього додати 69, то отримаємо геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 5. Знайдіть ці числа.

4) Сума трьох чисел, які утворюють зростаючу арифметичну прогресію, дорівнює 45. Якщо від першого числа відняти 5, друге залишити без змін, а до третього додати 25, то отримаємо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

5 Розв'яжіть задачу.

1) Кількість b_n телеглядачів, які дивляться n-й сезон серіалу, задається формулою $b_n = 26\,000 \cdot 3^{n-1}$. Скільки телеглядачів подивилися другий сезон серіалу?

2) Комп'ютерна антивірусна програма наприкінці першої хвилини з моменту її запуску блокує 3 вірусні програми. Протягом кожної наступної хвилини вона блокує удвічі більше вірусних програм, ніж протягом попередньої хвилини. Скільки вірусних програм заблокує комп'ютерна програма протягом сьомої хвилини з моменту її запуску?

3) Бактерія, потрапивши в живий організм, наприкінці 10-ї хвилини ділиться на дві бактерії. Кожна з них наприкінці наступних 10 хв також ділиться на дві бактерії і т. д. Знайдіть кількість бактерій, що утворяться з однієї бактерії наприкінці першої години з моменту її потрапляння в живий організм.

4) На території першого паркового містечка розташований басейн площею 100 м². На території кожного наступного паркового містечка розташований басейн, площа якого в 1,5 разу більша, ніж на території попереднього.

   а) Яка площа басейну, розташованого на території третього паркового містечка?

   б) Складіть формулу для визначення площі b_n (у м²) басейну, що розташований на території n-го паркового містечка $(1 \leqslant n \leqslant 6)$.

Бонусне завдання

6 Дано геометричну прогресію (b_n). Знайдіть:

1) b_{11}, якщо $b_5 b_{11} b_{12} b_{16} = 256$; 2) b_{15}, якщо $b_{10} b_{14} b_{21} = -\frac{1}{8}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

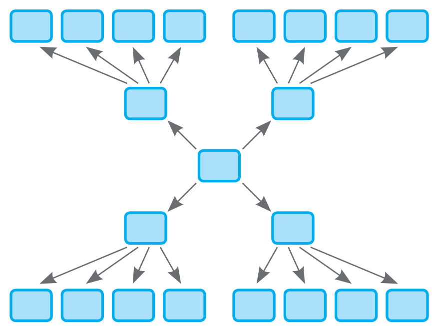
Послідовність (S_n) задано формулою n-го члена $S_n = \dfrac{2^n - 1}{10}$. Знайдіть:

1) S_1; 2) S_5; 3) S_7; 4) S_m; 5) S_{n+1}; 6) S_{n-1}.

§ 20 СУМА ПЕРШИХ *n* ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

ВЧОРА	Ви ознайомилися з геометричною прогресією та її властивостями
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся застосовувати формули для знаходження суми перших n членів скінченної геометричної прогресії
ЗАВЖДИ	Ви зможете створювати математичну модель процесу поширення інформації, розраховувати прибутки за банківськими вкладами

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА



Організатори проведення флешмобу до Дня матері в Україні вирішили використати для зв'язку між учасниками смс-повідомлення. Один з учасників отримав повідомлення з проханням надіслати відповідну інформацію чотирьом іншим, які, у свою чергу, надіслали смс-повідомлення ще чотирьом учасникам і т. д. Скільки учасників флешмобу отримають інформацію протягом 20 хв, якщо один учасник виконує це доручення за 2 хв? Усі надіслані повідомлення вважайте отриманими.

Коментар до розв'язання

Складемо таблицю за умовою задачі.

«Кроки» n розповсюдження інформації	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Час від початку розсилки повідомлень, хв	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Кількість повідомлень, надісланих на n-му кроці	1	$1\cdot 4=4$	$4\cdot 4=16$	$16\cdot 4=64$	$64\cdot 4=256$	...	...	...	...	...	...

Бачимо, що кількість повідомлень, надісланих кожної другої хвилини, складають геометричну прогресію: 1, 4, 16, 64, ..., у якій перший член $b_1=1$, знаменник $q=4$. Кількість членів прогресії $n=11$.

Для того щоб відповісти на запитання, скільки учасників флешмобу отримають повідомлення протягом 20 хв, необхідно знайти суму всіх надісланих повідомлень:

$$S_n=1+4+16+64+256+\dots$$

Якщо кількість членів прогресії — невелике число, цю суму можна обчислити усно. В іншому випадку для спрощення обчислень потрібно знати формулу суми S_n перших n членів геометричної прогресії.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Флешмоб — заздалегідь спланована масова акція, під час якої велика група людей раптово з'являється в громадському місці, протягом декількох хвилин виконує обговорені дії, а потім швидко розходиться.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Запишемо суму S_n перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Помножимо обидві частини рівності (1) на q. Отримаємо:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q. \qquad (2)$$

Використовуючи рекурентні формули $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$ і т. д., рівність (2) можна записати у вигляді:

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_{n+1}. \qquad (3)$$

Розглянемо систему двох рівнянь (1) і (3):

$$\begin{cases} S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, & (1) \\ S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n + b_{n+1}. & (3) \end{cases}$$

Віднімемо почленно ці рівняння:

$$S_n - S_n q = b_1 - b_{n+1}.$$

Ураховуючи, що $b_{n+1} = b_n q$, перетворимо останню рівність так, щоб у неї входили лише змінні S_n, b_1 і b_n, тобто $S_n(1-q) = b_1 - b_n q$. Тоді при $q \neq 1$ маємо:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}.$$

Якщо в отриманій формулі записати b_n, використовуючи формулу n-го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 q^{n-1}$, отримаємо $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 \cdot q^n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Формули для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії ($q \neq 0$, $q \neq 1$):

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Зауважимо, що одержані формули суми перших n членів геометричної прогресії не використовуються при $q = 1$. Проте при $q = 1$ геометрична прогресія існує. Але з урахуванням того, що всі члени такої прогресії рівні між собою, суму перших n членів шукають за формулою $S_n = b_1 \cdot n$.

Наприклад:

Сума перших n членів геометричної прогресії 7, 7, 7, 7, ..., у якій $b_1 = 7$, $q = 1$, дорівнює: $S_n = 7n$.

Коли йдеться про суму, мається на увазі, що додаються хоча б два числа. Утім у формулу суми S_n можна підставити і $n = 1$. При цьому отримане число буде першим членом прогресії: $S_1 = b_1$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- геометрична прогресія
- знаменник геометричної прогресії
- n-й член геометричної прогресії
- формули суми перших n членів геометричної прогресії

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо $q > 1$, то зручніше використовувати формулу

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ПОМІРКУЙТЕ

За яких умов зручно застосовувати кожну з отриманих формул суми?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У клинописних табличках вавилонян зустрічається задача на знаходження суми перших 9 членів геометричної прогресії $1;\ 2;\ 2^2;\ \ldots;\ 2^{n-1};\ \ldots$.

ПРИКЛАД 1

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1=48$ і $q=0{,}5$, якщо $n=4$; $n=k$; $n=k-3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^{m-n}=a^m:a^n$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо формулу, за якою шукатимемо суму S_n. Вибираємо формулу $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, тому що задано b_1 і q. Підставимо їх значення в записану формулу та спростимо її.	$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; $S_n=\frac{48(1-0{,}5^n)}{1-0{,}5}$; $S_n=96(1-0{,}5^n)$
КРОК 2	Підставимо значення $n=4$ у формулу, одержану на кроці 1.	$S_n=96(1-0{,}5^4)$; $S_n=96\cdot\frac{16-1}{16}=\frac{96\cdot15}{16}=90$
КРОК 3	Знайдемо S_k. Для цього підставимо у формулу $n=k$.	$S_k=96(1-0{,}5^k)$
КРОК 4	Підставимо у формулу суми $n=k-3$, знайдемо S_{k-3} і перетворимо отриманий вираз.	$S_{k-3}=96(1-0{,}5^{k-3})$; $S_{k-3}=96\left(1-\frac{0{,}5^k}{0{,}5^3}\right)$; $S_{k-3}=96(1-8\cdot0{,}5^k)$

Відповідь: 90; $96(1-0{,}5^k)$; $96(1-8\cdot0{,}5^k)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1=30$, $q=16$;
2) $b_1=6$, $q=0{,}4$;
3) $b_1=45$, $q=-4$;
4) $b_1=18$, $q=-0{,}8$.

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

5) $b_1=10$, $q=2$, якщо $n=5$, $n=m$, $n=m-1$;

6) $b_1=162$, $q=\frac{1}{3}$, якщо $n=4$, $n=m$, $n=m+2$;

7) $b_1=12$, $q=-3$, якщо $n=4$, $n=k$, $n=k+1$;

8) $b_1=36$, $q=-\frac{1}{2}$, якщо $n=5$, $n=k$, $n=k-2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Задачі на знаходження суми членів геометричної прогресії зустрічаються у вавилонян, в єгипетських папірусах, у стародавньому китайському трактаті «Математика у 9 книгах».
- Вавилоняни дійшли такого висновку: зростання освітлення місячного диска в перші 5 днів після молодика відбувається за законом геометричної прогресії зі знаменником 2.

ПРИГАДАЙТЕ!

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

ПРИКЛАД 2

Визначте кількість n членів геометричної прогресії (x_n), сума яких дорівнює 571,5, якщо $x_n = 288$, $q = 2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	За умовою задано S_n і x_n; $q > 1$, тому використаємо формулу $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$. Підставимо в неї відомі значення q, x_n і S_n та знайдемо x_1.	$S_n = \frac{x_n q - x_1}{q-1}$; $571{,}5 = \frac{288 \cdot 2 - x_1}{2-1}$; $571{,}5 = 576 - x_1$; $x_1 = 4{,}5$
КРОК 2	Знаючи x_n, x_1 і q, знайдемо n, використовуючи формулу n-го члена для $x_n = 288$.	$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$; $288 = 4{,}5 \cdot 2^{n-1}$; $288 = \frac{9}{2} \cdot 2^{n-1}$; $32 = 2^{n-2}$; $32 = \frac{2^n}{2^2}$; $2^5 = \frac{2^n}{2^2}$; $2^7 = 2^n$; $n = 7$

Відповідь: 7.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Рівняння $2^7 = 2^n$, отримане в прикладі 2, ви ще не вмієте розв'язувати. Такі рівняння вивчають у старшій школі.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть порядковий номер n члена геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 10$, $q = 7$, $b_n = 490$;
2) $b_1 = 2$, $q = 5$, $b_n = 250$;
3) $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{10}$, $b_n = 0{,}00003$;
4) $b_1 = 60$, $q = \frac{1}{4}$, $b_n = \frac{15}{4}$.

Визначте кількість n членів геометричної прогресії (x_n), якщо:

5) $S_n = 484$, $x_n = 324$, $q = 3$;
6) $S_n = 315$, $x_n = 160$, $q = 2$;
7) $S_n = 436{,}8$, $x_n = 291{,}6$, $q = 3$;
8) $S_n = 431{,}8$, $x_n = 217{,}6$, $q = 2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У творах Жуля Верна «Таємничий острів», «Подорож у надра Землі» є згадки про геометричну прогресію. Чи можете пригадати, які саме?

ПРИКЛАД 3

Знайдіть суму перших семи членів геометричної прогресії, третій член якої дорівнює 18, а п'ятий дорівнює 162.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Позначимо задану прогресію (x_n). Запишемо у вигляді системи рівнянь формули n-го члена для x_3 і x_5 та підставимо задані числові значення.	$\begin{cases} x_3 = x_1 q^2, \\ x_5 = x_1 q^4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 q^2 = 18, \\ x_1 q^4 = 162 \end{cases}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Оскільки обидві частини кожного рівняння системи відмінні від нуля ($x_n \neq 0$, $q \neq 0$ за означенням прогресії), поділимо почленно друге рівняння на перше.	$\frac{x_1 q^4}{x_1 q^2} = \frac{162}{18}$; $q^2 = 9$; $q = 3$ або $q = -3$
КРОК 3	Знайдемо x_1 для кожного значення q. Оскільки і для $q = 3$, і для $q = -3$ маємо $q^2 = 9$, робимо висновок, що існує єдине значення $x_1 = 2$.	При $q = 3$ і при $q = -3$ $x_1 = \frac{x_3}{q^2} = \frac{18}{3^2} = 2$
КРОК 4	Знайдемо суму S_7 перших семи членів прогресії для обох значень q.	$S_7 = \frac{x_1\left(1-q^7\right)}{1-q}$; 1) при $q = 3$ $S_7 = \frac{2\left(1-3^7\right)}{1-3}$; $S_7 = 2186$; 2) при $q = -3$ $S_7 = \frac{2\left(1-(-3)^7\right)}{1+3}$; $S_7 = 1094$

Відповідь: 2186 або 1094.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 3$, $b_2 = 24$;
2) $b_1 = 4$, $b_2 = 36$;
3) $b_1 = 20$, $b_2 = -15$;
4) $b_1 = 30$, $b_2 = -5$.

Обчисліть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

5) $b_1 = 6$, $b_3 = 24$; $n = 6$;
6) $b_1 = 5$, $b_3 = 45$; $n = 5$;
7) $b_3 = 36$, $b_5 = 4$; $n = 5$;
8) $b_3 = 72$, $b_5 = 18$; $n = 6$.

ПРИКЛАД 4 (актуальна задача)

Організатори проведення флешмобу до Дня матері в Україні вирішили використати для зв'язку між учасниками смс-повідомлення. Один з учасників отримав повідомлення з проханням надіслати відповідну інформацію чотирьом іншим, які, у свою чергу, надіслали смс-повідомлення ще чотирьом учасникам і т. д. Скільки учасників флешмобу отримають інформацію протягом 20 хв, якщо один учасник виконує це доручення за 2 хв? Усі надіслані повідомлення вважайте отриманими.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 2014 р. студенти Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки в рамках тижня математичного факультету організували флешмоб «Ми любимо матфак».

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо, скільки етапів передачі інформації по 2 хв міститься у 20 хв.	20 хв : 2 хв = 10 (етапів)
КРОК 2	Визначимо, як змінюватиметься кількість учасників, повідомлених наприкінці кожного етапу тривалістю 2 хв.	Кількість учасників, повідомлених наприкінці кожного етапу, дорівнюватиме кількості учасників, повідомлених наприкінці попереднього етапу, помноженій на 4
КРОК 3	Створимо математичну модель даної ситуації. Введемо позначення елементів геометричної прогресії.	Загальна кількість отриманих повідомлень дорівнює кількості учасників, які надіслали повідомлення протягом 20 хв. Її можна знайти як суму перших n членів геометричної прогресії. (b_n) — геометрична прогресія, $b_1=1$, $q=4$, кількість етапів $n=1+10=11$ (оскільки першим етапом вважаємо отримання першим учасником повідомлення від організаторів), S_{11} — шукана сума
КРОК 4	Оскільки $q>1$, обчислимо суму перших 11 членів прогресії за формулою $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.	$S_{11}=\frac{1\cdot(4^{11}-1)}{4-1}=\frac{4^{11}-1}{3}$

Відповідь: $\frac{4^{11}-1}{3}$ учасників.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу.

1) У новорічні свята кількість b_n листівок, що надходять у поштове відділення n-го січня, задається формулою $b_n=10\,000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, де $1\leqslant n\leqslant 5$. Скільки всього листівок надійшло у відділення за перші 5 днів нового року?
2) Набережну міста прикрашають 4 екобудинки. Перший екобудинок розрахований на 8 квартир. У кожному наступному екобудинку квартир удвічі більше, ніж у попередньому. Скільки всього квартир у чотирьох екобудинках?
3) Зареєструвавшись у соціальній мережі Facebook, першого дня Микита додав у друзі 32 особи. Кожного наступного дня кількість друзів Микити збільшувалася втричі порівняно з попереднім днем.
   а) Скільки нових друзів з'явилося в Микити в цій соціальній мережі за третій день із моменту реєстрації?
   б) Скільки всього друзів з'явилося в Микити в цій соціальній мережі за перші три дні з моменту реєстрації?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Українська компанія PassivDom створила перший повністю енергонезалежний будинок за допомогою 3D-технології. Цей будинок використовує енергію Сонця для всіх потреб його мешканців. Цей будинок повністю автономний, йому навіть не потрібна вода — він генерує її сам.

4) У фітнес-центрі діють знижки для постійних клієнтів. Ціна абонемента на перший рік становить x грн. Кожного наступного року ціна абонемента стає на 10 % меншою порівняно з ціною абонемента на попередній рік.
   а) Виразіть через x вартість абонемента на третій рік.
   б) Знайдіть x, якщо відомо, що за абонементи на перші три роки (три абонементи) клієнт сплатив 10 840 грн.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Шахи — одна з найдавніших ігор у світі — були винайдені в Індії. Легенда про винахід шахів згадується у творах, написаних арабською, перською, тюркською мовами. Текст легенди можна знайти у книжці «Жива математика» відомого вченого і популяризатора фізики, математики та астрономії Я. І. Перельмана (1882–1942). З неї ви можете дізнатися, яку винагороду попросив винахідник цієї гри і як це пов'язано з геометричною прогресією.

ЗАПИС ПЕРІОДИЧНОГО ДЕСЯТКОВОГО ДРОБУ У ВИГЛЯДІ ЗВИЧАЙНОГО ДРОБУ

У курсі алгебри 8 класу ви навчилися перетворювати періодичний десятковий дріб у звичайний. У цьому параграфі ми розглянемо ще один спосіб розв'язування такого завдання — із використанням геометричної прогресії.

Існує окремий вид геометричної прогресії, знаменник якої перебуває в межах від -1 до 1, тобто $-1<q<1$. Таку геометричну прогресію (b_n), у якій $|q|<1$, називають *нескінченно спадною геометричною прогресією*. Цікавим є те, що для такої прогресії можна знайти суму всіх її членів за формулою $S=\frac{b_1}{1-q}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$q=\frac{b_2}{b_1}$

ПРИКЛАД 5

Подайте число 0,(13) у вигляді нескоротного звичайного дробу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо задане число у вигляді суми десяткових дробів.	$0,(13)=0,131313\ldots=$ $=0,13+0,0013+0,000013+\ldots$
КРОК 2	Розглянемо отриману послідовність доданків. Зробимо висновок щодо її виду.	Послідовність чисел 0,13; 0,0013; 0,000013; ... є геометричною прогресією, перший член якої $b_1=0,13$, знаменник $q=0,01$. $\lvert q\rvert<1$, отже, геометрична прогресія є нескінченно спадною
КРОК 3	Знайдемо суму членів прогресії за формулою $S=\frac{b_1}{1-q}$.	$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{0,13}{1-0,01}=\frac{0,13}{0,99}=\frac{13}{99}$

Відповідь: $\frac{13}{99}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Один з учнів має йти від столу вчителя до дверей кабінету по прямій. Він робить перший крок завдовжки 1 м, другий — 1/2 м, третій — 1/4 м і т. д., тобто довжина кожного наступного кроку у 2 рази менша, ніж довжина попереднього. Чи дійде учень до дверей, якщо відстань від столу до дверей по прямій 3 м?

TO BE SMART

Радимо прочитати книжку «Математичні усмішки» (упорядник Н. О. Вірченко). Книжка складається з трьох розділів: «Про цікаве та кумедне у житті математиків», «Цікаве та смішне у математиці», «Математичні сміховинки, жарти».

Задача Фібоначчі із «Книги абака»

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Подайте у вигляді нескоротного звичайного дробу число:

1) 0,(7); 2) 0,(42); 3) 2,(5).

Подайте у вигляді нескоротного звичайного дробу $\frac{m}{n}$ число:

4) 1,(14); у відповідь запишіть суму $m+n$;

5) $1\frac{3}{7}\cdot 0{,}2(3)$; у відповідь запишіть різницю $n-m$.

Обчисліть значення виразу:

6) $\frac{0{,}(63)}{1{,}(18)}\cdot 91$; 7) $\frac{0{,}(18)+1{,}(72)}{21}\cdot 330$.

8) Знайдіть $\frac{15}{16}$ від числа $0{,}4(6)+0{,}01(12)\cdot 5\frac{35}{37}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть суму S_n перших n членів геометричної прогресії:

1) (x_n): $x_1=4$; $q=\frac{1}{2}$; $n=4$;

2) (b_n): $b_1=-9$; $q=\sqrt{3}$; $n=6$;

3) (x_n): 15; 10; $\frac{20}{3}$; ...; $n=5$;

4) (y_n): $-\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $-9\sqrt{2}$; ...; $n=5$;

5) (c_n): $c_6=8$; $c_8=32$; $n=4$ $(q<0)$;

6) (z_n): $z_3=9$; $z_6=27\sqrt{3}$; $n=5$.

2 У геометричній прогресії:

1) (x_n): $x_3=-4$; $x_7=-64$. Знайдіть S_7.

2) (y_n): $y_3=-9$; $q=-3$; $S_n=182$. Знайдіть n.

3) (c_n): $\begin{cases} c_2\cdot c_4=100,\\ c_1+c_3=12.\end{cases}$ Знайдіть S_6.

4) (b_n): $\begin{cases} b_1\cdot b_6=-8,\\ b_4=-2.\end{cases}$ Знайдіть S_8.

5) (x_n): $x_2=54$; $x_4=6$ $(q>0)$. Знайдіть S_7.

6) (c_n): $\begin{cases} c_1+c_2=36,\\ c_3+c_4=144\end{cases}$ $(q>0)$; $S_n=378$. Знайдіть n.

3 Сім бабусь вирушають до Риму. У кожної по сім мулів, кожен мул несе по сім мішків, у кожному мішку по сім хлібів, у кожному хлібі по сім ножів, кожен ніж відріже по сім скибок хліба. Скільки всього предметів?

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 15

1 Сума перших n членів геометричної прогресії обчислюється за формулою $S_n = 5\left(2^n - 1\right)$. Знайдіть S_3.

А	Б	В	Г
25	30	35	40

2 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії $\left(b_n\right)$, якщо $b_1 = 15$, $q = 4$.

А	В
$S_n = 5\left(4^n - 1\right)$	$S_n = 15\left(4^n - 1\right)$
Б	**Г**
$S_n = 5\left(1 - 4^n\right)$	$S_n = 15\left(1 - 4^n\right)$

3 Якщо суми перших 3 і перших 4 членів геометричної прогресії дорівнюють відповідно $S_3 = 9$ і $S_4 = -15$, то $b_4 =$

А	Б	В	Г
−6	−24	24	6

4 Знайдіть номер n члена геометричної прогресії $b_n = 0{,}0008$, якщо $b_1 = 8$ і $q = \frac{1}{10}$.

А	Б	В	Г
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$

5 Знайдіть суму перших 3 членів геометричної прогресії $\left(b_n\right)$, якщо $1 + q + q^2 = \frac{30}{b_1}$.

А	Б	В	Г
10	15	90	30

6 Установіть відповідність між формулою n-го члена (1–3) геометричної прогресії $\left(b_n\right)$ та формулою суми її перших n членів (А–Г).

1	$b_n = 3 \cdot 2^n$	А	$S_n = 2\left(2^n - 1\right)$
2	$b_n = 2^{n+1}$	Б	$S_n = 3\left(2^n - 1\right)$
3	$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$	В	$S_n = 4\left(2^n - 1\right)$
		Г	$S_n = 6\left(2^n - 1\right)$

7 Сума перших n членів геометричної прогресії $\left(b_n\right)$ дорівнює 60, $b_n = 40{,}5$, $q = 3$.

1) Визначте перший член цієї прогресії.
2) Знайдіть n.

8 У місті 12 районів, у кожному є сквер. Площа скверу в першому районі дорівнює 1000 м^2. Площа скверу в кожному наступному районі в 1,5 разу більша, ніж у попередньому. Складіть формулу, за якою можна обчислити:

1) площу b_n (у м^2) скверу, розташованого в n-му районі міста $\left(1 \leqslant n \leqslant 12\right)$;
2) загальну площу S_n (у м^2) ділянок, виділених під сквери в усіх районах міста.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТРИБКИ З ПАРАШУТОМ»

Парашутисти стрибають із літака і в повітрі утворюють кола, тримаючи одне одного за руки. Перше коло складається із 3 парашутистів. Кожне наступне коло складається з удвічі більшої кількості парашутистів, ніж попереднє.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Швидкість вільного падіння 180 км/год, або 50 м/с.
- До повного відкриття парашута людина пролітає в середньому 3000 м приблизно за 1 хв.

1 Визначте кількість парашутистів, з яких складається третє коло.

2 Складіть формулу, за якою можна обчислити кількість x_n парашутистів, що утворюють n-не коло.

3 Скільки парашутистів перебувають у повітрі, якщо всього утворилося 5 кіл?

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження щодо геометричної прогресії правильними. Відповідь обґрунтуйте.

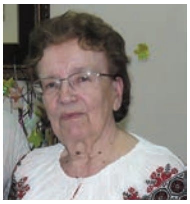
1) Якщо $b_1+b_2=3$, $b_3+b_4+b_5=28$, то $S_5=31$.

2) Суму перших n членів геометричної прогресії $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}}{8}$, ... обчислюють за формулою $S_n=\sqrt{5}\left(1-2^{-n}\right)$.

3) Якщо $S_1=3$, $q\cdot S_2=90$, то $S_3=93$.

4) Якщо $b_3=6$, то $b_1\cdot b_5=36$.

5) Якщо $S_3=42$, $1+q+q^2=21$, то $b_1=2$.



Ніна Опанасівна Вірченко (нар. 1930) — українська вчена, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН ВШ України, віце-президент АН ВШ, член Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств. Ніна Опанасівна — обдарований педагог, авторка понад 350 наукових і науково-методичних праць, 20 оригінальних книжок.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1=7$, $q=0{,}3$; 2) $b_1=100$, $q=-19$.

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

3) $b_1=160$, $q=\frac{1}{2}$, якщо $n=5$, $n=m$, $n=m-2$;

4) $b_1=36$, $q=-3$, якщо $n=4$, $n=k$, $n=k+1$.

Див. приклади 1, 2

2 Знайдіть порядковий номер n члена геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1=4$, $q=9$, $b_n=324$; 2) $b_1=9$, $q=\frac{1}{10}$, $b_n=0{,}000\,009$.

Визначте кількість членів геометричної прогресії (x_n), якщо:

3) $S_n=105$, $x_n=56$, $q=2$; 4) $S_n=254{,}1$, $x_n=170{,}1$, $q=3$.

3 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1=5,\ b_2=35$; 2) $b_1=24,\ b_2=-6$.

Обчисліть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

3) $b_1=3,\ b_3=12;\ n=5$; 4) $b_3=18,\ b_5=2;\ n=5$.

Див. приклади 3–5

4 Розв'яжіть задачу.

1) На графіті-фестивалі час b_n (у хв), який художник витрачає на створення n-го зображення, задається формулою $b_n=40\cdot 2^{n-1}$, де $1\leqslant n\leqslant 4$. Скільки часу (у хв) витратить художник на створення всіх чотирьох зображень?

2) На робочому столі комп'ютера 6 папок. У першій папці 4 файли, в кожній наступній папці файлів удвічі більше, ніж у попередній. Скільки всього файлів міститься в 6 папках на робочому столі комп'ютера?

3) Перша частина культової трилогії зібрала у світовому прокаті 123 млн г. о. Кожна наступна частина збирала суму (у млн г. о.), утричі більшу, ніж попередня.

а) Яку суму (у млн г. о.) зібрала у світовому прокаті третя частина трилогії?

б) Яку загальну суму (у млн г. о.) зібрала у світовому прокаті культова трилогія?

4) Для хімічної лабораторії щороку закуповують хімічні реактиви. Першого року вартість усіх необхідних реактивів становила x грн. Кожного наступного року вартість реактивів ставала на 20 % більшою, ніж попереднього.

а) Виразіть через x вартість реактивів, закуплених протягом третього року.

б) Знайдіть x, якщо відомо, що за перші три роки за всі реактиви було сплачено 364 000 грн.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Інженер-хімік:

- проводить дослідження з метою отримання продукції із заданими властивостями;
- здійснює контроль за ходом технологічних процесів;
- проводить виробничо-технологічну, організаційно-управлінську, проектно-конструкторську, дослідницьку діяльність;
- моделює технологічні процеси, описує їх математичними методами.

5 Виконайте завдання.

1) Подайте число 0,(15) у вигляді нескоротного звичайного дробу.

2) Подайте число 1,2(3) у вигляді нескоротного звичайного дробу.

3) Подайте число $1\frac{7}{27}:1,(8)$ у вигляді нескоротного звичайного дробу $\frac{m}{n}$. У відповідь запишіть значення добутку $n\cdot m$.

4) Обчисліть значення виразу $\frac{2,1(6)+2,8(3)}{13}\cdot 1,(18)$. У відповідь запишіть число, що дорівнює 11 % від знайденого значення.

Бонусне завдання

6 Обчисліть куб знаменника нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо її сума в 5 разів більша за суму перших трьох її членів.

«Як мистецтво дарує людині красу чуттєвого, так математика дарує людині красу розумового. Недаремно ж так багато великих математиків були ревними шанувальниками поезії, а чимало поетів висловлювало своє захоплення стрункістю та красою математичної думки.»

Ніна Вірченко

В ОДИН КЛІК

За допомогою пакетів прикладних програм ви можете задати арифметичну та геометричну прогресії, знайти n-й член та обчислити суму перших n членів цих послідовностей. Використаємо для цього програму Microsoft Excel.

Для запису арифметичних дій у Microsoft Excel використовують позначення, наведені в таблиці.

Дія	Математичний запис	Запис у програмі
Додавання	$+$	+
Віднімання	$-$	-
Множення	$\times$	*
Ділення	$\div$	/
Піднесення до степеня	x^n	POWER(X,n)
Дорівнює	$=$	=

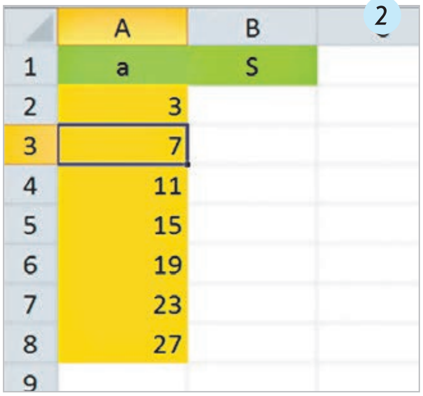
ПРИКЛАД 1

Знайдіть сьомий член і суму перших 7 членів арифметичної прогресії (a_n), перший член якої дорівнює 3, а різниця дорівнює 4.

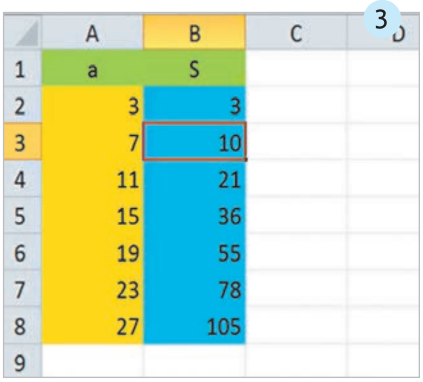
Алгоритм

1. Для зручності позначте літерами a і S перші два стовпці — вони міститимуть відповідно члени a_n арифметичної прогресії і суми S_n перших n членів арифметичної прогресії (a_n).
2. Заповніть клітинки першого стовпця. Уведіть:
   а) у клітинку A2 число 3 — перший член прогресії;
   б) у клітинку A3 формулу =A2+4 для знаходження a_2 та натисніть Enter. Тепер клітинка A3 містить значення $a_2=7$;
   в) у наступні клітинки формулу для знаходження n-го члена арифметичної прогресії. Для цього виділіть клітинку A3 і перетягніть маркер заповнення (у правому нижньому куті) вниз уздовж стовпця A, у даному випадку — до восьмого рядка. У клітинці A8 отримаємо значення $a_7=27$.
3. Заповніть клітинки другого стовпця. Уведіть:
   а) у клітинку B2 число 3 — перший член прогресії, оскільки сума першого члена дорівнює першому члену;
   б) у клітинку B3 формулу =B2+A3 для знаходження S_2 та натисніть Enter. Тепер клітинка B3 містить значення $S_2=10$;
   в) у наступні клітинки формулу для знаходження суми n перших членів прогресії. Для цього виділіть клітинку B3 і перетягніть маркер заповнення вниз уздовж стовпця B. У клітинці B8 отримаємо значення $S_7=105$.

До прикладу 1



	A	B
1	a	S
2	3	
3	7	
4	11	
5	15	
6	19	
7	23	
8	27	
9		



	A	B	C
1	a	S	
2	3	3	
3	7	10	
4	11	21	
5	15	36	
6	19	55	
7	23	78	
8	27	105	
9			

ПРИКЛАД 2

Знайдіть 303-й член і суму перших 303 членів арифметичної прогресії (a_n), перший член якої дорівнює 3, а різниця дорівнює 4.

Алгоритм

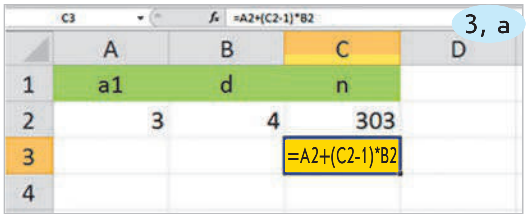
Скористаємося формулами для знаходження n-го члена та суми перших n членів арифметичної прогресії: $a_n=a_1+d(n-1)$, $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

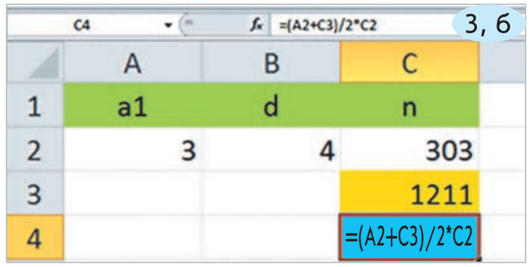
У завданнях на арифметичну прогресію на змінні не накладається жодних обмежень. Розв'язки можна знаходити завжди.

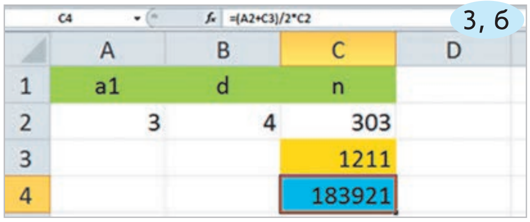
У завданнях на геометричну прогресію слід ураховувати умови $q\neq0$, $q\neq1$.

1. Позначте літерами a1, d і n перші три стовпці — перші два міститимуть відповідно значення першого члена та різниці арифметичної прогресії, третій — номер n.
2. Заповніть клітинки другого рядка. Уведіть:
   а) у клітинку A2 число 3 — перший член прогресії;
   б) у клітинку B2 число 4 — різницю прогресії;
   в) у клітинку C2 число 303 — значення n.
3. Заповніть клітинки третього стовпця. Уведіть:
   а) у клітинку C3 формулу =A2+(C2–1)*B2 для знаходження n-го члена прогресії. Тепер клітинка C3 містить значення $a_{303}=1211$;
   б) у клітинку C4 формулу =(A2+C3)/2*C2 для знаходження суми перших n членів прогресії. Тепер клітинка C4 містить значення $S_{303}=183921$.

До прикладу 2







ПРИКЛАД 3

Знайдіть четвертий член і суму перших 4 членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=10$, $q=2$.

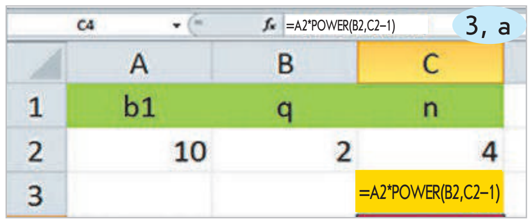
Алгоритм

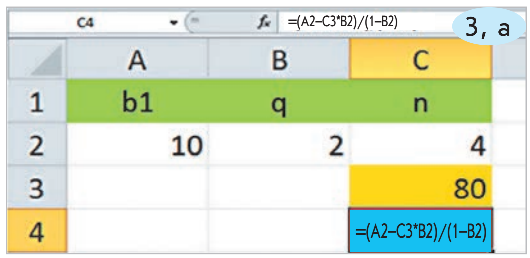
Скористаємося формулами для знаходження n-го члена та суми перших n членів геометричної прогресії:

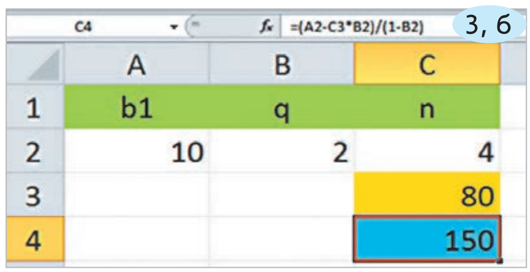
$$b_n=b_1\cdot q^{n-1},\ \ S_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q}\ \ (q\neq 0,\ q\neq 1).$$

1. Позначте літерами b1, q і n перші три стовпці — перші два міститимуть відповідно значення першого члена та знаменника геометричної прогресії, третій — номер n.
2. Заповніть клітинки другого рядка. Уведіть:
   а) у клітинку A2 число 10 — перший член прогресії;
   б) у клітинку B2 число 2 — знаменник прогресії;
   в) у клітинку C2 число 4 — значення n.
3. Заповніть клітинки третього стовпця. Уведіть:
   а) у клітинку C3 формулу =A2*POWER(B2,C2–1) для знаходження n-го члена прогресії. Тепер клітинка C3 містить значення $a_4=80$;
   б) у клітинку C4 формулу =(A2–C3*B2)/(1–B2) для знаходження суми перших n членів прогресії. Тепер клітинка C4 містить значення $S_4=150$.

До прикладу 3







ТРЕНУЄМОСЯ

1 Знайдіть дев'ятий член і суму перших 9 членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=10$, $q=2$.

2 Знайдіть суму нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=3$, $q=0{,}25$.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 16—20

1 Ви дізналися, що таке числова послідовність, які є способи її задання, навчилися знаходити будь-який член послідовності за заданою формулою.

Числова послідовність — це розміщені в певному порядку числа, або упорядкований набір чисел.

Числа, що утворюють послідовність, називають **членами послідовності**.

Кожний член послідовності позначають літерою з індексом, що вказує його порядковий номер: наприклад: $a_1, a_2, a_3 \ldots$

Послідовність прийнято позначати символом n-го члена, взятим у дужки, наприклад: (a_n), (b_n), (x_n).

Послідовності бувають:

- **скінченними** (містять скінченне число членів);
- **нескінченними** (містять нескінченне число членів).

Послідовність називають:

- **зростаючою**, якщо кожен її наступний член більший за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n$;
- **спадною**, якщо кожен її наступний член менший від попереднього, тобто $a_{n+1} < a_n$;
- **стаціонарною**, якщо вона має вигляд $x_n = c$, де $c = \text{const}$ (стале число).

Способи задання послідовностей: словесний; табличний; аналітичний; рекурентний, графічний.

Аналітичний спосіб задання послідовності:

- задано формулу, за якою можна знайти будь-який член послідовності, якщо відомий його номер;
- цю формулу називають **формулою *n*-го члена послідовності**, наприклад: $s_n = 50 + 30(n-1)$ — формула n-го члена послідовності s.

Рекурентний спосіб задання послідовності:

- задано перший або декілька перших членів послідовності;
- задано формулу, за якою можна знайти будь-який член послідовності через попередні члени.

2 Ви познайомилися з арифметичною прогресією, її елементами та властивостями, навчилися знаходити суму перших n членів арифметичної прогресії.

Арифметична прогресія — числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число.

Різниця *d* арифметичної прогресії — число, яке є різницею між певним членом послідовності (починаючи з другого) та попереднім її членом.

Арифметичну прогресію можна задати рекурентно: $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbf{N}$.

(a_n) — арифметична прогресія;

d — різниця арифметичної прогресії;

n — номер члена арифметичної прогресії;

a_1 — перший член послідовності;

a_n — n-й член послідовності.

Характеристична властивість арифметичної прогресії

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним:

якщо (a_n) — арифметична прогресія, то $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Справедливим є і **обернене твердження:**

якщо $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$ $(n \geqslant 2)$, то послідовність (a_n) є арифметичною прогресією.

Узагальнена характеристична властивість арифметичної прогресії

Кожний середній член арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному рівновіддалених від нього членів:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad n - k \geqslant 1.$$

Формула n-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Формули для обчислення суми перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

3 Ви дізналися, що таке геометрична прогресія, які її елементи й властивості, навчилися знаходити суму перших n членів геометричної прогресії.

Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Число, на яке множаться члени прогресії, називають **знаменником** геометричної прогресії і позначають літерою q.

Геометричну прогресію можна задати рекурентною формулою:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \; n \in \boldsymbol{N}, \; b_n \neq 0, \; q \neq 0,$$

$$\text{або } q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Формула n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Характеристична властивість геометричної прогресії

Квадрат довільного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку попереднього та наступного її членів: якщо (b_n) — геометрична прогресія, то $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Справедливим є і **обернене твердження:**

якщо $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$, то послідовність (b_n) є геометричною прогресією.

Інше формулювання характеристичної властивості

Модуль кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Формули для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 0, \; q \neq 1$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

Варіант 1

Готуємося до ДПА

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

1 Послідовність (x_n) задано формулою n-го члена $x_n = \frac{12}{n+1}$. Знайдіть x_2.

А	Б	В	Г
2	4	6	12

2 Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n): 5; 1; −3; … .

А	Б	В	Г
$\frac{1}{5}$	5	4	−4

3 Визначте шостий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_5 = 2$, а знаменник $q = 7$.

А	Б	В	Г
14	$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{2}$	9

4 У геометричній прогресії (b_n) $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{10}$, $b_n = 0{,}006$. Знайдіть n.

А	Б	В	Г
$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$

5 Укажіть трійку чисел, які у поданому порядку утворюють арифметичну прогресію.

А	Б	В	Г
0; −4; 4	−3; −6; −12	−7; 0; 7	1; 3; 7

6 Складіть формулу для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_n = 5^n$.

А	В
$S_n = \frac{5}{4}(1-5^n)$	$S_n = 5(5^n - 1)$
Б	**Г**
$S_n = 5(1-5^n)$	$S_n = \frac{5}{4}(5^n - 1)$

7 Визначте, чи є число 11 членом послідовності $y_n = 23 - \frac{2n}{5}$. Якщо так, то знайдіть його порядковий номер.

8 Між числами −10 і 2 вставте такі два числа, щоб усі чотири числа утворили зростаючу арифметичну прогресію. Знайдіть 14-й член цієї прогресії.

9 Знайдіть:
1) кількість усіх двоцифрових натуральних парних чисел, менших від 81;
2) суму всіх двоцифрових натуральних парних чисел, менших від 81.

10 Вивчаючи японську техніку оригамі, Катерина за перший місяць виготовила за цією технікою 25 виробів. Кожного наступного місяця дівчина створювала удвічі більше виробів, ніж попереднього.
1) Скільки виробів створила Катерина за четвертий місяць від початку навчання?
2) Скільки всього виробів створила Катерина за 4 місяці від початку навчання?

Бонусне завдання

У лівій частині рівняння $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = 3x$ стоїть сума нескінченно спадної геометричної прогресії. Знайдіть x.

ПОВТОРЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

1. НЕРІВНОСТІ

1 Відомо, що $-3<m<5$. Оцініть значення виразу:

1) $5m$; 2) $5m-1$; 3) $-2m$; 4) $3-2m$.

2 Відомо, що $2<m<5$, $8<a<20$. Оцініть значення виразу:

1) $a+m$; 3) $a-m$; 5) $am+\frac{a}{m}$;

2) $-m$; 4) $\frac{10}{a}$; 6) $m\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

3 Розв'яжіть нерівність:

1) $6-2x>0$; 3) $2x+5\leqslant-3(x+6)-2$;

2) $-\frac{x}{6}<-4$; 4) $\frac{4-y}{15}+1>\frac{5y-3}{12}-2y$;

5) $x(x+7)-2\leqslant x^2+1+7x$;

6) $\frac{12t^2-t}{6}\leqslant\frac{(t-3)(t+3)}{2}+\frac{3}{2}t^2$.

4 Знайдіть усі розв'язки нерівності:

1) $|y|\leqslant5$; 3) $|4y-5|\leqslant19$; 5) $|t-3|\leqslant-2$;

2) $|a|>8$; 4) $\left|2-\frac{x}{5}\right|>3$; 6) $|2x+5|>-3$.

5 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}x\geqslant-11,\\x<6;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-1<17,\\12-x\leqslant0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}-\frac{x}{5}\geqslant-1,\\4x+2<0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x\leqslant42,\\x-2>0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+1\geqslant13,\\-4+x\leqslant0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}-\frac{x}{4}<-2,\\5x-50\geqslant0.\end{cases}$

6 Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{22-x}$; 4) $y=\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3x+12}}$;

2) $y=\frac{\sqrt{x+34}}{x-2}$; 5) $y=\frac{\sqrt{24-8x}}{|x|-1}$;

3) $y=\frac{\sqrt{2x-16}}{\sqrt{11-x}}$; 6) $y=\frac{\sqrt{28-7x}}{|x|-2}$.

7 Розв'яжіть задачу. Відповідь запишіть у вигляді проміжку.

1) Довжина паркану, яким планують огородити ділянку прямокутної форми, не має перевищувати 140 м. Визначте, якою може бути ширина h цієї ділянки, якщо її довжина дорівнює 48 м.

2) З пункту A, розташованого на березі річки, течія якої дорівнює 3 км/год, у протилежних напрямках з однаковими швидкостями вирушили дві байдарки. З якою швидкістю v мають рухатися байдарки, щоб через 2 год відстань між ними не перевищувала 24 км?

8 Доведіть нерівність:

1) $4(1-a)<6-4a$ при $a\in\boldsymbol{R}$;

2) $(a+4)^2>a(a+8)+10$ при $a\in\boldsymbol{R}$;

3) $a^2+100\geqslant20a$ при $a\in\boldsymbol{R}$;

4) $(a+b+c)^2\leqslant3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ при будь-яких дійсних значеннях a, b і c;

5) $\frac{3a}{b}+\frac{b}{27a}\geqslant\frac{2}{3}$ при $a>0$, $b>0$;

6) $a^3+8\geqslant2a^2+4a$ при $a\geqslant-2$.

2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

1 Знайдіть нулі функції:

1) $y=14-x$; 4) $y=\sqrt{x-20}-6$;

2) $y=x^2-121$; 5) $y=\frac{|x|-2}{2x-4}$;

3) $y=x^2-5x-24$; 6) $y=\frac{x^2-4x-12}{36-x^2}$.

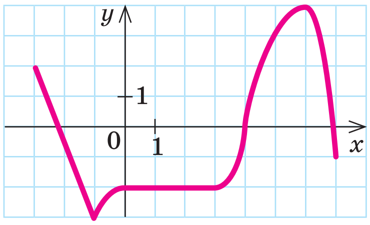
2 Побудуйте графік функції. Знайдіть її область визначення та область значень; проміжки зростання та спадання; проміжки знакосталості.

1) $y=(x+5)^2$; 4) $y=\sqrt{x+3}-2$;

2) $y=\frac{1}{x}-4$; 5) $y=|x-4|+3$;

3) $y=2\sqrt{x}$; 6) $y=|x+5|-2$.

3 На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$.



Знайдіть за графіком найменше та найбільше значення цієї функції на проміжку:

1) $[-3;-1]$; 3) $[0;4]$; 5) $[0;7]$;

2) $[-1;0]$; 4) $[4;7]$; 6) $[-3;7]$.

4 Побудуйте графік функції. Знайдіть її область значень; проміжки зростання та спадання; проміжки знакосталості; найменше значення, якщо воно існує, або найбільше значення, якщо воно існує.

1) $y=9-x^2$; 4) $y=-x^2+x+6$;

2) $y=x^2-4x$; 5) $y=3x^2-4x+1$;

3) $y=x^2+4x+4$; 6) $y=x^2-2x+8$.

5 Побудуйте графік функції. Знайдіть нулі функції, проміжки її зростання та спадання, проміжки знакосталості.

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\leqslant 1, \\ 2x-1, \text{ якщо } x>1; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} (x-2)^2, \text{ якщо } x\geqslant 2, \\ 2-x, \text{ якщо } x<2. \end{cases}$

6 Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2-14^2\geqslant 0$; 4) $x^2+3x-28\geqslant 0$;

2) $x(x-41)\leqslant 0$; 5) $x^2-x+8\leqslant 0$;

3) $x^2-5x-24\leqslant 0$; 6) $x^2-3x+5>0$.

7 Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{12-4x-x^2}$; 3) $y=\sqrt{7x+x^2}$;

2) $y=\sqrt{\frac{1}{3}-3x^2}$; 4) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$;

5) $y=\sqrt{2x^2-5x-3}+\sqrt{3-x}$;

6) $y=\frac{2x-x^2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-x}}{3}$.

8 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x}{3}-2=0, \\ x^2+y^2=37; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2-2x^2=8, \\ x+y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=9, \\ xy=-20; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y^3+x^3=65, \\ x-y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y-4=0, \\ 2x^2-21=xy; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x+2y}{y-x}-\frac{y-x}{x+2y}=\frac{24}{5}, \\ 4x+12y=3. \end{cases}$

9 Розв'яжіть задачу.

1) Добуток цифр двоцифрового числа дорівнює 12. Якщо від третини даного числа відняти 13, то отримаємо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Визначте це число.

2) З міста до аквапарку виїхав велосипедист. Через 3 год після цього назустріч йому з аквапарку вирушив мотоцикліст, швидкість якого втричі більша, ніж швидкість велосипедиста. Вони зустрілися на середині шляху між містом та аквапарком. Якби мотоцикліст виїхав через 2 год після виїзду велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до міста. Знайдіть відстань між містом та аквапарком.

3) На виробництві змішали 60%-й і 90%-й розчини однієї солі. Скільки розчину (у кг) кожної концентрації слід взяти, щоб отримати 3,5 кг 72%-го розчину?

4) Два пішоходи зустрілися на перехресті й розійшлися перпендикулярними шляхами, рухаючись зі сталими швидкостями. Через 1 год відстань по прямій між ними дорівнювала 5 км. Знайдіть швидкості обох пішоходів, якщо відомо, що різниця їх швидкостей становила 1 км/год.

10 Функція задана формулою $y=ax^2+bx-3$. Знайдіть значення a і b, якщо відомо, що графік функції проходить через точки $K(-2;15)$ і $N(5;22)$.

3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

1 За заданою формулою n-го члена послідовності:

1) $a_n = 2n^2 - 3n$ визначте a_1, a_2, a_5;
2) $c_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ визначте c_{17}, c_{k+1}, m, якщо $c_m = 0,5$;
3) $y_n = \frac{5n-60}{2}$ визначте номери всіх від'ємних членів цієї послідовності;
4) $x_n = -n^2 + 4$ знайдіть найбільший член послідовності та вкажіть його номер;
5) $a_n = -n^2 + 2n - 8$ визначте a_7 та номери всіх додатних членів цієї послідовності;
6) $b_n = 3n^2 - 7n + 4$ знайдіть найменший член послідовності та вкажіть його номер; визначте номери членів послідовності, для яких виконується умова $b_n \leqslant 2$.

2 В арифметичній прогресії:

1) (a_n): $a_n = -48$, $d = \frac{2}{3}$. Знайдіть n, a_1.
2) (c_n): $c_2 + c_5 = 26$, $c_1 + c_3 = 14$. Знайдіть d, c_{10}.
3) (x_n): $x_7 = 6,8$. Знайдіть S_{13}.
4) (a_n): $a_1 = 12,2$, $a_3 = 10,6$. Знайдіть кількість додатних членів цієї прогресії та її перший від'ємний член. Визначте, чи є членом цієї прогресії число 3,8. Якщо так, знайдіть його номер.
5) (x_n): $x_n = 12n - 18$. Знайдіть S_{20}; m, якщо $S_m = 480$; k, якщо S_k набуває найменшого значення.
6) (y_n): $S_7 = 3,5$, $S_{10} = 42,5$. Знайдіть y_1, d, y_{13}.

3 У геометричній прогресії (b_n):

1) $b_1 = 12$, $b_4 = \frac{3}{2}$. Знайдіть q, S_7.
2) $b_1 + b_2 = 18$, $b_1 + b_3 = 30$. Знайдіть b_1.
3) $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364$. Знайдіть b_2.
4) $S_8 = 765$, $q = 2$. Знайдіть b_1, b_8.
5) b_3 на 75 % менше, ніж b_1. Знайдіть S_6, якщо $b_2 = -6$.

4 Сума чисел a, b і c, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює 26. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 6 і 3, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Скільки відсотків становить число c від числа a? Яке відсоткове відношення числа c до числа a?

5 Розв'яжіть задачу.

1) На екскурсію до печери заходять групами по 12 осіб (1 екскурсовод і 11 екскурсантів).
а) Скільки людей перебуває в печері разом із двома екскурсоводами; із трьома екскурсоводами?
б) Запишіть формулу, за якою можна обчислити кількість людей, що перебувають в печері разом з n екскурсоводами.
в) Скільки екскурсоводів присутні в печері, якщо зараз у ній перебуває 108 осіб?
2) Учень школи бойових мистецтв за перший місяць навчання вивчив техніку застосування 5 прийомів. Кожного наступного місяця він вивчав техніку застосування удвічі більшої кількості прийомів, ніж попереднього. Скільки прийомів учень знав наприкінці першого півріччя навчання?
3) Наталія купила новий автомобіль і за перший рік проїхала 960 км. Кожного наступного року дівчина проїжджала удвічі більшу відстань, ніж попереднього року.
а) Скільки кілометрів проїхала Наталія на автомобілі за четвертий рік від початку його експлуатації?
б) Скільки всього кілометрів проїхала Наталія на автомобілі за чотири роки від початку його експлуатації?
4) В опуклому n-кутнику величини кутів утворюють арифметичну прогресію з різницею 10°. Знайдіть найбільший кут цього n-кутника, якщо його найменший кут дорівнює 100°.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

(підсумкова)

Варіант 1

Готуємося до ДПА

interactive.ranok.com.ua

Відповіді та інший варіант роботи

Довідковий матеріал 5–9 класів

1 Укажіть нерівність, яка є правильною, якщо a — будь-яке дійсне число.

А	Б	В	Г
$3a>2a$	$a-3>a-2$	$2+a>3+a$	$3-a>2-a$

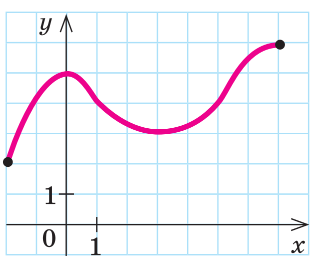
2 Відомо, що $3<a<8$ і $1<b<2$. Оцініть значення виразу $a-b$.

А	Б	В	Г
$1<a-b<7$	$2<a-b<6$	$4<a-b<10$	$5<a-b<9$

3 Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{14-x}$.

А	Б	В	Г
$[14;+\infty)$	$[-14;+\infty)$	$(-\infty;14]$	$(-\infty;-14]$

4 Знайдіть область значень функції $y=f(x)$, графік якої зображено на рисунку.

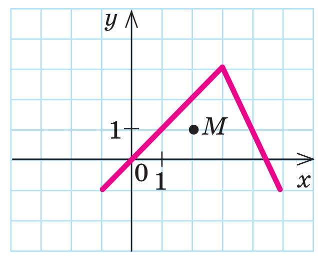


А	Б	В	Г
$[2;5]$	$[2;6]$	$[-2;7]$	$[3;5]$

5 Знайдіть нулі функції $y=\dfrac{x+7}{3-x}$.

А	Б	В	Г
$x=7$	$x=-7$	$x=3$	$x=-3$

6 На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$. Укажіть функцію, графік якої проходить через точку M.



А	Б	В	Г
$y=f(x+2)$	$y=f(x-2)$	$y=f(x)+2$	$y=f(x)-2$

7 Знайдіть точку перетину графіка функції $y=8-2x$ з віссю Oy.

А	Б	В	Г
$(0;4)$	$(4;0)$	$(0;8)$	$(8;0)$

8 Розв'яжіть нерівність $81-x^2>0$.

А	Б	В	Г
$(-\infty;9)$	$(9;+\infty)$	$(-\infty;-9)\cup(9;+\infty)$	$(-9;9)$

9 Знайдіть третій член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 2$, $b_2 = 6$.

А	Б	В	Г
18	12	10	8

10 У кожному класі художньої студії навчається не менше 7 і не більше 12 учнів. Відомо, що зараз у п'яти класах студії разом навчаються m учнів. Укажіть число, яке *може* бути значенням m.

А	Б	В	Г
25	30	45	65

11 При якому значенні m система рівнянь $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ mx + 5y = 3 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г
Таких значень m не існує	$m = 4$	$m = 3$	$m = 5$

12 Обчисліть суму перших 24 натуральних чисел.

А	Б	В	Г
576	600	288	300

13 Задано подвійну нерівність $-13 \leqslant 9 - \frac{2}{5}x < 27$.

Знайдіть множину її розв'язків та визначте найменший цілий розв'язок.

14 Знайдіть значення b, при якому графік квадратичної функції $y = x^2 + bx + 15$ проходить через точку $M(2; 3)$. Запишіть формулу, якою задано функцію. Побудуйте графік функції та визначте проміжки її зростання та спадання.

15 Два портові крани, працюючи разом, можуть розвантажити судно за 2 год 40 хв. Якщо перший кран працюватиме 1 год, а потім його змінить другий кран і працюватиме 2 год, то судно буде розвантажено лише наполовину. Нехай перший кран, працюючи самостійно, може розвантажити таке судно за x год, а другий — за y год.

1) Складіть систему рівнянь для визначення x і y.

2) Знайдіть x і y.

16 Повна вартість доставки великогабаритних вантажів складається з вартості доставки на 1-й поверх будинку та вартості підйому вантажу на потрібний поверх. Вартість підйому вантажу на кожен наступний поверх перевищує вартість його підйому на попередній на одну й ту саму величину. Відомо, що вартість доставки вантажу на 10-й та на 15-й поверхи будинку становить 235 грн і 310 грн відповідно.

1) Знайдіть вартість доставки вантажу на 1-й поверх.

2) Складіть формулу, за якою обчислюється вартість a_n (у грн) доставки вантажу на n-й поверх.

17 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 9x^2 - xy = 5, \\ y^2 - 5xy = -5. \end{cases}$

18 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - 5x - 36 \geqslant 0, \\ |x| < 6. \end{cases}$

Бонусне завдання

Розв'яжіть графічним способом рівняння $x^2 - 2x + 1 = |x + 1|$.

«Посміхайся майбутньому, і воно посміхнеться тобі у відповідь.»

Йоко Оно

Контрольна робота № 1 (діагностична)

7. 0,4. **8.** $\pm\sqrt{11}$. **9.** 1) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$; 2) графіком функції є пряма $y=x-5$, $x\neq-2$. **10.** 1) $\frac{300}{x}-\frac{300}{x+5}=3$; 2) $x=20$. **Бонусне завдання.** $x_1=-3$; $x_2=-3+\sqrt{17}$; $x_3=-3-\sqrt{17}$.

Контрольна робота № 2

7. $-7<20-3x<32$. **8.** 1) Від 14 до 22 лампочок; 2) 18 лампочок. **Бонусне завдання.** Множина розв'язків нерівності — полоса, розташована між прямими $y=-3$ та $y=1$.

Контрольна робота № 3

7. $x\in[-5;30)$. **8.** $x\in(-3;17]$. **9.** 1) $\begin{cases} n+\frac{n}{4}>20, \\ n-\frac{n}{2}<15; \end{cases}$ 2) $n\in(16;30)$; 3) 13. **10.** $x\in[4;17)$. **Бонусне завдання.** $x\in[0;15)$.

Контрольна робота № 4

7. 1) 700, о 22-00; 2) $[6;10]$, $[14;22]$. **10.** 1) $E(y)=[-1;+\infty)$; 2) $x_1=2$, $x_2=4$; 3) $y>0$, якщо $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$; $y<0$, якщо $x\in(2;4)$; 4) функція спадає на проміжку $(-\infty;3]$; функція зростає на проміжку $[3;+\infty)$. **Бонусне завдання.** Два корені.

Контрольна робота № 5

7. $x\in[-7;2]$. **8.** 1) $c=3$, $y=-x^2-2x+3$; 2) графіком функції є парабола з вершиною в точці $(-1;4)$, вітки якої спрямовані вниз; $y\uparrow$ при $x\in(-\infty;-1]$, $y\downarrow$ при $x\in[-1;+\infty)$. **9.** 1) 3 с; 2) $t\in[0;2)$. **10.** $x\in[-12;-1)\cup(11;12]$. **Бонусне завдання.** $x\in[2-\sqrt{7};\ 1)\cup(3;\ 2+\sqrt{7}]$.

Контрольна робота № 6

7. 8 і 3. **8.** 18 км/год і 2 км/год. **9.** $(8;1)$, $(-8;-1)$. **10.** $(4;3)$, $(-3;-4)$. **Бонусне завдання.** $(4;1)$.

Контрольна робота № 7

7. Так, $n=30$. **8.** –6 і –2; $a_{14}=42$. **9.** 1) 36; 2) 1620. **10.** 1) 200; 2) 375. **Бонусне завдання.** $x=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}$.

Контрольна робота (підсумкова)

13. $(-45;55]$; -44. **14.** $b=-8$, $y=x^2-8x+15$; графіком функції є парабола з вершиною в точці $(4;-1)$, вітки якої напрямлені вгору; $y\downarrow$ при $x\in(-\infty;4]$, $y\uparrow$ при $x\in[4;+\infty)$. **15.** 1) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}, \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $x=4$, $y=8$. **16.** 1) 100 грн; 2) $a_n=85+15n$. **17.** $(1;4)$, $(-1;-4)$. **18.** $x\in(-6;-4]$. **Бонусне завдання.** $x_1=0$, $x_2=3$.

РОЗДІЛ 1

§ 1

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні. Math for life. Задача «Подорож Закарпаттям». **1.** 1) 19 400 грн; 2) 21 850 грн; 3) 19 350 грн. **2.** *A* або *C*. **3.** 21 850 грн. Домашнє завдання. **1.** 1) Неправильна; 2) Правильна. **4.** Перший юнак витратив більше коштів.

§ 2

Завдання із зіркою. Правильні твердження 1, 2, 4. Самостійна робота 1. **7.** 1) $78<4b<80{,}4$; 2) $234<12b<241{,}2$. Math for life. Задача «Напис на етикетці». **1.** $5{,}94\leqslant V\leqslant 6{,}06$. **2.** 1) $594\leqslant V\leqslant 606$. 2) Ні, недостатньо. Домашнє завдання. **1.** 1) $3<3m<15$; $5<3m+2<17$; $-5<-m<-1$; $-1<4-m<3$; 2) $-12<3m<9$; $-10<3m+2<11$; $-3<-m<4$; $1<4-m<8$; 3) $-5<\frac{m}{2}<8$; $-10<\frac{m}{2}-5<3$; $-48<-3m<30$; $-42<6-3m<36$; 4) $-3{,}4<\frac{m}{2}<-2{,}1$; $-8{,}4<\frac{m}{2}-5<-7{,}1$; $12{,}6<-3m<20{,}4$; $18{,}6<6-3m<26{,}4$. **2.** 1) $5300<c<6800$; 2) $48<10a<51$; 3) $1425\leqslant 15m\leqslant 1575$; 4) а) Від 14 до 17; б) 14.

§ 3

Завдання із зіркою. Твердження 1, 2, 3, 4 правильні. Самостійна робота 2. **7.** 1) $150\leqslant S\leqslant 600$; 2) $50\leqslant P\leqslant 100$. Math for life. Задача «Будівництво автозаправок». Точки *B*, *C* і *D* мають лежати на одній прямій. Домашнє завдання. **1.** 1) $12<a+6<13$; 2) $7<c-5<13$; 3) $18<a+c<25$; 4) $-18<-c<-12$; 5) $-12<a-c<-5$; 6) $30<5a<35$; 7) $-9<-\frac{c}{2}<-6$; 8) $21<5a-\frac{c}{2}<29$.

2. 1) $8<ac<250$; 2) $0,04<\frac{1}{c}<0,25$; 3) $0,08<\frac{a}{c}<2,5$; 4) $8,08<ac+\frac{a}{c}<252,5$; 5) $0,1<\frac{1}{a}<0,5$; 6) $0,4<\frac{c}{a}<12,5$; 7) $8,4<ac+\frac{c}{a}<262,5$; 8) $-49,92<\frac{a}{c}-ac<-37,5$. **4.** 1) $0,2\leqslant S\leqslant 0,36$; 2) 2 км, 12 км; 3) а) 6 пасажирів; б) 480 пасажирів; 4) а) $k=0,2$; б) 18 дзвінків.

§ 4

Завдання із зіркою. Правильні твердження 2, 3, 4, 5. Math for life. Задача «Раціональне харчування». **1.** $340+160n\leqslant 600$, ні не може. **2.** $580+140x\leqslant 600$, ні, не може. Домашнє завдання. **1.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **2.** 1) $[-1;4]$; 2) $(3,2;5,9)$; 3) $[-5;16)$; 4) $\left(7\frac{2}{9};+\infty\right)$. **3.** 1) 2; 2) 4; 3) 0; 4) розв'язків не існує. **4.** $v\leqslant 50$; $m\leqslant 7$; $b\leqslant 2,7$; $h\leqslant 3,5$; $l\leqslant 10$; $F\leqslant 5$.

§ 5

Завдання із зіркою. Всі твердження правильні. Самостійна робота 3. **7.** 1) $4(x+5)\leqslant 48$; 2) $x\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$. **8.** $(-\infty;5]$; $\{1;2;3;4;5\}$. Math for life. Задача «Рентабельність перевезення вантажу». **1.** а) 228. б) 164. **2.** 340 км. **3.** Більше ніж 60 км. Домашнє завдання. **1.** 1) $x\in(-\infty;16]$; 2) $x\in\left(-\frac{1}{7};+\infty\right)$; 3) $x\in(-\infty;8)$; 4) $x\in[1,5;+\infty)$. **2.** 1) $x\in(-\infty;9]$; 2) $x\in(-\infty;-20)$; 3) $\{1;2;3;4;5;6\}$; 4) $\{1;2;3;4;5\}$. **3.** 1) $x\in\{1;2;3;4\}$; 2) $x\in\{1;2;3;\ldots;30\}$; 3) а) 28, 29, 30, …; б) 28 квартир; в) 55 квартир; 4) а) $30+25x\leqslant 200$; б) 6 розваг. **4.** 1) $x\in[18;+\infty)$; 2) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{9}\right]$; 3) $x\in(-\infty;-600]$; 4) $x\in(-\infty;7]$. **5.** 1) $17-x>2(5-3x)$; $x>-1,4$; 2) $-12+7n\leqslant 6n-1$; $n\leqslant 11$. **6.** $t\leqslant 30$; $t=30$; $95\leqslant t\leqslant 100$; $t\leqslant 200$; $t\leqslant 150$; $t\leqslant 110$.

§ 6

Завдання із зіркою. Твердження 1, 2, 3, 5 правильні. Домашнє завдання. **2.** 1) $[3;6]\cap[4;7]=[4;6]$; $[3;6]\cup[4;7]=[3;7]$; 2) $(-3;9]\cap(-\infty;5)=(-3;5)$; $(-3;9]\cup(-\infty;5)=(-\infty;9]$; 3) $[-1;3)$; 4) $(6;15]$. **2.** 1) $x\in[3;9]$; 2) $x\in(-2;18)$; 3) $x\in(-20;9]$; 4) $x\in(-70;42]$. **3.** 1) $[6;+\infty)\cup(-\infty;-5]=(-\infty;-5]\cup[6;+\infty)$; $[6;+\infty)\cap(-\infty;-5]=\varnothing$; 2) $(-\infty;6]\cup[13;+\infty)$; $(-\infty;6]\cap[13;+\infty)=\varnothing$; 3) $(-\infty;-0,3)\cup(-\infty;20]=(-\infty;20]$; $(-\infty;-0,3)\cap(-\infty;20]=(-\infty;-0,3)$; 4) $[-15;+\infty)\cup(-\infty;37]=(-\infty;+\infty)$; $[-15;+\infty)\cap(-\infty;37]=[-15;37]$; 5) $[35;+\infty)\cup(-\infty;-0,25]=(-\infty;-0,25]\cup[35;+\infty)$; $[35;+\infty)\cap(-\infty;-0,25]=\varnothing$; 6) $(-\infty;14)\cup(-3;+\infty)=(-\infty;+\infty)$; $(-\infty;14)\cap(-3;+\infty)=(-3;14)$.

§ 7

Самостійна робота 4. **7.** $x\in[3;7)$. **8.** $x\in[1;+\infty)$. Завдання із зіркою. Твердження 2, 3, 5 правильні. Math for life. Задача «Феєрверк». **1.** Жовтим. **2.** Червоним. **3.** Зеленим і блакитним. Домашнє завдання. **1.** 1) $x\in(-1;5)$; 2) $x\in(6;+\infty)$; 3) $x\in[-9;13]$; 4) $x\in(2;11]$. **2.** 1) $x\in[-7;2)$; 2) $x\in(-17;4]$; 3) $x\in(6;22)$; 4) $x\in\left[-\frac{25}{9};5\right]$. **3.** 1) $x\in[-5;5]$; 2) $y\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 3) $x\in(-8;8)$; 4) $y\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$; 5) $x\in[-5;13]$; 6) $y\in(-\infty;-13)\cup(11;+\infty)$; 7) $x\in(-16;4)$; 8) $y\in\left(-\infty;-\frac{11}{2}\right]\cup[6;+\infty)$. **4.** 1) а) $\begin{cases}x\leqslant 50,\\ x+15\geqslant 24;\end{cases}$ б) $x\in[9;50]$; 2) а) $\begin{cases}2v>120,\\ 3x\leqslant 390;\end{cases}$ б) $(60;130]$; 3) а) $\begin{cases}80+6x\leqslant 200,\\ 100+10x\geqslant 200;\end{cases}$ б) $x\in[10;20]$; 4) $(8;32)$.

РОЗДІЛ 2

§ 8

Завдання із зіркою. Твердження 2, 3, 4, 5 правильні. Math for life. Задача «Вантажоперевезення». **1.** $D(f)=[20;50]$. **2.** $E(f)=\{1000\}\cup\{1200\}\cup\{1400\}$. **3.** 1400 грн. **4.** 1) Ні. 2) Ні. Домашнє завдання. **1.** 1) $y(0)=7$, $y(4)=3$, $y(s)=7-s$; 2) $y(0)=-10$, $y(-3)=-4$, $y(a+2)=\frac{20}{a}$; 3) $y(0)=2$, $y(36)=0$, $y(a-64)=10-\sqrt{a}$; 4) $y(0)=8$, $y(-2)=-2$, $y(n-1)=-3n^2+5n+12$. **2.** 1) $x=-10$; 2) $x=7$; 3) $x=58$; 4) $x_1=-3$, $x_2=5$. **3.** 1) $D(g)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; 2) $D(g)=(-\infty;12]$; 3) $D(g)=[5;8)\cup(8;+\infty)$; 4) $D(g)=(7;16]$. **4.** 1) Графіком функції є пряма $y=2$ з виколотою точкою $(3;2)$; 2) графіком функції є пряма $y=1-x$ з виколотою точкою $(-1;2)$; 3) графіком функції є крива $y=\sqrt{x}$ з виколотою точкою $(4;2)$; 4) графіком функції є крива $y=\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

§ 9

Завдання із зіркою. Твердження 1, 2, 3 правильні. Math for life. Задача «Політ на гелікоптері». **1.** 800 м. $t=8$ хв; **2.** 3 рази, $t_1=0$ хв, $t_2=4$ хв, $t_3=10$ хв. **3.** 1) $[0;1{,}5]$, $[4;5]$, $[7;8]$; 2) $[1{,}5;4]$, $[8;10]$; 3) $[5;7]$, 500 м. **4.** $h(1)=400$, $h(2)=400$, $h(3)=200$, $h(6)=500$, $h(9)=500$. Самостійна робота 5. **7.** $y<0$ при $x\in(10;+\infty)$, $y>0$ при $x\in(-\infty;10)$. **8.** 1) $D(y)=(-3;0)\cup(0;+\infty)$; 2) Графіком функції є $y=\frac{1}{x}$, $x\in(-3;0)\cup(0;+\infty)$. Домашнє завдання. **1.** 1) $x=7$; 2) $x_1=-3$, $x_2=1$; 3) $x=16$; 4) $x_1=1$, $x_2=0$. **2.** 1) $y<0$ при $x\in(-\infty;5)$, $y>0$ при $x\in(5;+\infty)$; 2) $y<0$ при $x\in(12;+\infty)$, $y>0$ при $x\in(-\infty;12)$; 3) $y<0$ не існує, $y>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup\cup(1;+\infty)$; 4) $y<0$ не існує, $y>0$ при $x\in[0;+\infty)$. **3.** 1) $a=24$; 2) $a=-22$; 3) $a=\pm0{,}2$; 4) $a=\pm1$.

§ 10

Самостійна робота 6. **7.** 1) 40 °С, 14-00; 2) З 8-00 до 22-00. Завдання із зіркою. Твердження 2, 3 правильні. Math for life. Задача «Гоночний автомобіль». **1.** 175 км/год. **2.** 1,5 км; 75 км/год. **3.** Спочатку зменшувалась, а потім збільшувалась; 125 км/год. **4.** 1) Від 0,25 км до 0,375 км; від 1,25 км до 1,5 км; від 2,5 км до 2,625 км; 2) від 0,375 км до 0,5 км; від 1,5 км до 1,75 км; від 2,625 км до 2,75 км; 3) від 0 км до 0,25 км; від 0,5 км до 1,25 км; від 1,75 км до 2,5 км; від 2,75 км до 3 км. **5.** Б. Домашнє завдання. **1.** 1) 0 і 4; 2) 0 і 5; 3) 0 і 3; 4) −1 і 4; 5) 0 і 4; 6) −3 і 0; 7) −2 і 4; 8) −3 і 5. **3.** 1) 60; 2) 80, 3-00; 3) 50, з 12-00; 4) з 00-00 до 3-00 та з 7-00 до 8-00. **4.** 1) 30 грн; 2) у понеділок, 40 грн; 3) у четвер, 25 грн; 4) у середу. **5.** 1) 22 °С; 2) 24 °С, 10 серпня; 3) 14 °С, 5 серпня; 4) з 3 по 6 серпня.

§ 11

Самостійна робота 7. **8.** $a=-2$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=1$. Завдання із зіркою. Твердження 1, 3 правильні. Math for life. Задача «Зйомка дикої природи з квадрокоптера». **1.** 1) Необхідно графік функції $y=f(x)$ паралельно перенести на 1 одиницю вправо; 2) необхідно графік функції $y=f(x)$ паралельно перенести на 2 одиниці вгору; 3) необхідно графік функції $y=f(x)$ паралельно перенести спочатку на 1 одиницю вліво, а потім — на 3 одиниці вниз; 4) спочатку необхідно графік функції $y=f(x)$ паралельно перенести на 2 одиниці вправо, а потім — на 1 одиницю вгору. **2.** Над родиною леопардів пройшла траєкторія третього квадрокоптера. Домашнє завдання. **1.** 1) Графік функції $y=x^2$ необхідно паралельно перенести на 4 одиниці вправо уздовж осі Ox; 2) графік функції $y=(x-4)^2$ необхідно симетрично відобразити відносно осі Ox; 3) графік функції $y=-(x-4)^2$ необхідно паралельно перенести на 3 одиниці вгору уздовж осі Oy; 4) для побудови графіка функції $y=(x+5)^2-1$ необхідно графік функції $y=x^2$ паралельно перенести на 5 одиниць вліво уздовж осі Ox, а потім графік функції $y=(x+5)^2$ паралельно перенести на 1 одиницю вниз уздовж осі Oy. **2.** 1) Графік функції $y=\frac{1}{x}$ необхідно паралельно перенести на 3 одиниці вліво уздовж осі Ox; 2) графік функції $y=\frac{1}{x+3}$ необхідно паралельно перенести на 2 одиниці вниз уздовж осі Oy; 3) для побудови графіка функції $y=\frac{3}{x-2}+1$ необхідно графік функції $y=\frac{3}{x}$ паралельно перенести на 2 одиниці вправо уздовж осі Ox, а потім графік функції $y=\frac{3}{x-2}$ паралельно перенести на 1 одиницю вгору уздовж осі Oy; 4) для побудови графіка функції $y=\frac{1}{x-1}+3$ необхідно графік функції $y=\frac{1}{x}$ паралельно перенести на 1 одиницю вправо уздовж осі Ox, а потім графік функції $y=\frac{1}{x-1}$ паралельно перенести на 3 одиниці вгору уздовж осі Oy. **3.** 1) $a=-3$; 2) $a=5$; 3) $a=-2$, $b=-3$; 4) $a=3$, $b=-\frac{1}{9}$; $c=1$. **4.** 1) $E(y)==[-1;+\infty)$; 2) $x_1=-5$, $x_2=-3$; 3) $y>0$, якщо $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;+\infty)$; $y<0$, якщо $x\in(-5;-3)$; 4) функція зростає на проміжку $[-4;+\infty)$; 5) функція спадає на проміжку $(-\infty;-4]$; 6) −1.

§ 12

Завдання із зіркою. Твердження 1, 2, 4, 5 правильні. Самостійна робота 8. **7.** 1) Графіком функції є парабола з вершиною в точці $(2;3)$; 2) 3 м. 8. 1) $b=6$, $y=x^2+6x+8$; 2) графіком функції є парабола з вершиною в точці $(-3;-1)$, вітки якої спрямовані вгору; $y>0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(-2;+\infty)$, $y<0$ при $x\in(-4;-2)$. Math for life. Задача «Історичний фільм». **1.** 200 м. **2.** 10 м. **3.** 100 м, висота має бути меншою від 10 м. Домашнє завдання. **1.** 1) $(-1;0)$ — вершина параболи, $x=-1$ — вісь симетрії параболи, $x=-1$ — нуль функції, $(0;1)$ — точка перетину параболи з віссю Oy; 2) $(1;1)$ — вершина параболи, $x=1$ — вісь симетрії параболи, $x_1=0$, $x_2=2$ — нулі функції, $(0;0)$ — точка перетину параболи з віссю Oy; 3) $(1;-4)$ — вершина параболи, $x=1$ — вісь симетрії параболи, $x_1=-1$, $x_2=3$ — нулі функції, $(0;-3)$ — точка перетину параболи з віссю Oy; 4) $(4;-2)$ — вершина параболи, $x=4$ — вісь симетрії параболи, нулів функція не має, $(0;-3)$ — точка перетину параболи з віссю Oy. **2.** 1) $b=7$, $y=-x^2+7x$; $(3{,}5;\ 12{,}25)$; $E(y)=(-\infty;12{,}25]$; $y_{max}=12{,}25$; $y\uparrow$ при $x\in(-\infty;3{,}5]$, $y\downarrow$ при $x\in[3{,}5;+\infty)$; $x_1=0$, $x_2=7$; $y<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(7;+\infty)$, $y>0$ при $x\in(0;7)$; 2) $c=-12$, $y=x^2+4x-12$; $(-2;-16)$; $E(y)=[-16;+\infty)$; $y_{min}=-16$; $y\downarrow$ при $x\in(-\infty;-2]$, $y\uparrow$ при $x\in[-2;+\infty)$; $x_1=-6$, $x_2=2$; $y>0$ при $x\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$, $y<0$ при $x\in(-6;2)$; 3) $b=-6$, $c=7$, $y=-x^2-6x+7$; $(-3;16)$; $E(y)=(-\infty;16]$; $y_{max}=16$; $y\uparrow$ при $x\in(-\infty;-3]$, $y\downarrow$ при $x\in[-3;+\infty)$; $x_1=-7$, $x_2=1$; $y<0$ при $x\in(-\infty;-7)\cup(1;+\infty)$, $y>0$ при $x\in(-7;1)$; 4) $a=2$, $b=-16$, $c=40$, $y=2x^2-16x+40$; $(4;8)$; $E(y)=[8;+\infty)$; $y_{min}=8$; $y\downarrow$ при $x\in(-\infty;4]$, $y\uparrow$ при $x\in[4;+\infty)$; нулів немає; $y>0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$. **3.** 1) $y=-\frac{3}{4}x^2+3x$. 2) б) 5 м; 3) а) 84; б) 28 800 грн; г) $p=500$, 30 000 грн; 4) б) 1 м; в) так, може.

§ 13

Самостійна робота 9. **7.** 1) Через 3,2 с; 2) $t\in(1;2{,}2)$. **8.** $x\in(-5;3]$. Завдання із зіркою. Всі твердження правильні. Math for life. Задача «Моделі прогнозування». $7<x\leqslant 8$. Домашнє завдання. **1.** 1) $x\in[-2;2]$; 2) $x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$; 3) $x\in\{4\}$; 4) $x\in(-2;5)$. **2.** 1) $x\in[-6;6]$; 2) $x\in(-\infty;-1)\cup(16;+\infty)$; 3) $x\in[-2;0]$; 4) $x\in(-\infty;+\infty)$. **3.** 1) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4};3\right)$; 2) $x\in(-15;-14]$; 3) $x\in[-5;-3)\cup(3;4]$; 4) $x\in[-7;-3)$. **4.** 1) 1; 2) -2; 3) -2; 4) 1. **5.** 1) $[-4;4]$; 2) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; 3) $\left[\frac{1}{3};3\right]$; 4) $\left[-2;-\frac{1}{3}\right]$. **6.** 1) $(-\infty;0]\cup[15;+\infty)$; 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup[0;+\infty)$; 3) $(-\infty;-9)\cup(10;+\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{3};4\right)$. **7.** 1) $[-2;2]$; 2) $\{5\}$; 3) $\left[-1;\frac{1}{2}\right)$; 4) $\varnothing$.

§ 14

Завдання із зіркою. Всі твердження правильні. Самостійна робота 10. **7.** $(0;-2)$ та $(3;1)$. **8.** $(-1;8)$, $(1;-8)$. Math for life. Задача «Туристські маршрути». **1.** $N(0;1)$ і $M(3;4)$. **2.** Маршрут A. **3.** Група, що подорожує за маршрутом B. Домашнє завдання. **1.** $(-1;1)$, $(1;-1)$. **2.** 1) $(-1;0)$, $(-4;-3)$; 2) $(-2;1)$; 3) $(3;0)$, $(4;1)$. **3.** 1) $(6;1)$, $(-6;-1)$; 2) $(-1;3)$, $\left(-5;-\frac{21}{5}\right)$; 3) $(-1;6)$, $(1;-6)$; 4) $(1;-3)$, $(-1;3)$. **4.** 1) $(-6;-6)$; 2) $(4;8)$, $(-4;-8)$; 3) $\left(4;\frac{2}{3}\right)$, $\left(-15;-\frac{5}{2}\right)$; 4) $(8;2)$, $(-8;-2)$. **5.** 1) $m\neq 10$; таких значень m не існує; $m=10$; 2) таких значень m не існує; $m\neq 1$; $m=1$; 3) $m\neq -10$; таких значень m не існує; $m=-10$; 4) $m\neq -1$ і $m\neq 2$; $m=-1$; $m=2$.

§ 15

Завдання із зіркою. Твердження 1, 3, 4, 5 правильні. Math for life. Задача «Вступні іспити». **1.** 150 балів та -60 балів. **2.** 1) $30-x-y$; 2) $5x-2y$. **3.** $5x-2y=95$; $x=19+\frac{2y}{5}$. **4.** 1) $x=21$, $y=5$. 2) 4 завдання. Самостійна робота 11. **7.** 1) $\begin{cases}x-y=5,\\ xy=14;\end{cases}$ 2) $(7;2)$, $(-2;-7)$. **8.** 2 год та 3 год. Домашнє завдання. **1.** 1) 2 та 8; 2) $(9;5)$, $(-5;-9)$; 3) 11 та 3; 4) 8 см і 15 см; 60 см². **2.** 1) $x=9$, $y=6$; 2) $x=5$, $y=8$; 3) у першому будинку 16 поверхів, на кожному поверсі 8 квартир; у другому будинку 20 поверхів, на кожному поверсі 6 квартир;

4) 24 студенти; 4 аркуші. **3.** 1) $x=6$, $y=5$; 2) $x=4$, $y=6$; 3) за 12 год і 24 год; 4) 12 і 16 консультацій. **4.** 1) $x=6$, $y=18$; 2) $x=120$, $y=100$; 3) 12 км/год, 4 км/год; 4) 90 км/год, 150 км/год.

РОЗДІЛ 3

§ 16

Завдання із зіркою. Твердження 2, 3, 4 та 5 правильні. Math for life. Задача «Трейлер до нового фільму». **1.** $\frac{2}{3}$. **2.** 75 %. **3.** 20 %. **4.** $y_n=\frac{1}{n}$. **5.** $n=10$. Домашнє завдання. **1.** 1) $x_1=\frac{1}{4}$; $x_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\frac{3}{4}$; 2) $c_1=5$; $c_2=3$; $c_6=-1$; 3) $a_1=15$; $a_2=9$; $a_6=5$; $a_p=\frac{12}{p}+3$; $a_{k+1}=\frac{12}{k+1}+3$; 4) $y_1=-11$; $y_2=-2$; $y_{12}=418$; $y_k=3k^2-14$; $y_{m-3}=3m^2-18m+13$. **2.** 1) 3, 3, 3; 2) 32, 8, 2; 3) 2, 0, −12; 4) 1, 10, 36. **3.** 1) Так, $n=5$; 2) так, $n=12$; 3) ні; 4) так, $n=10$. **4.** 1) а) 6; б) 9; 2) а) 3200 грн; б) $800n$; 3) а) 8 осіб; 12 осіб; б) $4n$; в) 27 номерів; 4) а) 510 осіб; б) 450 тварин.

§ 17

Самостійна робота 12. **7.** $n=13$. **8.** 1) 16; 2) 11. Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні. Math for life. Задача «Дзвінки у роумінгу». **1.** 120. **2.** 175. **3.** Так, правильну. **4.** $a_{n+1}=a_n$, $a_1=16$. **5.** $a_n=16n$. Домашнє завдання. **1.** 1) $d=3$, $a_3=8$; 2) $d=-5$, $a_4=29$; 3) $d=1{,}3$, $a_{12}=10{,}3$; 4) $d=-9$, $a_{26}=\sqrt{5}-225$. **2.** 1) Так, $n=5$; 2) ні; 3) ні; 4) так, $n=21$. **3.** 1) $x=3$, $y=8$; 2) $x=5$, $y=-17$; 3) 5; 14; $x_{14}=113$; 4) −1,3; 3,4; $x_{16}=64{,}5$. **4.** 1) −4; 2) −7; 3) −1; 4) −0,3. **5.** 1) $2n+6$; 2) $5n$. **6.** 1) 70; 90; 2) 32; 3) а) 3600 грн; б) $a_n=4500-300n$; 4) а) 18; б) 15; в) $a_n=12+2n$.

§ 18

Math for life. Задача «Податок на прибуток». **1.** 1 030 000 грн. **2.** $y_n=970\,000+30\,000n$. **3.** 13 980 000 грн. **4.** 150 000 грн. **5.** 2 097 000 грн. Самостійна робота 13. **7.** 1) 15; 2) 810. **8.** 1) 27; 2) 117. Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні. Домашнє завдання. **1.** 1) 270; 2) −2250; 3) $S_n=(3n-81)n$; 21 900; 4) $S_n=\frac{(39{,}3-0{,}5n)n}{2}$, −535. **2.** 1) −99; 2) 125; 3) 696; 4) 5100. **3.** 1) 741; 2) −1326; 3) 2475; 4) 34 650. **4.** 1) 18 зустрічей; 2) 192 тис. литрів; 3) а) 1550 м; б) $S_n=\frac{1650-50n}{2}\cdot n$; 4) а) 25 м.; б) 70 м; в) $S_n=\begin{cases}\frac{15+5n}{2}\cdot n, & 1\leqslant n\leqslant 7,\\ 175+40(n-7), & n\geqslant 8.\end{cases}$

§ 19

Завдання із зіркою. Лише твердження 1, 2, 3 правильні. Самостійна робота 14. **7.** 1) $a_2=3$; 2) $a_1=0$, $a_3=9$. **8.** 1) 121 000; 2) $b_n=100\,000\cdot(1{,}1)^n$. Math for life. Задача «Населення міста». **1.** $160\cdot 1{,}03^2$. **2.** $160\cdot 1{,}03^n$. **3.** $160\cdot 1{,}03^n\geqslant 200$. Домашнє завдання. **1.** 1) 36; 2) 45; 3) 192; 4) 48. **2.** 1) 14, 28, 56, 112; 2) 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$, 3, 12, 48; 4) 125, 25, 5, 1. **3.** 1) 147, 21, 3, $\frac{3}{7}$; 2) 2, $2\sqrt{3}$, 6, $6\sqrt{3}$; 3) $-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, −3, 6, −12, 24; 4) −4, $4\sqrt{2}$, −8, $8\sqrt{2}$, −16, $16\sqrt{2}$. **4.** 1) 1; 3; 5; 2) 3; 6; 9; 3) 9; 20; 31; 4) 10; 15; 20. **5.** 1) 78 000 телеглядачів; 2) 192 програми; 3) 64 бактерії; 4) а) 225 м²; б) $b_n=100\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

§ 20

Самостійна робота 15. **7.** 1) $b_1=1{,}5$; 2) $n=4$. **8.** 1) $b_n=1000\cdot 1{,}5^{n-1}$; 2) $S_n=2000\left(1{,}5^n-1\right)$. Math for life. Стрибки з парашутом. **1.** 12 парашутистів. **2.** $x_n=3\cdot 2^{n-1}$. **3.** 93. Завдання із зіркою. Всі твердження правильні. Домашнє завдання. **1.** 1) $S_n=10\left(1-0{,}3^n\right)$; 2) $S_n=5\left(1-(-19)^n\right)$; 3) $S_5=310$; $S_m=320\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)$, $S_{m-2}=320\left(1-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)$; 4) $S_4=-720$; $S_k=9\left(1-(-3)^k\right)$; $S_{k+1}=9\left(1+3\cdot(-3)^k\right)$. **2.** 1) $n=3$; 2) $n=7$; 3) $n=4$; 4) $n=5$. **3.** 1) $S_n=\frac{5}{6}\left(7^n-1\right)$; 2) $S_n=32\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$; 3) 93 або 33; 4) 242 або 122. **4.** 1) 600; 2) 252; 3) а) 1107; б) 1599; 4) а) $1{,}44x$; б) 100 000. **5.** 1) $\frac{5}{33}$; 2) $\frac{37}{30}$; 3) 6; 4) 0,05.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім’я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

ПРОКОПЕНКО Наталія Сергіївна
ЗАХАРІЙЧЕНКО Юрій Олексійович
КІНАЩУК Наталія Леонідівна

«АЛГЕБРА»
підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Провідний редактор *І. Л. Морева*. Редактор *О. В. Костіна*.
Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *Ю. В. Онищенко*, *В. І. Труфен*.
Комп’ютерна верстка *О. В. Сміян*. Коректор *Н. В. Красна*

В оформленні підручника використані зображення,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 30.06.2017. Формат 84×108/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 30,24. Обл.-вид. арк. 39,31. Тираж 30 462 прим. Зам. № 2910.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 701-11-22, тел./факс (057) 719-58-67.

Надруковано у друкарні ТОВ «Міцар + »,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3461 від 14.04.2009.
Тел. +38 (057) 764-83-04. E-mail: kt@mitsar.com.ua

9

АЛГЕБРА

Підручник відрізняє наявність таких матеріалів:

- Тексти і задачі для мотивації навчальної діяльності
- Приклади з покроковим розв’язанням, алгоритми дій
- Тренувальні вправи, різнорівневі завдання зростаючої складності
- Задачі практичного змісту, логічні задачі
- Домашні завдання з порадами щодо виконання
- Завдання для самоконтролю з інтернет-підтримкою
- Тематичне узагальнення і систематизація матеріалу
- Приклади використання комп’ютерних програм для побудов та обчислень
- Корисні пам’ятки та підказки, цікаві факти та інтернет-посилання

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити інтерактивне онлайн-тестування за кожною темою
- розглянути алгоритми виконання обчислень і побудов за допомогою комп’ютера
- ознайомитися з додатковими відомостями, пов’язаними зі змістом параграфів

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ISBN 978-617-09-3352-2
9 786170 933522
2269 8063

Інтернет-підтримка
interactive.ranok.com.ua